NOUVELLE ARCHITECTURE HYDRAULIQUE, CONTENANT L'ART D'ÉLEVER L'EAU AU...

Gaspard Clair Francois Marie Riche : de Prony

Digitized by Google

5.2.24

Digitized by Google

NOUVELLE
ARCHITECTURE
HYDRAULIQUE,

PREMIERE PARTIE.

Digitized by Google

Digitized by Google

NOUVELLE
ARCHITECTURE
HYDRAULIQUE,

Contenant l'art d'élever l'eau au moyen de différentes machines, de construire dans ce fluide, de le diriger, et généralement de l'appliquer, de diverses manieres, aux besoins de la société.

PAR M. DE PRONY, INGÉNIEUR DES PONTS ET CHAUSSÉES.

PREMIERE PARTIE,

Contenant un traité de mécanique à l'usage de ceux qui se destinent aux constructions de tous les genres, et des Artistes en général.

A PARIS,

RUE DAUPHINE, N°. 116,

Chez FIRMIN DIDOT, Libraire pour le Génie, l'Architecture et les Mathématiques; graveur et fondeur de caracteres.

DE L'IMPRIMERIE DE DIDOT FILS AINÉ, rue Pavée Saint-André.

M. DCC. XC.

Digitized by Google

Digitized by Google

AVERTISSEMENT.

Je me suis décidé, par différents motifs qu'il seroit inutile d'exposer ici, à retarder l'impression du discours préliminaire qui devoit précéder la premiere partie de mon ouvrage jusqu'à l'époque où je publierai la seconde. Je crois avoir suppléé à cette omission d'une maniere utile à bien des lecteurs, en donnant d'avance une collection de onze tables qui, vu l'abondance des matieres contenues dans ce volume, devoient être renvoyées au volume suivant.

L'objet du discours préliminaire est de présenter une suite de réflexions sur les arts et les artistes considérés dans leurs relations respectives, soit avec le systême de nos connoissances, soit avec le systême social : un pareil rapprochement devoit naturellement précéder un traité où l'on a rassemblé un grand nombre de recherches et d'inventions qui exigent le concours des facultés intellectuelles et de l'industrie mécanique de l'homme, et dont la connoissance et l'application à nos besoins supposent une éducation particuliere et des études longues et pénibles. J'y examine les rapports pris dans la nature, qui lient la théorie à la pratique ; je fais voir que leur influence réciproque tient à leurs progrès, et que la société en retirera d'autant plus d'avantages qu'elles seront plus intimement liées. Déja les lignes de démarcation qui les séparoient commencent à disparoître : il faut hâter l'époque de leur réunion, en préparant les spéculateurs et les praticiens à parler une langue commune ; et le moyen de parvenir à ce but desiré est de donner aux premiers du goût pour l'observation, et de faire sentir aux seconds les inconvénients et même les dangers du tâtonnement. En rapprochant ainsi des sciences les procédés des arts et en répandant sur les arts les lumieres des sciences, les objets d'application qui enrichiront les unes fourniront matiere à perfectionner et à épurer les autres. C'est dans cet esprit que j'ai conçu le plan de ce Traité d'Architecture Hydraulique et celui de la Science de l'Ingénieur qui doit faire partie de l'Encyclopédie Méthodique. Le but particulier de la composition de ces ouvrages me faisoit encore un devoir de les envisager sous un tel point de vue ; car je les ai spécialement destinés à servir de livres classiques pour les études qu'on fait à l'école des ponts et chaussées, dont l'inspection m'est confiée.

Quel que soit le jugement du public sur le degré de mérite qu'il faut attribuer à l'exécution de mon plan, je crois avoir quelques droits à son indulgence par les peines et les soins que j'ai pris pour en rassembler et en ordonner les matériaux. J'ai fait tous mes efforts pour ne rien omettre de ce qui est nécessaire et même accessoire aux études préliminaires qui doivent servir d'introduction à la pratique de la construction et à celle des arts en général ; et les lecteurs

Digitized by Google

s'appercevront aisément que j'ai été au-delà des promesses qui avoient été faites dans les premiers temps où il a été question de la nouvelle architecture hydraulique. La partie de cet ouvrage que je publie en ce moment contient des choses absolument nouvelles, parmi lesquelles on distinguera sûrement les découvertes récentes relatives aux *pompes* ou *machines à feu*, et la maniere d'évaluer dans tous les cas, d'après l'expérience et le calcul, la force expansive du fluide élastique qui les met en mouvement. Plusieurs autres objets que j'ai traités, et qui l'avoient déja été précédemment, peuvent également être regardés comme nouveaux, tant par la maniere dont ils sont présentés et liés aux principes généraux, que parcequ'étant épars dans divers ouvrages non classiques et peu répandus, ils étoient perdus pour l'instruction des artistes. J'en dis autant de quelques méthodes difficiles et abstraites que j'ai éclaircies et mises à la portée des commençants, ce qui n'a pas été la partie la moins pénible de mon travail. Dans cette classe est la théorie rigoureuse de l'équilibre et du mouvement des fluides, que j'ai développée et comparée avec la théorie ordinaire adoptée pour la pratique, en faisant voir comment celle-ci peut se déduire de l'autre. Le lecteur aura ainsi une idée nette de l'état actuel de cette science, et connoîtra les différentes causes d'où dépendent les progrès ultérieurs qu'elle peut faire.

Les notes, dont cette premiere partie est semée, peuvent, vu leur nombre et leur étendue, être considérées comme un ouvrage particulier où je renvoie la discussion de différentes matieres dont la connoissance est intéressante et utile, mais qui se trouvent ou trop peu élémentaires ou seulement accessoires à l'objet principal du traité. Ces notes offriront, entre autres objets, le précis raisonné des belles découvertes sur l'eau, l'air et le feu, qui font tant d'honneur à la physique et à la chymie modernes. Le grand parti qu'on tire de ces fluides, tant dans la mécanique que dans l'architecture hydraulique, et le rôle qu'ils jouent dans l'économie animale et dans la nature en général, doivent jeter quelque intérêt sur les détails qui tendent à les faire connoître sous tous les aspects.

Le jugement de l'Académie, qu'on trouvera ci-après, contient de plus grands détails sur les matieres renfermées dans ce traité. Je vais dire un mot de la seconde partie que je me propose de publier.

Les applications de l'Architecture hydraulique supposant presque toutes l'élévation de l'eau à une certaine hauteur, soit comme objet principal, soit comme moyen accessoire, j'ai pensé que, pour suivre une marche naturelle et méthodique, il falloit commencer la partie descriptive de cette science par l'exposition de tous les moyens qu'on emploie pour élever l'eau. J'ai considéré ces moyens sous deux aspects; savoir, quant aux machines, et quant aux moteurs.

Digitized by Google

L'ordre de la description des machines doit être assujetti à leur filiation réciproque ; filiation que j'ai développée dans le chapitre de cette premiere partie, où je traite des machines à élever l'eau en général et des pompes en particulier. J'y fais voir comment on peut passer par une gradation non interrompue des procédés les plus simples aux plus compliqués, et comment chacune des machines qui composent cette suite n'est qu'une modification particuliere des moyens primitifs que nous suggerent sans étude les notions qui dérivent des besoins de premiere nécessité. Ce plan, considéré dans toute son étendue, n'offre point la série historique des inventions ; il présente même souvent un ordre inverse : car, dans bien des cas, lorsque l'homme a eu besoin d'appeller l'art à son secours, il a commencé par des moyens compliqués avant de parvenir à la simplicité qui caractérise la perfection. Mais il s'agit ici d'une exposition raisonnée et non pas d'une nomenclature chronologique ; ce qui n'exclura pas néanmoins les détails historiques sur l'origine et les progrès successifs des inventions. Voici un apperçu de la méthode que j'ai suivie pour la description des machines.

Le moyen le plus simple d'élever l'eau est sans doute celui de la recueillir dans un seau ou vase quelconque auquel la main de l'homme est immédiatement appliquée : lorsqu'ensuite la surface du fluide est trop éloignée pour que la main puisse y atteindre, on attache des seaux à une corde qui tourne sur une poulie ou sur un cylindre, le mouvement pouvant alors être produit par des moteurs et des machines quelconques. Veut-on plus de continuité dans l'écoulement, on fait monter et descendre alternativement, par le moyen d'une chaîne ou corde sans fin, plusieurs vases qui, se vidant à des intervalles rapprochés, produisent la continuité qu'on desire. Ce procédé conduit à observer qu'en supprimant les vases, la simple adhésion de l'eau à la chaîne ou corde sans fin, combinée avec la vîtesse ascensionnelle, peut suffire pour élever une certaine quantité de ce fluide. La substitution d'une roue à une chaîne se présente ensuite naturellement et offre des avantages ; les *récipients* d'eau attachés à cette roue se vident ou par le centre ou par la circonférence, et en général prennent et versent l'eau d'un même côté par rapport à l'axe ; mais on peut s'aviser de placer un *récipient* de maniere qu'il puise l'eau d'un côté et la verse de l'autre côté de l'axe, soit à angle droit, soit obliquement à sa direction : le dernier cas fait voir la possibilité de donner aux molécules fluides un mouvement composé qui les fasse correspondre successivement à différents points de l'axe ; et en généralisant cette idée, d'abord très simple, on parvient à l'ingénieuse invention d'un vase formé en tuyau ou canal spiral, serpentant autour d'un axe de rotation oblique à l'horizon, et élevant l'eau par l'inclinaison variable des éléments de sa paroi intérieure.

Digitized by Google

L'expédient d'attacher une suite de seaux ou *récipients* à une chaîne ou corde sans fin conduit à un procédé plus perfectionné, qui consiste à former une espece de chapelet avec des bouchons ou rondelles qui s'introduisent dans l'extrémité submergée d'un tuyau ou canal cylindrique de même diametre, et qui, en s'élevant successivement, élevent en même temps l'eau qui est au-dessus d'eux: c'est ici un seau immobile auquel on adapte successivement différents fonds mobiles et qui est susceptible d'être varié et modifié d'une infinité de manieres (1).

Veut-on à ce nombre de fonds variable en substituer un seul qui produise le même effet, on y parviendra au moyen d'un mécanisme assez simple, d'où il résultera une nouvelle machine qu'on appelle *pompe foulante*. Si, dans certain cas, le fond mobile de cette derniere espece de seau doit être élevé au-dessus du niveau du réservoir, il sera nécessaire d'employer un agent intermédiaire pour y faire parvenir l'eau; cet agent sera le poids de l'atmosphere; et nous aurons ainsi les *pompes aspirantes*, qu'on pourra ou employer séparément ou combiner avec les pompes foulantes.

Quelque succinct que soit cet apperçu, on y verra néanmoins que la maniere dont j'envisage la série des machines à élever l'eau, en même temps qu'elle embrasse dans toute leur étendue les objets à décrire, a l'avantage d'assujettir leur étude à une marche méthodique et comparative. La filiation d'idées qu'elle renferme, quoique très naturelle, est cependant neuve si on la compare à ce qui a été publié jusqu'à présent; un ordre analogue sera observé pour ce qui est relatif aux moteurs. Chaque machine, outre les détails qui la constituent individuellement, sera considérée successivement comme mue par l'homme, mue par les animaux et mue par les fluides. On aura donc, 1°. les parties intégrantes de la machine; 2°. les discussions relatives à l'espece et à la nature du moteur; 3°. les détails sur la maniere dont ce moteur est appliqué ou dont son action est transmise à la résistance, ce qui renferme évidemment tous les objets à traiter dans l'exposition des moyens employés pour élever l'eau.

Les fluides, considérés comme moteurs des machines, comprennent l'eau, l'air et la vapeur de l'eau. Les deux premiers trouveront leur place à l'article de chaque machine à laquelle ils pourront s'appliquer; mais l'usage du dernier comportant des détails très considérables, j'en ferai une section particuliere qui terminera la seconde partie que j'annonce. C'est là qu'on trouvera la description détaillée de la machine à feu que j'ai promise à la fin de cette premiere partie, et à laquelle je mettrai tout le soin qu'exigent l'importance et la nouveauté de la matiere.

(1) On voit aisément que cette division comprend le *baquetage*, les *noria*, la machine de *Vera*, les roues à *godets*, à *tympan*, les machines à *bascule*, la *vis d'Archimede*, les *chapelets* de toute espece, etc. etc.

EXTRAIT

EXTRAIT DES REGISTRES

DE L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES.

Du 23 décembre 1789.

Nous, commissaires nommés par l'Académie, avons examiné la premiere partie d'une nouvelle Architecture hydraulique présentée par M. de Prony.

La premiere partie de la nouvelle Architecture hydraulique est un traité de mécanique dans lequel l'auteur a eu pour objet de rassembler toutes les connoissances sur l'équilibre et le mouvement nécessaires aux personnes qui s'occupent de constructions de tous les genres, et aux artistes en général. Ce traité commence par une introduction contenant les notions générales qui servent de fondement à toute la mécanique. L'auteur y donne, avec méthode et clarté, la théorie des *mouvements variés*, et l'exposition raisonnée des trois principes de l'*inertie*, de l'*équilibre* et du *parallélogramme des forces*, dont il fait d'avance quelques applications au mouvement en ligne courbe, au choc des corps durs, au levier et au plan incliné.

Le corps du traité est divisé en cinq sections, dont les quatre premieres sont destinées à la *statique*, *à la dynamique*, *à l'hydrostatique* et à *l'hydrodynamique*, et dont la cinquieme traite des machines et des moteurs considérés avec les différentes circonstances physiques qui influent sur l'équilibre et le mouvement.

Nous allons exposer brièvement le contenu de chacune de ces sections.

Premiere Section, *de la Statique.*

M. de Prony expose d'abord la théorie ordinaire des *moments*, et il en déduit les conditions générales de l'équilibre, tant pour le mouvement de translation que pour celui de rotation. Il passe ensuite au principe des *vîtesses virtuelles*, qu'il explique, et dont il déduit, à l'imitation de M. de la Grange, les formules générales d'équilibre pour l'un et l'autre de ces mouvements. Il applique ces formules à la recherche des centres de gra-

Digitized by Google

vité; il emploie le mouvement des centres de gravité pour la mesure des surfaces et de la solidité des solides, dans les cas où la chose est possible; et il explique avec détail une méthode pratique pour déterminer l'aire, la solidité et les centres de gravité des surfaces et des solides soumis ou non à une loi analytique.

L'auteur traite ensuite de l'équilibre des sept machines simples, auxquelles il applique les formules générales déduites du principe des *vitesses virtuelles*, et il donne une solution générale du problème de la courbe funiculaire à double courbure.

Cette premiere section est terminée par un chapitre sur la Statique des voûtes, où l'auteur traite de leur poussée, de leur équilibre, de la pression des voussoirs, des plus grandes ouvertures et des plus petites longueurs de coupe à la clef dont elles sont susceptibles; et où il démontre l'identité de l'équation générale de la *catenaire* et de celle de la courbe qui passe par les centres de gravité d'une suite de voussoirs en équilibre.

Section II, *de la Dynamique*.

L'auteur expose d'abord le principe général du mouvement de M d'Alembert; il en déduit la théorie du mouvement des centres de gravité, et les formules générales du mouvement de translation d'un corps, sollicité par des puissances quelconques, assujetti à se mouvoir dans une courbe, ou à se mouvoir autour d'un axe : il applique ensuite cette théorie générale au mouvement des projectiles, au pendule simple, à la courbe de la plus vite descente, à celle d'égale pression, au pendule composé, aux centres d'oscillation et de percussion, et autre centre spontanée de rotation.

M. de Prony donne ensuite, d'après don George Juan, une théorie de la percussion, dans laquelle il fait entrer les différentes circonstances physiques qui ont lieu dans le choc des corps, telles que la nature nous les présente, et qui assujettissent la communication du mouvement à la loi de continuité.

Cette section est terminée par une théorie générale du mouvement, considéré dans les machines, et où l'auteur emploie le principe des *vitesses virtuelles*. Il donne des notions exactes des effets que les machines peuvent produire; il fixe l'idée qu'on doit se faire de leur utilité, et les limites auxquelles leur perfection est assujettie.

tized by Google

Section III, *de l'Hydrostatique.*

L'auteur pose, pour propriété fondamentale des fluides, l'égalité de pression dans tous les sens; et, après avoir considéré l'équilibre et les pressions d'un fluide non pesant, il donne l'équation générale de l'équilibre des fluides dont les molécules sont soumises à l'action de puissances quelconques, avec tous les détails élémentaires propres à en faciliter l'intelligence aux commençants. Il applique cette théorie à différents objets qui ont rapport à la pratique du nivellement; il en déduit l'équation de l'équilibre des fluides incompressibles et pesants, la pression de ces fluides contre différentes surfaces planes et courbes, et les loix de la stabilité des corps qui y sont plongés; il traite ensuite de la stabilité des digues, tant en terre qu'en maçonnerie, qui soutiennent les eaux stagnantes; de la poussée des terres contre les murs de revêtement; et il donne la théorie de l'aréometre de M. de Parcieux. Passant aux fluides élastiques pesants, il donne les conditions générales de leur équilibre; il applique d'abord ces notions à la théorie du barometre, et présente l'état actuel de nos connoissances sur l'application de cet instrument au nivellement. Il donne ensuite la description et la théorie des pompes et des machines propres à élever l'eau; et comme cette matiere a plus de rapport avec l'objet principal de l'ouvrage, il la traite avec le plus grand détail.

Section IV, *de l'Hydrodynamique.*

M. de Prony commence par résoudre le problême général de l'écoulement d'un fluide par un orifice pratiqué dans la paroi d'un vase, en supposant le parallélisme des tranches et l'égalité de vitesse de leurs molécules: puis il en déduit, comme corollaire, toute la théorie ordinaire du mouvement des fluides; il expose ensuite les expériences faites par M. l'abbé Bossut sur les écoulements, et il donne des formules propres à exprimer ces écoulements avec une exactitude suffisante pour la pratique. Passant au choc et à la résistance des fluides, il expose la théorie de don George Juan, et les expériences sur lesquelles elle est appuyée; il donne ensuite la théorie ordinaire du choc des fluides, avec les expériences qui ont été faites pour corriger cette théorie et la rendre applicable à la pratique.

L'auteur termine cette section par l'exposition de la théorie générale et rigoureuse du mouvement des fluides, mise à la portée des commen-

Digitized by Google

çants, et par l'application des équations de cette théorie au mouvement des fluides dans les tuyaux étroits.

SECTION V, *des machines et des moteurs considérés avec les différentes circonstances physiques qui influent sur l'équilibre et sur le mouvement.*

L'auteur explique la maniere dont l'adhérence, le frottement et la roideur des cordes influent sur le mouvement et l'équilibre des machines; il donne la théorie de l'équilibre et du mouvement, en ayant égard à tous ces éléments, et il rapporte les expériences de M. Coulomb sur les différentes especes de frottement et sur la roideur des cordages.

M. de Prony traite ensuite des moteurs qu'on peut appliquer aux machines; il donne le précis du travail de M. Lambert sur la force de l'homme, et finit par traiter de l'action de l'eau réduite en vapeurs, d'après les expériences récentes faites par M. le chevalier de Betancourt. Ce dernier chapitre contient l'histoire et l'usage des machines à feu depuis le marquis de *Worcester* jusqu'aux dernieres découvertes faites par MM. *Wats* et *Bolton*, dont la machine à double injection vient d'être apportée en France et présentée à l'académie par M. de Betancourt.

Nous pensons que l'ouvrage de M. de Prony, qui est fait avec méthode et clarté, sera très utile aux personnes qui se destinent aux constructions de tous les genres, et qu'il mérite l'approbation de l'académie.

FAIT au Louvre le 23 décembre 1789.

Signé, VANDERMONDE et MONGE.

JE certifie le présent extrait conforme à l'original et au jugement de l'académie.

Signé, le marquis DE CONDORCET, secrétaire perpétuel.

Digitized by Google

NOUVELLE

ARCHITECTURE HYDRAULIQUE.

PREMIERE PARTIE.

PRINCIPES DE LA MÉCANIQUE.

Notions préliminaires.

Origine commune des connoissances humaines.

1. Tous les objets de nos connoissances sont pris dans la nature, c'est-à-dire dans les propriétés sensibles des corps dont elle est l'assemblage. Ces propriétés s'offrent à nous d'une maniere simultanée, car elles existent ainsi dans la nature; mais nous avons le pouvoir de les séparer intellectuellement, et d'en former différentes branches, dont chacune constitue un objet particulier de recherche. Ainsi le son, la couleur, l'étendue, etc., sont des qualités co-existantes dans les corps; et notre esprit, trop borné pour les saisir toutes ensemble, les divise, les considere isolément: de là la musique, la peinture, la géométrie, etc. C'est donc dans la foiblesse de notre raison que nous trouvons l'origine des sciences: la nature, qui en comprend indistinctement tous les matériaux, méconnoit les divisions auxquelles nous les avons assujetties. Si cette idée est peu flatteuse pour l'amour-propre, d'un autre côté elle a de quoi encourager, en nous faisant remonter à la source commune des connoissances humaines, voir les rapports distincts qui les lient et qui ne mettent aucune borne à la variété de celles dont notre esprit est susceptible. En effet, pourquoi les objets de nos sensations seroient-ils moins unis dans l'esprit qui les combine que dans le dépôt universel d'où ils sont tirés?

Comment les sciences mathématiques en sont dérivées.

2. Les mathématiques, prises dans l'acception la plus abstraite, considerent la quantité sous le sens le plus général, c'est-à-dire

Digitized by Google

comme purement susceptible d'augmentation ou de diminution. La géométrie particularise cette notion abstraite en y joignant l'idée d'étendue dont celle de figure est inséparable. Enfin la mécanique ajoute aux idées de quantité et d'étendue celles de mouvement et d'impénétrabilité. Nous n'entreprendrons point de définir le mouvement; cette notion est dans la classe de celles qu'on ne peut qu'obscurcir en voulant les expliquer. Quant à l'impénétrabilité, ce n'est, à proprement parler, que l'idée de corps ajoutée à celle d'espace; c'est une opération de l'esprit par laquelle nous *matérialisons* l'étendue.

Les notions de mouvement et d'impénétrabilité particulieres à la mécanique.

Tels sont les matériaux qu'on met en œuvre dans tout ce qu'on appelle *mathématiques pures;* et il paroît étonnant, au premier aspect, que des données aussi simples servent de fondement à des sciences aussi étendues et aussi compliquées.

Quoiqu'aucune des spéculations de la géométrie ne comporte nécessairement l'idée du mouvement, on s'en sert néanmoins quelquefois pour expliquer la génération des figures. Cette anticipation est de pure commodité, toutes les théories géométriques peuvent absolument s'en passer; d'ailleurs, quand on y considere le mouvement, on n'a aucun égard à sa mesure.

L'idée du mouvement n'est qu'accessoire en géométrie.

3. Le premier objet qu'on doit se proposer est donc de mesurer le mouvement : c'est une affaire de pure convention, et qui est indépendante tant de la nature du mouvement que de celle de la cause qui le produit; la commodité est la seule chose qu'on doit y considérer. Quels sont les phénomenes immédiats que nous présente un corps qui se meut? Le premier est l'espace parcouru en ligne droite ou en ligne courbe, le second est le temps employé à parcourir cet espace. Après ce premier apperçu, on peut pousser plus loin ses recherches, et considérer, outre le temps total et l'espace total, les différentes portions de temps employées à parcourir différentes portions d'espace. Qu'on suppose l'espace divisé en un nombre indéfini de parties égales: si le temps employé à parcourir chacune de ces parties est le même, nous dirons que le mouvement est *uniforme;* si, au contraire, le mobile n'a pas mis le même temps à parcourir chaque partie égale, nous dirons que le mouvement est *varié.*

La mesure du mouvement, indépendante de sa nature et de sa cause, est la premiere chose qu'on doit se proposer, vu que les phénomenes qui l'accompagnent nous en fournissent immédiatement les moyens.

Division générale du mouvement en *uniforme* et *varié.*

Cette facilité qu'on a de joindre la notion du temps et de l'espace à celle du mouvement suggere tout naturellement l'idée d'employer cette liaison à établir des comparaisons, et par conséquent des mesures. Supposons d'abord que le mouvement soit uniforme : si deux corps parcourent le même espace dans le même temps, nous en conclurons que l'un se meut avec autant

Mesure du mouvem. uniforme, d'où résulte la notion de la *vîtesse.*

de *vîtesse* que l'autre; s'ils le parcourent dans des temps différents, nous en conclurons que celui qui a resté le moins de temps a le plus de *vîtesse*, et cela en raison de la moindre durée de ce temps, c'est-à-dire que les vîtesses sont en raison inverse des temps employés à parcourir l'espace commun.

Qu'on nomme V la vîtesse du premier corps, v celle du second, T et t les temps employés à parcourir l'espace commun, on aura, d'après le raisonnement précédent, la proportion $V : v :: t : T$, d'où $\frac{V}{v} = \frac{t}{T}$.

En conservant toujours l'hypothese du mouvement uniforme, si les temps sont égaux, et les espaces parcourus inégaux, nous dirons que celui qui a parcouru le plus grand espace a le plus de vîtesse, ou que les vîtesses sont en raison directe des espaces parcourus dans le même temps. Si on nomme E et e les epaces parcourus, on aura la proportion $V : v :: E : e$; d'où $\frac{V}{v} = \frac{E}{e}$.

La premiere équation $\frac{V}{v} = \frac{t}{T}$ suppose que $E = e$; la seconde équation $\frac{V}{v} = \frac{E}{e}$ suppose que $t = T$. Il suit de là que pour avoir généralement la valeur de $\frac{V}{v}$, quels que soient les rapports $\frac{E}{e}$, $\frac{t}{T}$, il faut poser l'équation $\frac{V}{v} = \frac{E}{e} \cdot \frac{t}{T}$ qui renferme les deux autres; c'est-à-dire que, *lorsque le mouvement est uniforme, le rapport entre les vîtesses de deux mobiles est égal au rapport direct des espaces qu'ils parcourent, multiplié par le rapport inverse des temps qu'ils emploient à les parcourir.*

4. Si le corps qui a la vîtesse v parcourt l'unité d'espace dans l'unité de temps, alors la vîtesse v sera le terme de comparaison auquel on rapportera toutes les autres vîtesses, et l'on aura $v = 1$; $e = 1$; $t = 1$; l'équation $\frac{V}{v} = \frac{E}{e} \cdot \frac{t}{T}$ deviendra $\frac{V}{1} = \frac{E}{1} \cdot \frac{1}{T}$; ou, d'une maniere plus abrégée, $V = \frac{E}{T}$.

Comment on doit traduire l'expression $V = \frac{E}{T}$, dont l'énonciation ordinaire est absurde.

On traduit ordinairement cette derniere équation en disant que *la vîtesse est égale à l'espace divisé par le temps;* mais cette énonciation est absurde, car l'espace et le temps, étant deux quantités de nature absolument différente, ne peuvent se diviser l'un par l'autre. L'analyse qui a conduit à dire que $V = \frac{E}{T}$ nous montre quel sens nous devons y attribuer. En effet, cette équation étant déduite de $\frac{V}{1} = \frac{E}{1} \cdot \frac{1}{T}$, ou de $\frac{V}{v} = \frac{E}{e} \cdot \frac{t}{T}$, on doit l'énoncer en disant que *le rapport de la vîtesse d'un mobile qui parcourt l'espace* E *dans le temps* T, *à la vîtesse d'un autre mobile qui parcourt l'unité d'espace dans l'unité de temps, est égal au rapport direct des espaces multiplié par le rapport inverse des*

Digitized by Google

temps. On ne doit regarder la proposition, *la vîtesse est égale à l'espace divisé par le temps*, que comme une maniere abrégée d'énoncer la précédente, dans laquelle les quantités qui se divisent sont de même nature, et celles qui se multiplient sont des rapports qu'on doit toujours considérer comme des nombres abstraits. Nous désignerons ordinairement la vîtesse par l'espace parcouru dans l'unité de temps.

5. L'équation $V = \frac{E}{T}$ est l'équation fondamentale du mouvement uniforme. Nous verrons bientôt l'usage qu'on en fait dans la théorie du mouvement varié; mais il faut avant montrer une autre maniere de représenter les quantités qu'elle renferme.

Dans le mouvement uniforme, les espaces et les temps peuvent être représentés par les co-ordonnées d'une ligne droite.

Qu'on mene (*fig.* 1) la ligne AB prolongée indéfiniment, et par les points B et P les paralleles BC, PM; supposons qu'un mobile ait parcouru un espace égal à BC, et ait employé à le parcourir un nombre d'unités de temps égal au nombre d'unités de mesure contenues dans AB; la ligne AB pourra représenter le temps dans l'expression de la vîtesse V de ce mobile, et on aura $V = \frac{CB}{AB}$. Si le mobile eût parcouru un espace PM dans un temps représenté par AP, on auroit eu, par la même raison, $V = \frac{MP}{AP}$. Donc $\frac{CB}{AB} = \frac{MP}{AP}$. Donc la ligne qui passe par les points A, C et M, est une ligne droite formant avec AP un angle dont la tangente $= \frac{BC}{AB} \times$ rayon $=$ BC $\times$ rayon, en supposant AB $= 1$.

6. On voit par là que, *dans le cas du mouvement uniforme, si le temps écoulé est représenté par les abscisses* AP, *les espaces parcourus seront représentés par les ordonnées* PM *d'une ligne droite faisant, avec l'axe des abscisses, un angle dont on trouve la tangente en multipliant le rayon des tables par l'espace parcouru dans l'unité de temps.*

7. Si, à l'instant où l'on commence à compter le temps, il y avoit déja un espace parcouru $=$ AA', cette quantité seroit à ajouter à tous les espaces PM; alors il faudroit mener A' P' parallele à AP, et rapporter la ligne aux co-ordonnées A' P', P' M au lieu des co-ordonnées AP.

8. Le mobile parcourant BC pendant le temps AB, et PM pendant le temps AP, parcourra l'espace PM $-$ BC $=$ QM pendant le temps AP $-$ AB $=$ BP. *Donc l'espace représenté par la différence de deux ordonnées consécutives est parcouru dans un temps représenté par la différence des deux abscisses correspondantes.*

9. Il est évident que cette propriété a lieu, soit que AM soit une ligne droite ou une ligne courbe; car il suffit pour cela que AP, représentant le temps, PM représente l'espace parcouru

Digitized by Google

pendant ce temps. Pour y ajouter la condition qui caractérise particulièrement le mouvement uniforme, il faut ajouter que, lorsque les différences des ordonnées seront égales, celles des abscisses le seront aussi; car c'est la propriété de la ligne droite, et, toutes les fois qu'elle n'aura pas lieu, le mouvement ne sera pas uniforme.

Dans les mouvements *variés*, les espaces et les temps peuvent être représentés par les co-ordonnées d'une ligne courbe.

10. Les abscisses AB, AC, AD (*fig* 2 et 3), étant en progression arithmétique, c'est-à-dire les temps AB, BC, CD, étant égaux, si les différences BE, LF, GH, des ordonnées, ou espaces parcourus, sont inégales, alors les espaces parcourus ne sont plus proportionnels au temps, et le mouvement est *varié*. La vîtesse du mobile change donc à chaque instant, et suivant qu'elle est augmentée ou diminuée, le mouvement se nomme *mouvement accéléré*, ou *mouvement retardé*.

Forme générale de la courbe, suivant que le mouvement est *accéléré* ou *retardé*.

11. Dans le cas du mouvement accéléré (*fig.* 3), la courbe AEFH est toujours convexe vers son axe, car l'espace LF parcouru dans l'instant BC (8) doit être plus petit que l'espace GH parcouru dans l'instant CD, la vîtesse étant moindre à chaque point de BC qu'à chaque point correspondant de CD. Dans le mouvement retardé au contraire (*fig.* 2), la courbe AEFH est toujours concave vers l'axe, car l'espace LF parcouru dans l'instant BC doit être plus grand que l'espace GH parcouru dans l'instant CD, la vîtesse étant plus grande à chaque point BC qu'à chaque point correspondant de CD. Donc, dans le premier cas, les différences des ordonnées équidistantes vont en augmentant; dans le second cas, elles vont en diminuant. Or, on sait que ce sont les caracteres généraux qui désignent que les courbes présentent leurs convexités ou leurs concavités à l'axe des abscisses.

12. *Si, en un instant quelconque* C (fig. 3), *le mouvement devenoit uniforme, la courbe* AEF *dégénéreroit en une ligne droite* FX *tangente au point* F.

Ce que deviendroit la courbe si le mouvem. devenoit tout à-coup uniforme.

En effet, si FX n'étoit pas tangente, elle seroit une sécante QFO au-dessous de FX, ou une sécante F*sh* au-dessus. Dans le premier cas, l'espace GO parcouru dans le temps CD seroit plus petit que l'espace LF parcouru dans le temps CB; ce qui ne se peut, puisque la vîtesse au point F, avec laquelle GO est censé avoir été parcouru, est plus grande que la vîtesse, en un instant quelconque, du temps pendant lequel LF a été parcouru. Dans le second cas, en abaissant d'un point quelconque *s*, intermédiaire entre F et *h*, une ordonnée *sk*, l'espace *rs*, parcouru dans le temps *ck*, seroit plus grand que l'espace *rt* terminé à la courbe et parcouru dans le même temps; ce qui ne se peut encore.

Digitized by Google

On voit donc que la direction de FX ne pouvant être ni au-dessous ni au-dessus de la tangente, il faut nécessairement que cette ligne FX soit tangente elle-même. La marche de la démonstration est absolument la même pour le mouvement retardé, en faisant un raisonnement inverse.

Deux questions fondamentales sur la théorie des mouvem. variés.

13. Ces préliminaires posés, la théorie des mouvements variés présente deux questions fondamentales. La premiere, *quelle est la vîtesse du mobile en un instant quelconque du mouvement?* La seconde, *quelle est la loi de la variation du mouvement?*

Solution de la premiere question.

14. La premiere question se résout aisément au moyen de la propriété démontrée ci-devant (12); car si, avec la vîtesse acquise au point F, et continuée uniformément, le mobile parcourt l'espace GX dans le temps CD (*fig.* 2 et 3), il doit, avec la même vîtesse, parcourir l'espace CF dans le temps CT (4); donc sa vîtesse au point F est égale à $\frac{CF}{CT}$.

15. Ceci conduit à cette proposition générale : *Si on a une équation entre les temps et les espaces parcourus, et qu'on construise la courbe qu'elle représente en comptant les temps sur l'axe des abscisses, la vîtesse pour un instant quelconque sera égale à l'ordonnée correspondante à cet instant, divisée par la sous-tangente.*

Application aux mouvem. uniformément accélérés.

16. Nous pouvons commencer à faire une application de ce principe aux mouvements, dans lesquels la vîtesse acquise est proportionnelle au temps, ou qui, dans des temps égaux, reçoivent des accroissements égaux de vîtesse. On les désigne par le nom de mouvements *uniformément accélérés*, et d'après la définition que nous venons d'en donner, combinée avec la proposition de l'art. précédent, la vîtesse, ou le rapport de l'ordonnée à la sous-tangente de la courbe dont les co-ordonnées sont le temps, et l'espace, est proportionnelle au temps, c'est-à-dire à l'abcisse. Or la courbe qui jouit de cette propriété est une parabole (*fig.* 4); car, nommant AP, t, et PM, e; on a la sous-tangente $PT = \frac{1}{2}t$, et, pour l'équation de la courbe, $t^2 = Ae$, d'où on tire $\frac{PM}{PT} = \frac{t}{\frac{1}{2}A}$, quantité proportionnelle à t (*).

Faisant le temps $AB = a$, et l'espace CB parcouru pendant ce temps $= b$, on aura $CB\ (b) : \overline{AB}^2\ (a^2) :: MP\ (e) : \overline{AP}^2\ (t^2)$; d'où

(*) La solution directe de ce problême est de la plus grande facilité; car le rapport de l'ordonnée à la sous-tangente étant égal à $\frac{de}{dt}$, puisque ce rapport doit être proportionnel à l'abscisse, on a $\frac{de}{dt} = \gamma t$, γ étant une constante; d'où l'on tire, en intégrant, $e = \frac{1}{2}\gamma t^2 + c$, ou $e = \frac{1}{2}\gamma t^2$, parceque e et t étant en même temps égaux à 0, la constante $c = 0$. Si l'on fait $\frac{1}{2}\gamma = \frac{1}{A}$, on aura la proposée $t^2 = Ae$.

$t^2 = \frac{a^2}{b} e$; ainsi le parametre de la parabole est $\frac{a^2}{b}$, ou $\frac{1}{b}$, en faisant $a = 1$; ce qui donne $e = bt^2$.

17. Ainsi les propriétés des mouvements uniformément accélérés peuvent être représentées par celles d'une parabole qui auroit pour parametre une fraction dont le numérateur est l'unité, et le dénominateur l'espace parcouru dans l'unité de temps.

Leurs propriétés peuvent être representées par celles d'une parabole.

18. Il suit de là que, *dans les mouvements uniformément accélérés, les espaces parcourus sont comme les quarrés des temps employés à les parcourir,* puisque, dans la parabole (*fig.* 4), les ordonnées sont comme les quarrés des abscisses correspondantes.

19. Si le mobile, dans la même hypothese de mouvement, continuoit à se mouvoir uniformément avec la vîtesse acquise au point M, la courbe AM dégénéreroit en la tangente MR, et, au bout du temps PQ = PT, le mobile auroit parcouru l'espace RS = MP. Donc, au bout du temps, TQ = AP (puisque TP = AT par la propriété de la parabole), et avec la vîtesse acquise au point M, le mobile aura parcouru un espace QR = 2PM.

Il suit de là que si un mobile *a employé un certain temps à parcourir un espace avec un mouvement uniformément accéléré, et continue à se mouvoir, pendant un temps égal, d'un mouvement uniforme, avec la vîtesse finale acquise par l'accélération, il parcourra dans le second espace de temps un espace double de celui qu'il a parcouru dans le premier.*

20. Les propriétés qu'on vient de découvrir dans les mouvements uniformément accélérés fournissent deux moyens de les comparer entre eux. Le premier consiste dans la comparaison des différents espaces qu'ils peuvent faire parcourir à un mobile pendant un temps donné; et le second, dans celle de la vîtesse qu'ils peuvent lui communiquer au bout du même temps. L'un et l'autre de ces moyens de comparaison sont indifférents; mais il faut prendre garde de ne pas les confondre, c'est-à-dire de ne pas comparer l'espace parcouru pendant un certain temps, dans l'hypothese d'un mouvement uniformément accéléré, avec la vîtesse acquise au bout du même temps, dans l'hypothese d'un autre mouvement uniformément accéléré, car alors (19) on auroit un rapport double de celui qui existe réellement. Cette remarque est importante.

Observation importante sur la comparaison des mouvem. uniformément accélérés entre eux.

21. L'expérience a appris que les corps graves, mus près de la surface de la terre, tombent d'un mouvement uniformément accéléré, et qu'ils parcourent dans la premiere seconde de leur chûte un espace de 15,098 pieds de Paris. On a donc (17)

Application de la théorie précédente au mouvement des graves mus près la surface de la terre.

Digitized by Google

$t^2 = \frac{1}{15,098}\, e$, ou $t^2 = 0,0662338\, e$, pour l'équation entre les espaces parcourus et les temps, en prenant le pied et la seconde pour unités, chacun dans leur espece; ce qui donne $t = \frac{\sqrt{e}}{3,88561} = 0,257359\sqrt{e}$. Nous observerons, pour abréger les calculs qu'on pourroit faire d'après ces formules, que log. $0,0662338 = \bar{2},8210806$, et log. $0,257359 = \bar{1},4105403$, les signes $\bar{2}$, $\bar{1}$, désignant que les caractéristiques seules sont négatives; d'ailleurs on aura dans la suite de cet ouvrage des tables toutes calculées des valeurs de t et de e. On voit (18) que la vîtesse communiquée au mobile dans l'unité de temps est de 30,196 pieds.

Du mouvement uniformement accéléré lorsqu'il y a une vîtesse initiale.

22. Dans tout ce qu'on vient de dire sur les mouvements uniformément accélérés, on a supposé que la vîtesse initiale étoit égale à zéro; il est aisé de déterminer les circonstances du mouvement en supposant une vîtesse initiale quelconque. Soit a cette vîtesse, c'est-à-dire l'espace que le mobile peut parcourir uniformément dans une seconde ou dans l'unité de temps. L'espace parcouru en vertu de la vîtesse a, au bout du temps, sera $= at$, et celui parcouru en vertu de l'accélération sera $= bt^2$ (16); ajoutant ces deux quantités, on a $at + bt^2$ pour l'espace total parcouru, en vertu de la vîtesse initiale constante a, et de l'accélération; ce qui donne l'équation $e = at + bt^2$.

Si le mouvement étoit uniformément retardé au lieu d'être accéléré, la quantité bt^2 seroit soustractive au lieu d'être additive, et l'équation deviendroit $e = at - bt^2$; on peut, pour réunir les deux cas, la mettre sous la forme $e = at \pm bt^2$.

Pour construire cette équation, prenez (*fig.* 5 et 6) deux axes AZ, AP (la *figure* 5 sert pour le mouvement accéléré, et la *figure* 6 pour le mouvement retardé); portez sur l'axe des abscisses $AB = \frac{a}{2b}$, et au point B, parallèlement à l'axe des ordonnées, elevez $BQ = \frac{a^2}{4b}$; faites $AC = 2AB$; et, par les points AQC, faites passer une parabole qui ait pour axe la ligne QV; nommez AP, t; PM, e; la relation entre AP et M sera exprimée par l'équation $e = at \pm bt^2$.

En effet on a, par la propriété de la parabole,

$$QB, \left(\frac{a^2}{4b}\right) : QS, \left(\frac{a^2}{4b} \pm e\right) :: \overline{AB}^2 \left(\frac{a^2}{4b^2}\right) : \overline{SM}^2 \left(t^2 \pm \frac{at}{b} + \frac{a^2}{4b^2}\right);$$

d'où l'on tire $e = at \pm bt^2$, qui est la proposée.

Soit PK l'espace que le mobile parcourroit dans le temps AP en vertu de la vîtesse initiale a. Si on prolonge KA jusqu'en T, BT sera l'espace parcouru, dans le temps AB, en vertu de la même

même vîtesse a. Donc (4) $a = \frac{BT}{AB} = \frac{BT \times 2b}{a}$; d'où $BT = \frac{a^2}{2b} = 2BQ$; donc la ligne AT est tangente à la courbe.

Puisque PK est l'espace parcouru uniformément pendant le temps AP, en vertu de la vîtesse initiale a, KM sera l'espace parcouru pendant le même temps en vertu de l'accélération, d'où il suit que KM est proportionnel à $\overline{AP}^2$; ce qu'on peut regarder, indépendamment de la considération du mouvement, comme une propriété purement géométrique de la parabole; nous en verrons bientôt l'utilité en mécanique.

23. Il nous reste à discuter la deuxieme question fondamentale sur les mouvements variés, qui est de déterminer la loi de la variation du mouvement. Cette détermination est indispensable pour compléter la théorie des mouvements variés, parceque, quoique nous sachions qu'en général la vîtesse pour un instant quelconque est égale à l'espace parcouru divisé par la sous-tangente de la courbe entre les espaces et les temps, c'est-à-dire qu'en nommant s cette sous-tangente, et v la vîtesse, on a $v = \frac{e}{s}$; néanmoins la relation entre la variation de la vîtesse $\frac{e}{s}$, et celle du temps t, reste absolument indéterminée.

IIde question fondamentale sur la théorie des mouvem. variés.

Pour bien entendre ceci, qu'on suppose (*fig.* 2) qu'à chaque point C de l'axe des abscisses de la courbe AEH, entre les temps et les espaces parcourus, on éleve une ordonnée CU représentant la vîtesse acquise à l'instant C, c'est-à-dire l'espace que le mobile peut parcourir dans l'unité de temps en vertu de cette vîtesse; on aura par conséquent $CU = \frac{FC}{CT}$. On voit par-là que, quelles que soient les valeurs particulieres de FC et CT, pourvu que le rapport $\frac{FC}{CT}$ reste toujours le même, la valeur de UC ne changera pas. On peut donc concevoir une infinité de courbes semblables telles que af, qui présentent une suite de rapports $\frac{fC}{Ct}$ égaux, terme pour terme, à la suite de rapports $\frac{FC}{CT}$, avec cette seule différence que, dans ces dernieres, les instants a, b, C, seront plus rapprochés que les instants A, B, C, de la premiere; mais les espaces parcourus be, Cf, étant raccourcis dans la même proportion, la vîtesse CU, répondant à l'espace parcouru Cf, sera identiquement la même que celle qui répond à l'espace parcouru CF. Il suit de là que la valeur de la vîtesse UC ne doit pas plutôt être tirée du rapport $\frac{FC}{CT}$, dans la courbe AF, que du rapport $\frac{fC}{Ct}$ dans une infinité d'autres courbes semblables, et qu'ainsi cette valeur de la vîtesse UC est absolument indépendante du

Solution de cette question.

Digitized by Google

temps AC, aC, etc. employé à l'acquérir, les courbes AF, af, etc. étant rapportées à une échelle commune. Il est donc nécessaire d'avoir une seconde équation qui exprime cette derniere condition, et qui désigne quelle est celle des courbes AF, af, etc. qui appartient à la question particuliere qu'on traite.

Afin de parvenir à ce but, je remarque (*fig.* 2 et 7) que les variations des courbes AF, af, entre les espaces parcourus et les temps, affectent également les deux co-ordonnées; mais que, dans les courbes AU, aU, etc. des vîtesses, il n'y a que les abscisses AC, aC, etc. qui changent; car, comme on l'a vu, les vîtesses CU sont toujours identiquement les mêmes. De plus, le rapprochement de A en a ne se fait point par un simple raccourcissement de AC, mais par un resserrement proportionnel de toutes les parties AB, BC, de cette ligne; et c'est cette derniere condition qu'il s'agit d'exprimer. Pour cela, je remarque que le changement de l'abscisse AC en l'abscisse aC, causé, non par une soustraction de la partie Aa, mais par un rapprochement proportionnel des points A, B, C, etc. change la courbe AU en la courbe aU, et produit une variation analogue dans l'inclinaison de chaque élément de ces arcs de courbe AU, aU, etc. ou dans l'inclinaison de leurs tangentes UR, Ur, etc. et par conséquent dans la longueur des sous-tangentes CR, Cr, etc. Or UC ne changeant point de valeur, et CR, Cr, etc. étant différents dans chaque courbe AU, aU, etc. chacune d'elles présente donc un rapport $\frac{UC}{CR}$, $\frac{UC}{Cr}$, etc. qui lui est particulier, et qui peut servir à la faire distinguer de toutes les autres de la même espece, ainsi que la courbe AF, af, etc. dont elle dépend. Ce rapport fournit en même temps l'expression générale de l'inclinaison des éléments de la courbe des vîtesses AU, et par conséquent du rapprochement proportionnel de toutes les parties de l'abscisse AC qui représente le temps.

Supposons que la courbe particuliere entre les espaces parcourus et le temps qui convient à la question soit la courbe AF; nommons AC, t; CF, e; CT, s; CU, v; CR, s'; $\frac{CU}{CR}$, φ; nous aurons $v = \frac{e}{s}$ et $\frac{v}{s'} = \varphi$. La premiere de ces deux équations indique une propriété commune à la courbe AF et à toutes les autres courbes af semblables; mais la seconde particularise la question, et la restreint à la courbe AF, parceque, parmi toutes les courbes AF, af, etc. elle est la seule dans laquelle le rapport de l'ordonnée à la sous-tangente soit égal à φ.

On ne sauroit trop insister sur les motifs qui déterminent à

Digitized by Google

prendre le rapport $\frac{UC}{CR}$ pour particulariser la courbe AU et la courbe AF dont elle dépend; car on pourroit être tenté, au premier coup-d'œil, de penser que le rapport $\frac{UC}{CA}$ suffit pour cet objet. Mais qu'on ne perde pas de vue qu'il ne s'agit pas seulement d'exprimer la variation du temps AC, mais la maniere dont cette variation est produite. Le rapport $\frac{UC}{CA}$, changé en $\frac{UC}{Ca}$, n'exprime point si CA est devenu C*a* plutôt par le retranchement pur et simple de la partie A*a*, que par la contraction des parties AB, BC, etc. devenues *ab*, *b*C, etc. et c'est ce qu'exprime le rapport $\frac{UC}{CR}$ changé en $\frac{UC}{Cr}$.

Transformation des equations finies du mouvement variées en equations différentielles.

24. On sait, par le calcul différentiel, que le rapport de l'ordonnée à la sous-tangente d'une courbe est égal au rapport de la différentielle de l'ordonnée à la différentielle de l'abscisse. D'après cela, l'équation $v = \frac{e}{S}$ peut se changer en $v = \frac{de}{dt} \cdots$(A), et l'équation $\frac{v}{S'} = \varphi$ en $\frac{dv}{dt} = \varphi \cdots\cdot$(B).

Les deux équations $v = \frac{de}{dt}$, et $\varphi = \frac{dv}{dt}$, renferment toutes les propriétés du mouvement varié d'une maniere quelconque.

Si l'on différencie l'équation (A), faisant dt constant, et qu'on divise par dt, on aura $\frac{dv}{dt} = \frac{dde}{dt^2}$; cette valeur étant substituée dans l'équation (B) donne $\varphi = \frac{dde}{dt^2} \cdots\cdot$(C).

On peut maintenant égaler les deux valeurs de φ tirées des équations (B) et (C); ce qui donnera $dde = dvdt \cdots\cdot$(D). On peut aussi multiplier l'une par l'autre les équations (A) et (B), et l'on aura $vdv = \varphi de \cdots\cdot$(E).

Ce qu'on doit entendre par la quantité e dans ces equations.

25. L'équation $\varphi = \frac{dv}{dt}$, mise sous la forme $\varphi = \frac{1}{dt} dv$, exprime que φ n'est autre chose que la vîtesse élémentaire dv, répétée autant de fois qu'il y a d'instants dt dans l'unité de temps. Conséquemment φ est la vîtesse qu'acquerroit le mobile si son mouvement étoit uniformément accéléré pendant l'unité de temps, en recevant, à chaque instant dt, un accroissement dv de vîtesse, supposé constant pendant cette unité de temps, c'est-à-dire rapporté à un instant déterminé du mouvement.

On voit par-là que φ exprime une vîtesse différente pour chaque instant dt, mais qui est proportionnelle à l'accroissement dv pendant ce même instant, puisqu'elle n'est qu'une répétition constante de dv pendant l'unité de temps.

Le mouvement uniformement varié peut ser-

Nous avons vu (20) que le mouvement uniforme servoit à comparer entre eux les mouvements uniformément variés, et

Digitized by Google

vir à comparer entre eux les mouvem. variés en général.

nous devons appercevoir, dans ce qui vient d'être dit, une maniere analogue de faire servir les mouvements uniformément variés à comparer entre eux les mouvements variés d'une maniere quelconque.

φ est constant dans les mouvements uniformément varies. Sa valeur absolue dans le cas de la gravité.

26. D'après la notion que nous venons de donner de la quantité φ, on voit qu'elle doit être constante pour les mouvements uniformément variés, en supposant dt constant. Le calcul l'indique ; car, dans le mouvement uniformément accéléré, tous les accroissements de vîtesse dv étant égaux, le rapport $\frac{dv}{dt}$ sera toujours le même, et par conséquent $\varphi = \frac{dv}{dt}$ sera une équation entre des quantités constantes. Or φ étant, en général, la vîtesse que le mobile peut acquérir par la répétition uniforme, pendant l'unité de temps, de dv, rapporté à un instant déterminé, sera, pour le cas de la pesanteur, la vîtesse qu'elle procure au mobile dans l'unité de temps; ainsi on aura (21), $\varphi = 30,196$ pieds, la seconde de temps et le pied de roi étant pris pour unité chacun dans leur espece $v = 30,196\,t = 7,77125\sqrt{e}$. (*).

Quelle est la cause du mouvement ?

27. Tout ce que nous venons de dire est bien suffisant pour faire connoître la maniere dont on est convenu de mesurer le mouvement. On voit qu'à proprement parler ce n'est pas le mouvement qu'on évalue, mais les phénomenes ou circonstances qui l'accompagnent qui sont le temps écoulé et l'espace par-

(*) Nous nous sommes efforcés de donner à la théorie du mouvement varié, une des plus importantes de la mécanique, toute la clarté et le développement possibles, joints à la plus grande rigueur dans les démonstrations. Nous avons cru soulager l'esprit des commençants qui quittent l'étude de la géométrie pour entreprendre celle de la mécanique, en les faisant débuter dans cette science par des spéculations, pour ainsi dire, entièrement géométriques, et qui sont analogues aux habitudes de leur esprit : cette opinion a été confirmée par le jugement de plusieurs savants que nous avons consultés. On ne peut se dissimuler que, dans beaucoup de Traités de mécanique, la théorie des mouvements variés est présentée d'une maniere peu satisfaisante, et qui même offre une apparence de fausseté et de contradiction. M. d'Alembert a évité cet inconvénient ; mais il est obligé de recourir à des théorèmes sur la théorie infinitésimale des courbes, qui peuvent n'être pas familiers à tous les commençants. Nous avons l'avantage d'avoir démontré les propriétés fondamentales du mouvement varié sans employer la notion d'infini. Les expressions différentielles de l'art. 24, où on commence à s'en servir, ne sont qu'une traduction immédiate et évidente de ce qui précede. Voici la maniere dont M. d'Alembert démontre la formule $\varphi = \frac{du}{dt}$, qui est la seule à laquelle il soit parvenu par une méthode différente de la nôtre.

Soient (*fig.* 8) AP les temps, et PM les espaces parcourus ; nommons AP, t ; PM, e ; et imaginons les trois ordonnées PM, P′M′, P″M″, infiniment près l'une de l'autre ; faisons dt constant, ou $PP' = P'P''$, et $PM' = e'$.

Cela posé, il est évident que $KM' = de$ sera parcouru dans le temps $PP' = dt$, et que $QM'' = de'$ sera parcouru dans le temps $P'P'' = dt$; mais il y a deux hypotheses à faire sur l'accélération qui aura lieu dans les espaces de, de', qu'on doit distinguer avec grand soin. 1°. L'augmentation de vîtesse, qui aura lieu dans ces espaces, peut être graduellement acquise pendant l'instant dt, c'est-à-dire que le mouvement sera continuellement accéléré

Digitized by Google

couru pendant sa durée. La mesure du mouvement est donc indépendante de sa nature ou de la cause qui le produit; et quand on a bien connu cette mesure, l'attention doit se porter immédiatement sur cette question : *Quelle est la cause du mouvement ?* C'est la premiere question de mécanique qui soit prise dans la nature des choses, et indépendante de toute convention.

La solution de cette question est impossible et inutile : la connoissance et la mesure des effets est la seule chose qui nous intéresse.

Il ne faut pas de longues réflexions pour s'appercevoir que sa solution est au-dessus des forces de l'esprit humain, ou est hors de la classe des notions auxquelles il peut parvenir naturellement, à moins qu'on ne remonte immédiatement à l'action d'une premiere cause; ce qui est trancher la difficulté sans la résoudre. En effet, tous les mouvements que nous connoissons sont produits ou par l'*impulsion* qui suppose une action immédiate du corps qui fait mouvoir sur celui qui se meut, ou une communication de l'un à l'autre par le moyen d'autres corps, ou par l'*attraction* et la *répulsion*, qui ne nous laissent appercevoir aucune communication pareille entre les corps. Nous ne pouvons nous dissimuler que, dans tous ces cas, la cause qui produit le mouvement nous est parfaitement inconnue, et que la loi suivant laquelle s'operent les effets est la seule chose qui donne prise à nos recherches. Heureusement c'est là tout ce qui nous intéresse en mécanique, et, quelque curieuse que fût la

de P en P′, de P′ en P″. 2°. L'augmentation de vitesse qui aura lieu dans l'espace KM′ peut lui être donnée toute entiere en M, de maniere que KM′ sera parcouru d'un mouvement uniforme : pareillement, l'augmentation qui aura lieu dans QM″ peut être censée acquise tout-à-la-fois en M′, en sorte que QM″ soit parcouru d'un mouvement uniforme, etc. Dans cette seconde hypothese, le mouvement se fait comme par petits ressauts, qui ont lieu à la fin de chaque instant dt, le mouvement conservant son uniformité pendant cet instant.

L'effet produit à la fin de dt est le même dans la premiere et dans la seconde hypothese. Cet effet consiste à parcourir de, de', etc. Mais il n'en est pas de même de ce qui a lieu pendant la durée de cet instant; car, suivant l'une ou l'autre hypothese, la forme des éléments MM′, M′M″, etc. est différente. Dans la premiere, où l'accélération du mouvement est censée avoir toujours lieu pendant l'instant dt, l'élément de courbe correspondant est une courbe rigoureuse MgM′, M′nM″, etc. différent de sa corde MM′, M′M″, etc. (10). Dans la deuxieme, le mouvement étant censé uniforme pendant l'instant dt, les éléments MgM′, M′nM″, etc. deviennent rectilignes et ne different plus des cordes MM′, M′M″ (6). Voyons d'abord ce qui résulte du premier cas.

Menons au point M′ une tangente rigoureuse M′R, l'espace QR sera celui que le corps parcourroit pendant l'instant dt, si la vitesse acquise au point M′ se continuoit uniformément; l'espace RM″ sera celui parcouru en vertu de l'accélération qui a lieu de P′ en P″, et l'espace nr sera parcouru, en conséquence, pendant le temps P′d; examinons la relation qui existe entre nr et M″R relativement aux temps P′d, dP″.

L'arc M′M″, étant infiniment petit, peut être censé appartenir à une courbe quelconque, et par conséquent à une parabole : or, par la propriété de cette courbe (22), M′R étant tangente, on a la proportion nr : M″R :: $\overline{\text{P}'d}^2$: $\overline{\text{P}'\text{P}''}^2$. Donc les espaces nr, M″R, sont comme les quarrés des temps P′d, P′P″, employés à les parcourir; donc, pendant l'instant

Digitized by Google

découverte de la cause du mouvement, nous pouvons y renoncer sans regrets.

Un corps en repos ou en mouvem. peut-il par lui-même, et indépendamment de toute cause étrangere, changer son état?

28. Puisque nous sommes réduits à ne nous occuper que des effets du mouvement, et que nos besoins n'en exigent pas davantage, nos observations doivent se porter sur tout ce qui peut modifier ces effets. Nous appercevons d'abord que les mouvements des corps qui nous environnent sont accélérés ou retardés par différentes causes, telles que la pesanteur, la résistance de l'air, le frottement, etc. c'est à l'expérience, aidée du calcul, à nous apprendre la loi des variations qu'elles peuvent produire; mais, pour pouvoir compter avec certitude sur les résultats fournis par ces deux sources de lumiere, il faut d'abord savoir si le corps, en repos ou en mouvement, peut par lui-même, et indépendamment de toute autre cause étrangere, changer son état. Cette connoissance n'est point indifférente comme celle de l'article précédent, elle est au contraire d'une nécessité indispensable : car, si nous ne l'avions pas, nous ignorerions si les variations de mouvement, que nous attribuons à des causes étrangeres, ne sont point produites par la propre énergie du mobile; ce qui mettroit une confusion absolue dans nos recherches.

Pour éclaircir cette matiere, nous allons établir les deux loix suivantes.

Ire loi. Lorsque le corps est en repos.

29. *Premiere loi.* Un corps en repos y persistera, à moins qu'une cause étrangere ne l'en tire; car un corps ne peut se déterminer de lui-même au mouvement, puisqu'il n'y a pas de raison pour qu'il se meuve d'un côté plus que d'un autre.

$P'P'' = dt$, le mouvement est uniformément accéléré. On a donc (16) $M''R = \tau dt^2$, τ étant une quantité constante pendant l'instant $P'P''$, mais qui est différente dans les instants suivants.

Si on prolonge la corde MM' jusqu'en X, on aura $QX = KM' = de$, et $XM'' = QM'' - QX = de - de' = dde$; mais, par une propriété générale des courbes, dont on peut voir dans l'ouvrage ci-dessus cité la démonstration que nous supprimons, pour abréger, $XM'' = 2M''R$; donc $M''R = \frac{dde}{2}$; et, substituant dans l'équation $M''R = \tau dt^2$, on a $\tau = \frac{dde}{2dt^2}$. Cette expression désigne (16) que l'espace τ qui seroit parcouru dans l'unité de temps, en vertu de l'accélération uniforme qui a lieu pendant l'instant dt, est égal à $\frac{dde}{2dt^2}$. Ainsi voilà, dans la premiere hypothese, le moyen de mesurer l'accélération à chaque instant.

Dans la seconde hypothese, le mouvement étant uniforme pendant l'instant PP', et l'élément de courbe MgM' se confondant avec le petit côté MM' du polygone inscrit, si le mobile continue à se mouvoir avec la vitesse acquise en M', l'espace qu'il parcourra pendant l'instant suivant $P'P''$ sera QX, puisque, dans ce cas-ci, la tangente doit être le prolongement du petit côté MM'. Il suit de là que l'espace parcouru pendant l'instant $P'P''$, en vertu de l'accélération qui a lieu au point M', est XM'', qui, comme nous l'avons vu, $= 2M''R = dde = 2\tau dt^2$. Si l'on fait $2\tau = \varphi$, on aura, pour la mesure de l'accélération, l'équation $\varphi = \frac{dde}{dt^2}$, φ exprimant le double de l'espace qui seroit parcouru dans l'unité de temps en vertu de l'accé-

Digitized by Google

30. De là il s'ensuit que, si un corps reçoit du mouvement par quelque cause que ce puisse être, il ne pourra de lui-même accélérer ni retarder ce mouvement.

31. *Seconde loi.* Un corps, mis une fois en mouvement par une cause quelconque, doit y persister toujours uniformément et en ligne droite, tant qu'une nouvelle cause, différente de celle qui l'a mis en mouvement, n'agira pas sur lui; c'est-à-dire qu'à moins qu'une cause étrangere, et différente de la cause motrice, n'agisse sur ce corps, il se mouvra perpétuellement en ligne droite, et parcourra en temps égaux des espaces égaux. IIme loi. Lorsque le corps est en mouvement.

Car, ou l'action indivisible et instantanée de la cause motrice, au commencement du mouvement, suffit pour faire parcourir au corps un certain espace, ou le corps a besoin, pour se mouvoir, de l'action continuée de la cause motrice.

Dans le premier cas, il est visible que l'espace parcouru ne peut être qu'une ligne droite décrite uniformément par le corps mu : car (*hyp.*), passé le premier instant, l'action de la cause motrice n'existe plus, et le mouvement, néanmoins, existe encore : il sera donc nécessairement uniforme, puisque (30) un corps ne peut accélérer ni retarder son mouvement de lui-même. De plus, il n'y a pas de raison pour que ce corps s'écarte à droite plutôt qu'à gauche. Donc, dans ce premier, où l'on suppose qu'il soit capable de se mouvoir de lui-même pendant un certain temps, indépendamment de la cause motrice, il se mouvra de lui-même, pendant ce temps, uniformément et en ligne droite. Démonstration de cette loi.

lération de la premiere hypothese. Mais le double de cet espace est précisément la vitesse acquise par une pareille accélération (19); donc $\bullet$ exprime la vitesse que le mobile acquerroit dans l'unité de temps si le mouvement continuoit à s'accélérer uniformément de la quantité dont il s'augmente pendant l'instant $P'P''$ dans l'hypothese de la courbe rigoureuse; c'est précisément la même quantité $\bullet$ des équations (B) et (C) de l'art. 24, et les formules obtenues par les deux méthodes sont identiques.

On voit donc qu'en supposant la courbe rigoureuse, l'accélération se mesure par $\frac{ddc}{2\,dt^2}$, et, qu'en la supposant polygone, elle se mesure par $\frac{ddc}{dt^2}$; l'une ou l'autre de ces mesures sont indifférentes, pourvu qu'on rapporte toujours à la même les différents effets qu'on veut comparer. L'espace parcouru par le mobile est le même dans l'une ou l'autre hypothese, c'est-à-dire QM'', pendant l'instant $P'P''$; seulement dans la premiere, QR est parcouru en vertu du mouvement précédemment acquis, et RM'' en vertu de l'accélération; et dans la deuxieme, ce sont QX et XM''.

Il est d'ailleurs aisé de se rendre directement raison pourquoi l'espace élémentaire parcouru dans l'hypothese de la courbe polygone est double de celui parcouru dans l'hypothese de la courbe rigoureuse; c'est que, dans le premier cas, le mobile acquiert tout-à-la-fois l'incrément de vitesse, qu'il n'obtient, dans le second cas, que par une accélération uniforme; il doit donc parcourir, pendant le même temps dt, un espace double.

Ainsi la différence entre la considération de la courbe polygone et la courbe rigoureuse se réduit à notre observation (20) sur les mouvements uniformément accélérés.

Digitized by Google

Or un corps qui peut se mouvoir de lui-même uniformément et en ligne droite pendant un certain temps, doit continuer perpétuellement à se mouvoir de la même maniere, si rien ne l'en empêche. Car supposons le corps partant de A (*fig.* 9), et capable de parcourir de lui-même uniformément la ligne AB; soient pris sur la ligne AB deux points quelconques C, D, entre A et B. Le corps, étant en D, est précisément dans le même état que lorsqu'il est en C, si ce n'est qu'il se trouve dans un autre lieu. Donc il doit arriver à ce corps la même chose que quand il est en C. Or, étant en C, il peut (*hyp.*) se mouvoir de lui-même uniformément jusqu'en B. Donc, étant en D, il pourra se mouvoir de lui-même uniformément jusqu'au point G, tel que DG = CB, et ainsi de suite.

Donc, si l'action premiere et instantanée de la cause motrice est capable de mouvoir le corps, il sera mu uniformément et en ligne droite tant qu'une nouvelle cause ne l'en empêchera pas.

Dans le second cas, puisqu'on suppose qu'aucune cause étrangere et différente de la cause motrice n'agit sur le corps, rien ne détermine donc la cause motrice à augmenter ni à diminuer; d'où il s'ensuit que son action continuée sera uniforme et constante, et qu'ainsi, pendant le temps qu'elle agira, le corps se mouvra en ligne droite et uniformément. Or, la même raison qui a fait agir la cause motrice constamment et uniformément pendant un certain temps, subsistant toujours, tant que rien ne s'oppose à son action, il est clair que cette action doit demeurer continuellement la même, et produire constamment le même effet. Donc, etc.

Donc, en général, un corps mis en mouvement, par quelque cause que ce soit, y persistera toujours uniformément et en ligne droite tant qu'aucune cause nouvelle n'agira pas sur lui (*).

32. La propriété qu'ont les corps de persévérer dans l'état de

(*) La démonstration de ces deux loix du mouvement est tirée de la *Dynamique* de M. d'Alembert; et c'est la plus satisfaisante que je connoisse : elle est dans la classe des preuves qu'on nomme *négatives*, où l'on affirme qu'une chose est de telle maniere parcequ'il n'y a pas de raison pour qu'elle soit autrement. Peut-être objectera-t-on que, dans ce cas-ci, l'application de ce genre de preuve n'est fondée que sur notre ignorance de la nature des corps, c'est-à-dire qu'on ne peut pas dire, Il n'y a pas de raison pour que la chose ne soit pas ainsi; mais plutôt, Nous ne connoissons pas de raison pour qu'elle soit autrement. Sous ce point de vue, la démonstration *à priori* des deux loix qu'on vient d'établir n'entraîneroit pas après elle la conviction qu'on doit attendre d'une démonstration mathématique. Ceux qui ne seront pas satisfaits de cette démonstration doivent considérer que ces loix n'en sont pas moins certaines, puisqu'elles sont d'accord avec tous les phénomenes connus du mouvement: mais alors c'est les réduire à des vérités d'expérience.

repos

Digitized by Google

repos ou de mouvement où ils sont, jusqu'à ce qu'une cause étrangere les en tire, s'appelle *inertie*. Mais quelle est cette cause qui tire les corps de leur état de repos ou de mouvement? On la désigne génériquement par le mot *force;* et puisque nous en sommes à employer ce mot en mécanique, il est bon de se faire une idée précise de sa signification.

33. Nous avons vu (3) que les idées partielles, dont notre idée collective du mouvement est composée, sont la *direction*, l'*espace parcouru*, et le *temps*. En mesurant ensuite le mouvement relativement à l'espace parcouru et au temps, nous avons nommé *vîtesse* la relation de ces deux éléments; ainsi nous pouvons considérer notre notion du mouvement comme composée de la *direction* et de la *vîtesse*, en observant bien, d'après ce qui est dit (27), que nous n'avons pas par-là une connoissance de la nature du mouvement, mais seulement des phénomenes sensibles qui l'accompagnent.

Cela posé, on entend par *force* toute cause quelconque qui peut donner du mouvement à un corps en repos, ou modifier le mouvement d'un corps qui se meut, en changeant ou sa direction, ou sa vîtesse, ou l'une et l'autre de ces deux choses.

La *force*, dans l'acception la plus étendue, est donc tout ce qui peut surmonter l'*inertie* des corps. Cette derniere propriété semblant opposer une résistance à la *force*, on l'a considérée comme d'une nature analogue, et on l'a appellée *force d'inertie*. Mais c'est embrouiller les idées sans éclairer l'esprit; le mot *force*, joint à celui d'*inertie*, n'ajoute rien à sa signification, et ne fait qu'introduire l'équivoque, qu'on doit si soigneusement éviter dans les sciences mathématiques.

D'après ce que nous avons dit (27) sur l'ignorance absolue où nous sommes de la nature du mouvement et de celle de sa cause, qui n'est autre chose que la *force*, on voit qu'il est impossible de rien établir *à priori* sur cette cause. Nous nous bornerons donc à en mesurer les effets; ce qui est, dans le vrai, la seule chose dont nous ayons besoin.

34. Parmi ces effets, celui qui nous est le plus familier est l'*impulsion*, ou l'action que les corps exercent les uns sur les autres par le choc; nous allons d'abord nous en occuper, et nous verrons bientôt que tous les autres peuvent s'y rapporter, au moins quant à la maniere de les calculer.

Nous supposerons que les corps qui se choquent sont incompressibles ou parfaitement durs, que leur figure est sphérique, et que la direction de leur mouvement est dans la même ligne

Digitized by Google

droite, passant par le centre de chacune des spheres. Cette premiere simplification est nécessaire avant de passer à des cas plus composés.

Le témoignage de nos sens nous instruit chaque jour que l'impulsion ou le choc d'un corps contre un autre est plus grand lorsque sa vîtesse est plus grande. Après cette connoissance immédiate, nous en acquerrons une autre qui demande quelques réflexions, mais qui n'en est pas moins censée notion primitive; c'est que, lorsque plusieurs corps ont une même vîtesse, celui qui a la plus grande masse, ou la plus grande quantité de parties matérielles, exerce le choc le plus considérable.

La *masse* et la *vîtesse* sont donc les deux éléments qui déterminent les phénomenes du choc, et il s'agit d'examiner comment ils y influent chacun.

35. D'abord si une masse, animée d'une vîtesse quelconque, va choquer un obstacle immobile, il est évident que tout son mouvement s'éteindra; et comme elle ne peut pas en attendre de nouveau, ni de l'obstacle, ni d'elle-même (29), elle restera attachée et immobile au point de contact.

36. Si deux masses égales, animées de vîtesses égales, viennent se choquer en sens contraire et directement opposé, elles resteront immobiles et appliquées l'une contre l'autre à l'endroit où elles se seront rencontrées; car elles ne pourroient se mouvoir qu'autant que l'une l'emporteroit sur l'autre, et, d'après la parfaite égalité supposée entre les masses et les vîtesses, il n'y a pas de raison pour que cette prépondérance ait lieu.

37. Si les masses sont inégales ainsi que les vîtesses, mais que les masses soient en raison inverse des vîtesses dont elles sont animées, les deux corps resteront encore, après le choc, immobiles et appliqués l'un contre l'autre.

Pour le démontrer, soient M et V la masse et la vîtesse du premier corps, m et v la masse et la vîtesse du second; on a, par hypothese, $\frac{M}{m} = \frac{v}{V}$. Supposons que M soit double de m, v sera double de V. On pourra alors supposer que la masse M est composée de deux masses égales chacune à m, et animées chacune de la vîtesse V; d'un autre côté l'on pourra regarder la vîtesse de m comme composée de deux vîtesses égales chacune à V; donc, à la place de chacune des masses proposées, on peut supposer de chaque côté deux masses égales animées de vîtesses égales. Or cette hypothese retombe dans le cas précédent (36). Donc, etc.

Ce que nous venons de prouver dans le cas de la raison inverse double, peut se prouver d'une maniere absolument semblable dans le cas d'un rapport inverse quelconque, c'est-à dire lorsque $\frac{M}{m}$, ou $\frac{v}{V}$, seront égaux à un nombre quelconque n; donc la proposition est généralement vraie dans tous les cas où les masses seront en raison inverse des vîtesses (*).

38. Les phénomenes du choc que nous venons d'examiner sont ceux où il y a *équilibre ;* et ce mot est consacré, en mécanique, pour exprimer l'état de deux ou plusieurs corps agissant les uns sur les autres, animés de forces quelconques, mais dont les quantités et les directions sont tellement combinées, qu'ils demeurent tous en repos par leur action réciproque. Nous appellerons *quantité de mouvement d'un corps* le produit de sa masse par sa vîtesse.

Ce qu'on doit entendre par les mots *équilibre* et *quantité de mouvement.*

Examinons maintenant ce qui a lieu lorsque deux corps viennent se choquer et qu'il n'en résulte pas l'*équilibre,* c'est-à-dire lorsque leurs masses ne sont pas en raison inverse de leurs vîtesses. On conserve toujours les mêmes hypotheses de l'art.(34).

Circonstances du choc lorsqu'il n'y a pas équilibre.

39. Supposons d'abord que l'un des corps dont la masse est m

1°. Lorsqu'un des corps est en repos.

(*) Le cas où les M et m seroient incommensurables pouvant souffrir quelques difficultés, M. d'Alembert en a donné une démonstration particuliere dans sa *Dynamique.* La voici, avec l'observation préliminaire qui y conduit.

Dans le cas où M et m sont commensurables, si $MV >$ ou $< mu$, il ne peut y avoir d'équilibre. Car supposons pour un moment que les corps M et m se fassent équilibre en cet état ; soient imaginés ces deux corps M, m, sur un plan, et soit supposé que ce plan soit mu en emportant les deux corps avec une vitesse x qui soit dans le sens de V, ou dans un sens contraire, et qui soit telle que $MV \pm Mx = mu \mp mx$; il est visible que les corps M, m, ainsi emportés, se choqueront dans l'espace absolu avec des vîtesses $V \pm x$, $u \mp x$, qui seront en raison inverse de leurs masses, et que par conséquent, suivant ce qui a été démontré ci-dessus, ils doivent rester en repos dans cet espace absolu. Cependant ils n'y resteroient pas si, comme on le suppose, ils se faisoient équilibre avec les seules vîtesses V et u ; car ces vîtesses V et u étant détruites, par l'hypothese, à la rencontre des deux corps, il leur resteroit la vitesse commune x avec laquelle rien ne les empêcheroit de se mouvoir.

Supposons à présent que les masses M, m, sont incommensurables, de maniere que $m = \mu p$, et $M = \mu P + z$; P et p étant deux nombres entiers, et $z < \mu$, je dis que si $m \times u = MV$, les deux corps resteront en repos après le choc.

Car supposons qu'ils conservassent du mouvement, et qu'il fallût, pour l'empêcher, ajouter ou retrancher de la masse M une quantité t ; la masse $\mu P + z \pm t$, animée de la vîtesse V, seroit donc en équilibre avec la masse m ou μp, animée de la vîtesse u. Or la quantité t doit être nécessairement plus petite que μ; car si elle étoit plus grande, on auroit $\mu P + z + t > \mu P + \mu$. De plus, cette derniere masse $\mu P + \mu$, animée de la vîtesse $\frac{mu}{\mu P + \mu}$, fera équilibre à la masse m, animée de la vîtesse u. Or puisque $z < \mu$, on a $\frac{mu}{\mu P + \mu} < \frac{mu}{\mu P + z}$, c'est-à-dire $< V$. Donc, d'après l'observation préliminaire du commencement de cette note, la quantité $\mu P + z + t$, qu'on suppose plus grande que $\mu P + \mu$, étant animée de la vîtesse V plus grande que $\frac{mu}{\mu P + \mu}$, ne sauroit être en équilibre avec la masse m animée de la vîtesse u. Donc t doit nécessairement être $< \mu$; et comme μ peut être aussi petit qu'on voudra, il s'ensuit que $t = 0$.

Digitized by Google

soit en repos, et que l'autre corps, dont la masse est M, vienne le choquer avec une vîtesse V. J'observe, 1°. qu'après le choc la somme des quantités de mouvement des deux corps sera égale à la quantité de mouvement MV qu'avoit le corps M avant le choc : car cette somme des quantités de mouvement ne peut être ni plus grande ni plus petite. Elle ne peut être plus grande, puisque le corps choquant ne peut que communiquer à l'autre une partie de sa vîtesse ; et, vu l'inertie des corps, il ne peut se produire dans cette communication aucune augmentation ou création nouvelle de force. Elle ne peut être plus petite, car il faudroit pour cela qu'il y en eût une partie de détruite ; or, cela ne pourroit se faire qu'autant que le corps choqué auroit, en sens contraire, une vîtesse qui s'opposeroit à l'action du corps choquant ; ce qui est contraire à l'hypothese. 2°. Après le choc, les corps seront juxtaposés et se mouvront avec une vîtesse commune : car le corps choquant doit agir sur le corps choqué jusqu'à ce qu'il ne le presse plus ; ce qui aura lieu quand les deux vîtesses seront égales.

Cela posé, soit v la vîtesse commune qui aura lieu après le choc ; $v(M + m)$ sera la somme des quantités de mouvement, qui doit être égale à la quantité de mouvement MV, d'après ce qu'on vient de dire ; on aura donc $v(M + m) = MV$; d'où on tire $v = \frac{MV}{M+m}$, et ce qui fournit cette regle générale.

Vîtesse commune, après le choc, lorsque le corps choqué est en repos.

Lorsqu'un corps en mouvement vient choquer un autre corps en repos, la vîtesse commune, après le choc, est égale à la quantité de mouvement qu'avoit le premier corps avant le choc, divisée par la somme des masses.

2°. Lorsque les deux corps sont en mouvement et allant en sens contraire.

Si les corps sont tous deux en mouvement, et viennent en sens contraire, la quantité de mouvement de celui qui en a le plus peut être considérée comme composée de deux parties, dont l'une est égale et fait équilibre à la quantité de mouvement de l'autre corps, et dont l'autre partie produit la vîtesse commune, après le choc, de la même maniere que si le deuxieme corps étoit en repos. Ainsi la somme des quantités de mouvement, après le choc, sera égale à la différence des quantités de mouvement avant le choc. On aura donc, en nommant u la vîtesse du corps m avant le choc, et en supposant $VM > um$, $v(M+m) = VM - um$; d'où l'on tire $v = \frac{VM-um}{M+m}$, et la regle générale,

Vîtesse commune, après le choc, lorsque les deux corps vont en sens contraire.

Lorsque deux corps en mouvement, allant en sens contraire, viennent à se choquer, la vîtesse commune, après le choc, est égale à la différence des quantités de mouvement, divisée par la somme des masses.

Digitized by Google

3°. Lorsque les deux corps sont en mouvement et vont dans le même sens.

Enfin si les deux corps vont dans le même sens, c'est-à-dire si le corps m a une direction contraire à celle qui lui a été supposée dans le cas précédent, il ne s'agira que de changer le signe de sa vîtesse dans la formule qu'on vient de donner, et on aura pour la vîtesse commune, après le choc, $v = \frac{VM + um}{M + m}$, c'est-à-dire que *lorsque deux corps en mouvement, allant dans le même sens, viennent à se choquer, la vîtesse commune, après le choc, est égale à la somme des quantités de mouvement, divisée par la somme des masses.*

Vîtesse commune, après le choc, lorsque les deux corps vont dans le même sens.

Démonstration immédiate du troisième cas.

On peut démontrer immédiatement ce cas d'une maniere analogue à celle dont nous avons démontré le cas précédent. Pour cela, supposons $V > u$, et le corps M à la suite du corps m, la vîtesse V peut être censée composée de deux autres, u et u'. En vertu de la vîtesse u, les corps sont comme s'ils étoient respectivement en repos, et ce n'est qu'en vertu de l'excédent u' que le choc s'exerce pour produire dans le corps m une augmentation v' de vîtesse pour laquelle, par la démonstration du premier cas, nous avons l'équation $v' = \frac{Mu'}{M + m}$, ou, comme on a $V = u' + u'$, et $u' = V - u$, $v' = \frac{M(V - u)}{M + m}$. Cette vîtesse v', ajoutée à la vîtesse u qu'avoit le corps m avant le choc, donnera pour sa vîtesse, après le choc, ou pour la vîtesse commune, $v = \frac{M(V - u)}{M + m} + u = \frac{MV + mu}{M + m}$.

Pour réunir les différents cas que nous venons d'analyser, on mettra la valeur de v sous cette forme, $v = \frac{VM \pm um}{M + m}$.

La théorie du choc des corps peut servir à donner un sens raisonnable à cette expression, *l'inertie est proportionnelle à la masse.*

L'équation $v = \frac{VM}{M + m}$, qui a lieu quand un des corps est en repos, peut servir à donner un sens raisonnable à l'expression de certains auteurs, qui disent que l'inertie des corps est *une force proportionnelle à la masse.* On voit par cette expression que, quelle que soit la petitesse du choquant à l'égard du corps choqué, néanmoins il lui imprimera toujours une vîtesse, insensible à la vérité, mais réelle. Cette vîtesse sera d'autant plus petite que la masse du corps choqué sera plus grande; et c'est là tout ce qu'on peut dire sur le prétendu effet résistant de l'inertie, qui n'est point une vraie résistance, mais seulement la dissémination d'un effort dans une plus grande masse.

Ce qui a lieu lorsque, dans la théorie du choc des corps, on considere des vîtesses infiniment petites.

40. Nous avons supposé, dans l'art. précédent, que les vîtesses des corps étoient des quantités finies: le raisonnement seroit le même si ces vîtesses étoient infiniment petites, c'est-à-dire de

Digitized by Google

la nature de celles dont il a été question dans la mesure du mouvement varié, qui, par un accroissement continu et instantané, deviennent, au bout d'un temps fini, des vîtesses finies. Ainsi lorsque deux corps, après s'être choqués avec les vîtesses V et u, et avoir acquis la vîtesse commune v, recevront des augmentations de vîtesse dV, du, l'augmentation de la vîtesse commune sera $= dv = \frac{M\,dV \pm m\,du}{M+m}$. Faisant, d'après les loix du mouvement varié (24), $dV = \Phi\,dt$, et $du = \varphi\,dt$, on aura, pour l'augmentation élémentaire de vîtesse, $dv = \frac{(M\Phi \pm m\varphi)\,dt}{M+m}$. D'après cela, lorsque deux corps durs se seront choqués avec les vîtesses V et u, à partir de cet instant, leur vîtesse, à l'un quelconque des instants suivants, sera généralement égale à $v + \frac{\int (M\Phi \pm m\varphi)\,dt}{M+m}$.

Détermination du sens qu'on doit attribuer, dans le cours de ce Traité, aux mots *force, puissance, force motrice*, et *force accélératrice*.

Lorsque la cause qui surmonte l'*inertie* des corps, et que nous avons nommée *force*, ne tendra qu'à produire une vîtesse ou une variation de vîtesse infiniment petite, nous la nommerons *puissance*. Nous nommerons encore les quantités $M\,dV$, $m\,du$, ou leurs équivalentes $\Phi\,dt$, $\varphi\,dt$, *forces motrices;* et les quantités Φ, φ, *forces accélératrices*. Nous donnons ces dénominations pour nous rapprocher du langage ordinaire de la mécanique. Il faut les regarder seulement comme des signes, ne point analyser le sens vulgaire des mots qui les composent, et considérer toujours les quantités qu'elles représentent d'après les notions que nous en avons données précédemment.

Comparaison des effets d'une *force* et de ceux d'une *puissance* dans le premier instant de son action.

Il y a une observation sur l'action d'une puissance comparée à celle d'une force; c'est que, quelque grande que soit la masse d'un corps animé d'une puissance quelconque, et quelque petite que soit la vîtesse et la masse d'un corps animé d'une force, celui-ci doit toujours l'emporter pendant quelques instants sur l'autre lorsqu'il commencera à agir contre lui avant que ce dernier ait acquis une vîtesse finie. En effet la quantité de mouvement d'un corps animé d'une puissance, étant le produit d'une masse finie par une vîtesse infiniment petite, doit toujours être surmontée par une quantité de mouvement finie quelconque.

Ce qu'on doit entendre par le mot *pression*.

Lorsqu'il s'agira de l'action d'un corps animé d'une puissance, et qui n'aura encore acquis aucune vîtesse finie, nous substituerons le mot *pression* à celui de choc employé dans le cas de l'action d'un corps animé d'une force. Ainsi, avec l'attention que nous avons de n'y pas mettre un mot en avant sans en avoir analysé la signification, il ne pourra jamais y avoir d'équivoque ni d'obscurité dans le cours de ce Traité.

Digitized by Google

Si, dans le premier instant, le plus petit choc peut surmonter la plus grande pression, d'un autre côté un corps animé de la moindre puissance peut, avec le temps, surmonter la plus grande force ; car la puissance exerçant toujours son action, diminue peu à peu la quantité de mouvement du corps qu'anime la force, et finit par la détruire entièrement.

Effets d'une force opposée à une puissance dont l'action se continue.

Ainsi, si on lance de bas en haut un corps soumis à l'action de la pesanteur, avec la plus grande vîtesse, comme seroit celle d'un boulet ou d'une balle de fusil chassée par l'explosion de la poudre, il commencera par monter avec rapidité : mais la gravité qui tend à le faire descendre, agissant continuellement sur lui, amortira peu à peu son mouvement (indépendamment de la résistance de l'air); il viendra un instant où il sera en équilibre avec la gravité, et l'instant d'après elle exercera sur lui tout son pouvoir.

Exemple des effets de cette opposition pris dans la nature.

Il en est de même d'un corps qui vient heurter un ressort: le ressort cede d'abord, parceque son élasticité n'est comparable qu'à une pression ; mais comme cette élasticité réagit toujours en sens contraire, elle finit par l'emporter sur le corps choquant.

41. Quelle que soit la maniere dont le mouvement d'un corps est anéanti, la somme des obstacles ou des quantités de mouvement particulieres, par lesquelles cette destruction s'opere, est toujours égale à la quantité totale de mouvement du corps. En effet soit (*fig.* 8) un corps Q, dont le mouvement soit dirigé suivant la droite AB, et qui, à chaque élément $Pp = de$ de cette ligne, parcouru pendant l'instant dt, rencontre un obstacle dont l'action, si elle étoit continuée pendant l'unité de temps, lui feroit perdre la quantité de mouvement $Q\varphi$; la quantité de mouvement perdue dans le petit espace Pp, ou pendant l'instant dt, sera $= Q\varphi dt$; ainsi $Q\varphi dt$ pourra représenter un des obstacles qui s'opposent au mouvement de Q. La somme de ces obstacles, depuis A jusqu'en P, sera égale à $\int Q\varphi dt$. Mais nous avons vu (24) que $\varphi dt = du$; donc $\int Q\varphi dt$, ou $Q\int \varphi dt = Qu$; u est la vîtesse perdue par l'action des obstacles, Qu la quantité de mouvement détruite : donc la quantité de mouvement détruite est égale à la somme des obstacles.

Force des corps en mouvement, considérée relativement à la somme des obstacles qu'ils peuvent vaincre, laquelle est égale à la quantité de mouvement.

L'équation $\int Q\varphi dt = Qu$ donne le temps et la somme des obstacles nécessaires pour surmonter une quantité de mouvement donnée lorsque la force accélératrice est connue. Si, avec les mêmes données, on veut connoître l'espace parcouru, qui est représentatif du nombre des obstacles, il faudra à dt substituer

La même force considérée relativement au nombre des obstacles, qui est proportionnel au quarré de la vîtesse quand les obstacles sont égaux.

Digitized by Google

de, et chercher la valeur de $\int Q\varphi de$. Pour cela, prenons les deux équations $u = \frac{de}{dt}$, et $\frac{du}{dt} = \varphi$; multiplions-les membre à membre, l'un par l'autre; et intégrant le produit $udu = \varphi de$, nous aurons $\int \varphi de = \frac{1}{2}u^2$, et $\int Q\varphi de = \frac{1}{2}Qu^2$.

Disputes des mathématiciens sur la mesure de la *force* pour laquelle on peut adopter l'une ou l'autre des considérations précédentes.

Lorsque φ sera constant, on aura $Q\varphi e = \frac{1}{2}Qu^2$, ou $e = \frac{u^2}{2\varphi}$; ainsi dans ce cas l'espace parcouru, ou le nombre des obstacles surmontés, est proportionnel au quarré de la vîtesse. Dans tous les cas, comme φ doit être une certaine fonction de e, lorsqu'on considérera l'extinction du mouvement relativement au nombre d'obstacles qu'il a fallu pour le détruire, il y aura toujours une certaine fonction de ce nombre d'obstacles qui sera égale au quarré de la vîtesse.

Il y a eu des disputes très vives parmi les mathématiciens pour savoir si on devoit faire la *force* d'un corps en mouvement proportionnelle à la vîtesse ou au quarré de la vîtesse : il est bien aisé, d'après tout ce qui précede, de réduire la question à un énoncé raisonnable qui en suggérera sur-le-champ la solution. Le mot *force* ne désignant qu'une cause dont la nature est inconnue, et dont les effets sont les seules choses que nous puissions mesurer, il est clair que par ce mot, *mesure de la force*, on ne peut entendre que celle d'un de ses effets; or ces effets pouvant se considérer sous différents aspects, chacun comporte une espece de mesure particuliere et conforme à sa nature. Cela posé, si l'on considere l'effet de la force comme consistant dans la destruction d'une certaine somme d'obstacles ou de quantités de mouvement, cette somme doit être exprimée par $\int Q\varphi dt$, ou par Qu, c'est-à-dire qu'elle est proportionnelle à la simple vîtesse. Si on ne considere point l'effet de la force relativement à la somme des obstacles vaincus, mais relativement à leur nombre, ce nombre sera représenté par $\int Q\varphi de$, ou par $\frac{1}{2}Qu^2$, et sera proportionnel au quarré de la vîtesse lorsque tous les obstacles seront égaux.

Cette dispute n'est qu'une dispute de mots; la perfection des sciences tient à celle des signes.

On voit par-là que la fameuse question des *forces vives* n'est qu'une dispute de mots qui n'auroit jamais subsisté si l'on avoit voulu s'entendre, c'est-à-dire analyser et définir. On est étonné de trouver de pareilles disputes en mathématiques: mais il faut considérer que, dans ces sciences, et dans toutes celles dont les matériaux existent dans notre esprit, et ne tiennent point à des faits, l'intelligence des méthodes connues, et même l'invention des nouvelles, tiennent à la perfection des signes de nos idées. Le calcul différentiel n'est sorti de l'état borné où l'avoient laissé Fermat

Digitized by Google

Fermat et Barrow, que par une notation nouvelle; le calcul aux différentes partielles doit beaucoup à la notation de M. Fontaine. Ajoutez à cela qu'un peu d'opiniâtreté et d'esprit de parti peut se glisser en géométrie comme en morale et en politique, et l'on ne sera pas étonné de voir les vérités les plus claires s'obscurcir lorsqu'elles ont à combattre l'intérêt et une logique vicieuse.

Mouvement d'un corps produit par plusieurs *forces* ou *puissances*, toutes dirigées dans la même ligne droite.

(42). Nous n'avons jusqu'ici considéré le mouvement d'un corps que comme produit par une seule force ou puissance; s'il y en avoit plusieurs, et qu'elles agissent toutes dans la même ligne droite, alors il faudroit prendre leur somme ou leur différence, suivant qu'elles agiroient dans le même sens ou dans des sens opposés, et le mobile suivroit la même ligne droite dans le sens des forces ou des puissances prépondérantes. Mais si les forces agissent dans des directions qui fassent un angle entre elles, alors le mobile n'ira dans le sens ni des unes ni des autres, et suivra une direction moyenne qu'il s'agit de déterminer.

Ce qui a lieu lorsque deux *forces* qui font un angle entre elles agissent sur un corps.

Pour parvenir à ce but, imaginons (*fig.* 10) que le corps A soit placé sur un plan AC*a* qui se meut uniformément dans la direction A*a* avec une vîtesse telle qu'à chaque unité de temps il parcoure un espace égal à la ligne A*a* : il est certain que ce corps, considéré relativement au plan AC*a*, n'a aucun mouvement; mais que si un spectateur immobile, placé hors de ce plan, observe ce même corps, il lui attribuera un mouvement égal et parallele à celui du plan.

Cela posé, si on conçoit qu'une force quelconque P agisse sur lui selon la direction PAC, et lui imprime une vîtesse telle que, dans une unité de temps, il puisse parcourir l'espace AC uniformément, on ne peut douter qu'en vertu de cette premiere impression, qui lui est propre, il ne doive se trouver au point C lorsque cette unité de temps finira. Mais comme, en vertu du mouvement du plan, la ligne AC s'avance d'un mouvement parallele et uniforme vers *ac*, et qu'elle doit réellement se confondre avec *ac* au bout d'une unité de temps, il est clair que le point C se confondra avec le point *c*, et que par conséquent le corps A, qui participe au mouvement du plan, doit se trouver en *c* à la fin de la premiere unité de temps.

On peut prouver de même qu'au bout d'une partie quelconque T de cette unité, le corps A, animé de la même vîtesse AC, doit parcourir un espace proportionnel AB = T × AC, pendant que le mouvement commun entraîne la ligne AB, pa-

Digitized by Google

rallèlement à elle-même, à une distance $Aa' = Bb = T \times Aa$. Cette ligne se confond donc avec $a'b$; et par conséquent b est le lieu du corps au bout du temps T. Or il est aisé de voir que tous les points b que l'on détermineroit par le même raisonnement se trouvent sur la même diagonale Ac, puisque AB : Bb :: AC : Cc: donc le corps A décrira réellement la diagonale Ac.

Mais ce n'est pas là tout. Son mouvement le long de cette ligne doit être uniforme; car Ab : Ac : : AB : AC : : T × AC : AC : : T : 1; c'est-à-dire AB : Ac comme le temps employé à parcourir Ab est au temps employé à parcourir Ac. Donc enfin le mouvement du corps A, suivant la diagonale AC, est uniforme (33).

Puisqu'un corps en repos sur un plan mobile a toute la vîtesse de ce plan, il est clair que si le plan est en repos, mais que le corps soit mu uniformément, suivant une ligne droite QAa, avec la vîtesse Aa, et reçoive au point A de la force P une vîtesse AC, dans la direction PAC, il décrira uniformément la diagonale Ac d'un parallélogramme formé sur les côtés Aa, AC, qui représenteront les vîtesses du mobile suivant Aa et AC, pendant que la diagonale Ac représentera sa nouvelle vîtesse.

Mais, à quelque cause que soit due sa vîtesse dans la direction Aa, on peut se la représenter comme l'effet d'une force Q qui agit au même instant que la force P, dont l'effet est dirigé selon AC; ce qui nous fournit ce principe général.

Principe fondamental sur le mouvem. d'un corps mu par l'action simultanée de deux forces.

43. *L'action simultanée de deux forces* P *et* Q *sur un corps* A, *auquel elles peuvent donner des vîtesses* V *et* U, *fera parcourir à ce corps la diagonale d'un parallélogramme dont les côtés feront entre eux un angle égal à celui des directions des deux forces; et ces côtés représentant les vîtesses* V *et* U, *la diagonale représentera la vîtesse du mobile* (*).

Le parallélogramme ACca s'appelle *parallélogramme des forces.*

Ce que c'est que *forces composantes* et *force résultante.*

44. On voit par-là que l'action combinée des deux forces P et Q est la même que celle d'une force unique capable de procurer la vîtesse Ac. Nous nommerons par cette raison les deux forces P et Q *forces composantes*, et la force R qui en résulte *force résultante.* D'après cela, si on représente les forces P, Q, R, par les vîtesses qu'elles peuvent communiquer au mobile, on aura (*fig.* 11) cette suite de rapport.

$$P : Q : R : : AB : AC : AD.$$

(*) La démonstration qu'on donne ici de ce principe est tirée du *Traité de mécanique* de M. l'abbé Marie.

Conditions pour qu'un point sollicité par trois forces reste immobile.

On voit encore que si les forces P et Q agissent sur le point A dans les directions AB, AC, et la force R dans la direction DA, le point A restera absolument immobile, puisque ce cas se réduit à celui de deux forces égales et directement opposées.

Ce qui arrivera si, à l'action combinée de deux forces, on substitue celle de deux puissances.

45. Si le corps A, au lieu d'être mu par l'impulsion de deux forces qui tendent à lui donner un mouvement uniforme, étoit livré à l'action de deux puissances qui tendissent à le faire mouvoir d'un mouvement uniformément accéléré, et agissant toujours parallèlement à deux lignes données de position, son mouvement seroit rectiligne dans le cas précédent, et de plus uniformément accéléré.

En effet, que les lignes AB, AC (*fig.* 12), représentent, en quantité et en direction, les *forces motrices* (40) qui animeroient le corps A, en vertu de chacune des puissances qui agissent sur lui, la diagonale A*a* représentera, en quantité et en direction, la force motrice *résultante* des deux *composantes* AB, AC. Au bout de l'instant *dt*, le mouvement sera accéléré par deux nouvelles *forces motrices* égales et ayant des directions parallèles à celles des premieres (hypoth.) qui seront par conséquent représentées par les droites *ab*, *ac*, égales à *a*C et *a*B, et prises sur leur prolongement. Ainsi la nouvelle résultante sera la diagonale *aa'* égale à *a*A et prise sur son prolongement : il en sera évidemment de même pour tous les instants suivants : donc les *forces motrices*, ou les accroissements instantanés de quantité de mouvement, seront tous égaux, et tendront à faire mouvoir le corps dans la même ligne droite.

Origine et principe du mouvement en ligne courbe.

Les *forces motrices* demeurant toujours constantes, si leur direction varie à chaque instant, le mouvement du corps ne sera plus rectiligne. Cela est évident (*fig.* 13) : car on voit sur-le-champ que si les lignes *ab*, *ac*, quoiqu'égales à AB et AC, ne leur sont plus paralleles, la diagonale *aa'* ne sera plus dans la direction de A*a*. Il y a plus, le mouvement ne sera point uniformément accéléré, à moins que les variations de direction *fab*, *gac*, ne soient égales et dans le même sens, auquel cas l'angle *cab* sera égal à l'angle CAB.

C'est ici le lieu d'observer que si un corps, se mouvant dans une direction, reçoit une impulsion perpendiculaire à cette direction, il en changera, mais que sa vîtesse, dans le sens de la premiere direction, sera toujours la même.

Lorsque les *forces motrices* composantes seront variables, soit qu'elles agissent ou non parallèlement à des lignes données de position, la force motrice résultante sera généralement varia-

Digitized by Google

ble, et le mouvement curviligne, excepté dans quelques cas particuliers, qu'il sera fort aisé d'analyser lorsque nous traiterons cette matiere plus amplement.

La considération de ce mouvement complete les recherches à faire sur les premiers phénomenes sensibles du mouvement.

Ce que nous venons de dire suffit pour faire voir quelle est l'origine du mouvement curviligne, et comment ses propriétés peuvent se déduire de la décomposition des forces. Cette théorie complete les recherches à faire sur les premiers phénomenes sensibles du mouvement, qui, comme on l'a observé (3), sont l'espace parcouru, le temps employé à le parcourir, et la direction rectiligne ou curviligne de la longueur parcourue.

Mouvem. d'un corps modifié par la rencontre d'obstacles inébranlables obliques à sa direction.

46. Il peut arriver que le mouvement change de direction sans que ce changement soit déterminé *à priori* par l'action combinée de plusieurs forces, et c'est ce qui arrivera lorsque le corps rencontrera des obstacles inébranlables obliques à la direction de son mouvement. Supposons (*fig.* 14) que le corps A, se mouvant le long du plan ABC, rencontre au point B un plan BD faisant, avec le premier, l'angle DBC, le corps A changera sa direction ABC en la direction BD. On peut toujours imaginer que ce changement est produit par l'action combinée de deux forces, dont l'une est celle qui faisoit mouvoir le corps suivant AB, que nous représenterons par BC, ou par l'espace qu'elle lui feroit parcourir dans l'unité de temps, et l'autre est la résistance du plan BD, qui doit être une force BE, perpendiculaire à sa direction. Si, par le point C, on mene la ligne CD parallele à BE, les deux forces BD, BE, seront capables de produire le même effet que la force unique BC (43) : la force BE est détruite par la résistance du plan BD, et la force BD est celle qui anime le corps le long de ce plan, c'est-à-dire que BD est égal à sa vîtesse ou à l'espace qu'il y parcourt dans l'unité de temps.

47. Si, du point B comme centre, et de BC comme rayon, on décrit l'arc C*a*; le sinus verse D*a* sera la différence entre BC et BD, c'est-à-dire sera égal à la vîtesse que le corps aura perdue en changeant, par la rencontre du plan BD, sa direction BC en la direction BD. On a donc la proportion

$$\text{rayon } (1) : \text{sin.verse DBC} :: \text{BC} : \text{D}a = \text{BC} \times \text{sin.verse DBC}.$$

Vîtesse perdue à la rencontre de ces obstacles.

Ainsi *lorsqu'un corps en mouvement change sa direction par la rencontre d'un plan inébranlable, la vîtesse qu'il perd à cette rencontre est égale à la vîtesse qu'il avoit dans la premiere direction multipliée par le sinus verse de l'angle formé par cette direction et par le plan rencontré.*

48. On peut encore faire la proportion

Vitesse du corps après cette rencontre.

rayon (1) : cos.DBC :: BC : BD; d'où BD = BC × cos.DBC.

Donc, dans le cas précédent, la vîtesse le long du plan rencontré est égale à la vîtesse primitive multipliée par le cosinus de l'inclinaison de la direction primitive et de la nouvelle direction.

On peut supposer que la direction primitive et les suivantes ont lieu le long des côtés d'un polygone, et les deux formules précédentes donneront la perte et la variation de vîtesse à chaque angle du polygone.

Mouvement le long d'une courbe.

49. Si l'angle que chacun des côtés du polygone fait avec le côté suivant étoit infiniment petit, le sinus verse de cet angle seroit égal à zéro, et par conséquent (46) la vîtesse perdue à la rencontre de chaque côté seroit pareillement égale à zéro, c'est-à-dire que le mobile se mouvroit toujours avec la même vîtesse. Qu'on suppose de plus que les côtés du polygone sont infiniment petits, cela ne changera rien à l'invariabilité de la vîtesse, mais le polygone deviendra une courbe, et nous aurons cette proportion générale : *Si un corps mu le long de la ligne droite* AB (fig. 15) *rencontre le plan courbe inébranlable* BC, *tangent à cette droite, il parcourra une partie quelconque* BC *de ce plan sans rien perdre de sa vîtesse.*

Ce mouvement ne diminue rien de la vîtesse.

Communication directe du mouvem. par le moyen de cordes, verges, etc.

50. Jusqu'ici nous avons supposé que la communication du mouvement se faisoit par une impulsion directe et appliquée immédiatement au corps qu'on vouloit faire mouvoir. Les effets seroient les mêmes si cette communication s'opéroit par l'intermede de cordes, de verges ou d'autres instruments analogues, dont la longueur seroit placée dans la direction du mouvement. Par exemple, soit le corps A (*fig.* 16) qu'on veut faire mouvoir dans la direction AB : on peut supposer qu'une force agit immédiatement sur ce corps, ou qu'elle est appliquée à l'extrémité B d'une corde inextensible AB, ou enfin à l'extrémité C d'une verge inflexible AC. Dans ces trois cas la vîtesse sera la même; car la verge ou la corde étant placée dans la direction du mouvement, et une force pouvant être censée appliquée à un point quelconque de sa direction, on peut, dans les deux derniers cas, la transporter mentalement à l'extrémité opposée de cette verge ou de cette corde, c'est-à-dire sur le corps même.

Ces moyens n'ajoutent rien à la force du moteur.

Les moyens qu'on vient d'indiquer ne sont donc que de pure commodité, et ne donnent pas au moteur plus ni moins de force qu'il n'en a réellement. Si un bloc de pierre est au fond d'un

Digitized by Google

puits de carriere, qu'on le lie avec une corde verticale, et que des hommes, prenant la corde dans leurs mains, essaient de le faire monter, ils supporteront le même poids que si leurs bras étoient immédiatement appliqués au bloc. Mais si ces mêmes hommes enroulent leur corde autour d'un cylindre, tournant sur deux axes, et qu'au moyen d'une manivelle plus longue que le rayon du cylindre, ils remontent le bloc en faisant tourner le cylindre, alors ils se sentiront soulagés d'une partie du poids qu'ils supportoient précédemment. Lorsque ce même bloc sera ensuite porté dans un chantier de tailleurs de pierre, un seul homme parviendra à le faire mouvoir en insinuant par-dessous l'extrémité d'une verge de fer, appuyée, près de cette extrémité, sur une pierre autour de laquelle, comme centre, il fera décrire un arc au bout engagé sous le bloc, en s'appuyant sur le bout extérieur.

Autre moyen de communiquer le mouvement qui ajoute à la force.

Origine du levier.

Ces procédés, qu'une expérience journaliere offre à nos yeux, nous indiquent que nous ne devons pas toujours juger de l'effet d'une force par son intensité ou sa quantité absolue, mais qu'il faut encore avoir égard à la maniere dont elle est employée, puisque telle force qui ne seroit pas en état de faire équilibre à telle autre la surmontera si on la lui oppose avec l'appareil convenable. Il reste donc, pour compléter nos recherches sur les phénomenes du mouvement, à discuter cette maniere de le produire, qui, prise dans le sens le plus général, se réduit à la théorie du *levier*.

Sa théorie n'est que celle du parallélogramme des forces, présentée sous un certain aspect.

51. Cette théorie n'est autre chose que celle du parallélogramme des forces, présentée sous un certain aspect, ainsi qu'on va le voir. Soient (*fig.* 17) les deux forces ou puissances P, Q, représentées par les parties AB, AD, de leurs directions, agissant dans un même plan sur le point A, ou le tirant chacune de leur côté au moyen des cordes AP, AQ, dans le sens AP, AQ.

Principe du parallélogramme des forces, appliqué au levier.

Si l'on forme le parallélogramme ABCD, l'impulsion du point A sera la même (43) que si elle étoit produite par une puissance ou une force unique représentée par AC.

Supposons maintenant que, dans l'angle QAP, on place un triangle matériel mixtiligne AE*d*F, dont le côté courbe F*d*E soit perpendiculaire au point *d*, à la résultante AC, et appuyé au même point contre un obstacle immobile *q*, les cordes QA, AP, étant appliquées le long des côtés rectilignes AF, AE, et attachées au sommet A. Dans cet état, puisqu'aux forces P et Q on peut substituer la force AC, et qu'elles n'ont, par leur action simultanée, d'autre effet, tant en quantité qu'en direc-

tion, que celui que peut produire cette force AC, il est évident que le point A restera parfaitement immobile, puisque tout l'effet de la force AC sera arrêté par l'obstacle *q*. Si le point A est immobile, les points E et F le seront aussi, puisque tout le système est lié; ils le seront encore, si les parties de corde AE, AF, sont rendues adhérentes au triangle qu'elles embrassent, de maniere à ne faire avec lui qu'un seul corps: car, puisqu'elles ne peuvent pas couler le long des côtés AE et AF, leur adhésion ou leur non-adhésion ne fait rien à l'équilibre; mais, dans le cas de l'adhésion, l'effort des forces P et Q ne va plus jusqu'au point A, il s'arrête aux points E et F, et toutes les parties de corde EA, FA, deviennent inutiles. Il en est de même de la masse de triangle qui est au-dessus de la ligne F*d*E, dont on peut supprimer une partie quelconque A*mn*, la partie restante étant supposée inflexible. Cette supposition ne changera évidemment rien à l'équilibre; car l'effet des forces Q et P s'arrêtant aux points EF, la partie A*mn* n'en est point affectée. On peut donc (*fig.* 18) substituer au triangle sa base curviligne FE, considérée comme une verge courbe inflexible.

Cette verge, appliquée dans les circonstances dont on vient de parler, se nomme *levier;* l'obstacle *q* se nomme *point d'appui;* les parties *q*E, *q*F, *bras du levier* (*), et la propriété du parallélogramme des forces que nous avons démontrées, s'énonce ainsi, en y introduisant les nouvelles dénominations qu'on vient d'établir:

Propriété fondamentale du levier.

52. *Si deux forces ou deux puissances, dont les directions sont dans un même plan, agissent chacune à l'extrémité d'un levier, et que leur résultante passe par le point d'appui du levier, et lui soit perpendiculaire à ce même point, tout le système sera en équilibre.*

Axe servant de point d'appui.

Si la résultante ne fait pas un angle droit avec le levier, au point d'appui, le levier glissera sur ce point d'appui du côté de l'angle aigu inférieur, à moins qu'une force tangente au levier, au point d'appui, ne s'y oppose en sens contraire, ou que le glissement ne soit arrêté par un obstacle. On se procurera cet obstacle en perçant le levier d'un trou *q* (*fig.* 19), au travers duquel on fera passer une tige ou axe qui servira de point d'appui. Alors il suffira, pour l'équilibre, que la résultante passe par

(*) Quelle que soit la position du point d'appui relativement aux forces ou aux puissances, nous nommerons toujours *bras de levier* la distance du point d'appui à la direction des forces ou puissance; comptée sur le levier.

le centre de l'axe, et elle pourra faire avec le levier un angle quelconque.

Égalité entre le rapport des trois forces qui concourent à un point et celui des perpendiculaires, menées sur leurs directions.

53. Si l'on a (*fig.* 20, n°s 1, 2, 3) deux forces P et Q, représentées par AB et AD, et qu'achevant le parallélogramme ADCB, on ait la résultante R représentée par AC; je dis que si, d'un point quelconque F pris sur la direction d'une quelconque des trois forces P, Q, R, on mene deux perpendiculaires { FE, FG, n°1; GF, GE, n°2; EF, EG, n°3; sur la direction des deux autres, et qu'on tire la ligne { GE, n°1 FE, n°2, GF, n°3, on aura la proportion

$$P : Q : R :: GF : FE : GE.$$

Démonstration. Les deux angles { FGA, FEA, n°1; GFA, GEA, n°2; EFA, EGA, n°3; étant droits, si sur { FA, n°1; GA, n°2; AE, n°3; comme diametre, on décrit un cercle AEFG, il passera par les points { E et G, n°1; F et E, n°2; F et G, n°3;. Ce cercle décrit, on voit que les angles GEF et DAC sont égaux, puisqu'ayant tous deux leur sommet à la circonférence, ils s'appuient sur les mêmes arcs. Il en est de même des angles EGF et CAB. On a donc GEF = DAC = ACB, et EGF = CAB; d'où il résulte que les deux triangles ABC, GEF, sont semblables, puisqu'ils ont deux angles égaux chacun à chacun. Comparant les côtés homologues, on a

$$AB : (BC = AD) : AC :: GF : FE : GE$$

ou

$$P : Q : R :: GF : FE : GE$$

C · Q · F · D.

Application au levier.

54. Puisque, dans le cas de l'équilibre dans le levier, le point d'appui doit se trouver sur la direction de la résultante, si, de ce point (*fig.* 19), on mene des perpendiculaires qG, qH, sur les directions des puissances P et Q, on aura, d'après ce qui précede,

$$P : Q :: qH : qG;$$

c'est-à-dire que, *lorsque deux forces ou deux puissances, agissant chacune à l'extrémité d'un levier, sont en équilibre, si, du point d'appui, on mene une perpendiculaire sur la direction de chacune, ces forces ou puissances seront réciproquement comme les perpendiculaires menées sur leur direction.*

Avantages du levier en mécanique.

Nous trouvons ici l'explication de ce qui a été dit (49) sur l'avantage

l'avantage qu'une petite force peut avoir sur une grande, lorsqu'on l'applique convenablement : car (*fig.* 21) il est évident, à l'aspect de la figure, que si les forces P et Q sont en équilibre aux extrémités du levier FE, et sont par conséquent dans le rapport des perpendiculaires qH, qG, menées sur leurs directions, la force Q doit être beaucoup plus petite que la force P, puisque qG est beaucoup plus petit que qH. On voit donc qu'au moyen du levier on peut, ainsi que le prouve l'expérience, avec le plus petit effort, contre-balancer la plus grande puissance, et produire par-là les plus grands effets en mécanique : c'est ce qui faisoit dire à Archimede que, pour soulever le monde, il ne demandoit qu'un levier et un point d'appui.

Propriétés du levier droit.

55. Si le levier FE est droit (*fig.* 22), et que les puissances P et Q soient paralleles entre elles et perpendiculaires à sa direction, alors (*fig.* 21) les perpendiculaires qG, qH, se confondront avec la direction du levier, et seront égales à la distance du point d'appui, à la direction de chaque puissance, ou au bras de levier. Ainsi,

Lorsque deux forces ou puissances appliquées à l'extrémité d'un levier droit, et perpendiculaires à ce levier, se font équilibre, elles sont en raison inverse de la longueur de leur bras de levier.

Ce qui arrive lorsque les forces ou puissances, appliquées au levier, se trouvent d'un même côté par rapport au point d'appui.

56. Nous avons supposé, dans ce qui précede, que les deux forces ou puissances agissoient à chaque extrémité du levier, et que le point d'appui se trouvoit renfermé dans l'angle formé par leurs directions : il arrive souvent que le point d'appui est hors de cet angle. Supposons (*fig.* 23) que la puissance P tende à faire tourner le levier qE dans le sens AB, autour du point d'appui q, que la puissance R tende à le faire tourner dans le sens CA, et que ces deux puissances ainsi appliquées se contrebalancent mutuellement ou soient en équilibre, et cherchons les rapports qui doivent exister entre elles. Pour cela, je remarque que si le point d'appui n'existoit pas, l'action simultanée des deux puissances P et R tendroit à faire marcher le point q du côté du point A ; je puis donc regarder la résistance du point d'appui comme une troisieme puissance Q qui s'exerce de A en q, fait équilibre à l'effort simultané des deux autres, et passe conséquemment par le point de réunion A de leurs directions. Représentant P par AB, R par CA, Q sera représenté par CB ou AD, qui lui est égal et parallele ; menant ensuite les perpendiculaires qL, qK, on aura (53) la proportion P : R : : qK : qL ; donc, dans cette position du point d'appui, comme dans la précédente,

les forces sont en raison inverse de la distance du point d'appui à leur direction. Donc, en général,

Conditions de l'équilibre dans ce cas.

57. *Lorsque deux forces ou deux puissances, appliquées à un levier, se font équilibre, quelle que soit leur position à l'égard du point d'appui, elles seront toujours en raison inverse des distances de ce point d'appui à leurs directions.*

Considérations générales sur l'équilibre du levier; ce qu'on doit entendre par le mot *résultante* pris dans le sens le plus général.

On peut ajouter que la résultante des deux puissances passera toujours par le point d'appui, en prenant ce mot *résultante* dans le sens le plus général, et considérant une résultante comme une force destinée, ou à être substituée à plusieurs autres pour produire elle seule le même effet qu'elles produisent toutes ensemble, ou à leur être opposée pour anéantir, par son action unique, leur action simultanée: dans ces deux cas, sa quantité et sa ligne de direction sont les mêmes; il n'y a de différence que dans le sens dans lequel elle agit le long de cette ligne. En considérant le parallélogramme des forces sous ce point de vue général, une quelconque des trois forces ou puissances peut être considérée comme la résultante des deux autres. En effet si (*fig.* 24) on a le parallélogramme ABCD, et qu'on prolonge CA jusqu'en *c*, DA jusqu'en *d*, et BA jusqu'en *b*, en faisant A*c* = AC, A*d* = AD et A*b* = AB, qu'on tire ensuite les lignes *cb*, *cd*, *b*D, *d*B, on aura les parallélogrammes A*cd*B, A*cb*D, dans lesquels la force A*d* = AD pourra être considérée comme la résultante de A*c* = AC et de AB, et la force A*b* = AB, comme la résultante de A*c* = AC et de AD.

Équilibre dans le levier droit lorsque le point d'appui est à une des extrémités.

58. Lorsque le levier est droit (*fig.* 25), si les puissances P et Q, étant d'un même côté par rapport au point d'appui, sont supposées perpendiculaires au levier, les bras de levier *q*F, *q*E, représenteront les perpendiculaires *q*K, *q*L, de la *figure* 23, et la proposition (56) appliquée au levier droit s'énoncera ainsi:

59. *Lorsque deux forces ou puissances sont appliquées à un levier droit, et perpendiculaires à ce levier, se font équilibre, quelle que soit leur position à l'égard du point d'appui, ces puissances sont en raison inverse de leur bras de levier.*

Ce qu'on doit entendre par les mots *moteur*, *résistance*; ce que c'est que levier du premier, du second ou du troisième genre.

60. Lorsqu'on applique le levier aux usages dont il est susceptible dans les différents besoins de la vie, les deux puissances ou forces ont chacune une dénomination différente: l'une est toujours un obstacle qu'on se propose de vaincre, comme un fardeau à soulever, un corps à écarter d'un autre, etc. on la nomme pour cela *résistance;* l'autre est la force ou la puissance destinée à vaincre l'obstacle, et que nous désignerons l'un et l'autre par le mot commun *moteur*, à moins que l'état de la question ne

nécessite de dire si c'est une force ou une puissance. En général, nous nommerons *moteur* toute cause capable de donner à un corps une certaine vîtesse ou une certaine force accélératrice. Ainsi la pesanteur est un *moteur* qui communique à un corps une vîtesse de 30,196 pieds au bout de la premiere seconde de son action.

Nous nommerons *résistance* la cause qui empêchera ou tendra à empêcher l'effet du *moteur*, lorsque ce moteur sera considéré comme appliqué à une machine.

Le levier lui-même a aussi différentes dénominations, suivant la maniere dont il est appliqué : on le nomme *levier du premier genre*, lorsque le point d'appui est entre le moteur et la résistance ; *levier du second genre*, lorsque la résistance est entre le point d'appui et le moteur ; enfin *levier du troisieme genre*, lorsque le moteur est entre la résistance et le point d'appui.

Tous les effets, en mécanique, qui ne se rapportent pas immédiatement au levier, peuvent être rapportés au *plan incliné*.

61. Après ce que nous avons vu tant sur l'impulsion directe que sur la théorie du levier, nous pourrions, à la rigueur, analyser les effets de toutes les machines employées en mécanique ; il en est cependant quelques uns qui, quoique susceptibles d'être déduits du parallélogramme des forces, paroissent former une classe à part : ces effets sont ceux du coin, de la vis et des machines qui s'y rapportent, dont la théorie tient à celle du plan incliné. Nous ne pouvons donc nous dispenser de donner cette théorie afin de compléter des notions préliminaires qui doivent renfermer les principes de toutes les recherches à faire en mécanique. Cette maniere de procéder nous paroît lumineuse, et en même temps agréable pour le lecteur, qui, en parcourant les sections suivantes, aura d'avance le texte des matieres qu'elles traitent, et pourra les considérer comme le développement d'un germe qu'il a déja dans l'esprit.

Ce que c'est que le *plan incliné* en mécanique.

62. Soient (*fig.* 26) AC et CB deux plans rectangulaires, et AB un autre plan, tous trois perpendiculaires à celui de la planche ; AB sera ce que nous nommerons un plan incliné dont la ligne AC sera la hauteur et CB la base.

Théorie du plan incliné.

Je suppose qu'un corps M, placé sur le plan incliné, est sollicité par un *moteur* dans la direction DF, et que DF représente la vîtesse qu'il peut en recevoir si le moteur est une *force*, ou la force accélératrice dans le premier instant, si c'est une puissance. On voit que le corps ne peut pas suivre la direction DF, car le plan AB, supposé immobile, s'y oppose ; il sera donc obligé de glisser le long de AB, et il s'agit de déterminer le mouvement qu'il aura dans cette direction. Pour cela, je mene par

Digitized by

le point D une parallele DE à AB, et une perpendiculaire DG à cette même ligne ; j'acheve le parallélogramme DEFG ; la ligne DG représentera l'action du moteur perpendiculairement au plan incliné, et la ligne DE, son action parallèlement à ce plan.

Je prolonge DF jusqu'à ce qu'elle rencontre AC prolongée en a; je nomme DF, P; l'angle CAB, α; et l'angle DaA, γ; cela fait, le triangle rectangle DFE me donne les deux proportions:

$$\text{Rayon} : \text{DF} :: \begin{cases} \text{sin. FDE} : \text{FE} \\ \text{cos. FDE} : \text{DE} \end{cases}.$$

Mais on a angle FDE = angle FdB = ang. dAa + ang. daA $= \alpha + \gamma$; mettant donc $\alpha + \gamma$ pour FDE dans les proportions précédentes, et faisant rayon = 1, on a les équations EF = P sin.$(\alpha + \gamma)$ et DE = P cos.$(\alpha + \gamma)$.

L'action du moteur, dans le sens EF, est détruite par la résistance du plan incliné ; ainsi P sin. $(\alpha + \gamma)$ exprime la pression que le corps M exerce perpendiculairement à ce plan. L'action DE, parallèlement à AB, n'ayant aucun obstacle à vaincre, jouit de toute son énergie, et représente la vîtesse ou la force accélératrice que le corps aura réellement le long de BA, et qui a pour valeur P cos. $(\alpha + \gamma)$. Observons que, suivant que la direction DF tombera du côté de A ou de B, relativement à la perpendiculaire DG, le mouvement aura lieu dans le sens BA ou dans le sens AB : dans le premier cas l'angle FDE sera obtus, et son cosinus négatif; dans le second, qui est celui de la figure, il sera aigu et son cosinus positif : ainsi, pour réunir ces deux cas, il faut donner le double signe à DE, et poser DE $= \pm$ P cos.$(\alpha + \gamma)$, le signe supérieur désignant un mouvement de A en B, et l'inférieur un mouvement de B en A.

63. Lorsque la direction DF sera parallele à la hauteur AC du plan incliné, l'angle γ sera égal à zéro, et le mouvement suivant DE sera égal à $\pm$ P cos.α. Supposons, dans ce cas, que le moteur soit une puissance dont la force accélératrice soit constante, dirigée de maniere que le mouvement ait lieu de A en B, et égale à φ, la force accélératrice φ', qui aura lieu dans le sens AB, sera φ cos.$\alpha = \varphi'$; mais le triangle rectangle ABC donne, rayon (1) : cos.CAB (cos.α) :: AB : AC; donc cos.$\alpha = \frac{AC}{AB}$; ainsi, $\varphi' = \varphi \frac{AC}{AB}$, ou $\varphi' : \varphi :: AC : AB$. Donc

Corps animé d'une puissance dont la force accélératrice est constante, se mouvant sur un plan incliné.

64. *Lorsqu'un corps obligé de se mouvoir le long d'un plan incliné, est animé par une puissance dont la force accélératrice est constante et parallele à la hauteur du plan, il se mouvra le*

Digitized by Google

long de ce plan avec une force accélératrice aussi constante, et qui sera à la premiere, comme la hauteur du plan est à sa longueur.

65. L'équation $vdv = \varphi de$ (24) étant intégrée dans le cas de φ constant, comme il l'est ici, donne $\frac{1}{2}u^2 = \varphi e$; les u et les e étant zéro en même temps, on tire de là $u = \sqrt{2\varphi e}$: c'est la vîtesse qui, au bout d'un espace e, résulteroit de la puissance, si le corps se mouvoit librement. La vîtesse u', au bout d'un espace e' le long du plan incliné, sera $u' = \sqrt{2\varphi}\cos.\alpha e'$; ce qui donne $u : u' :: \sqrt{e} : \sqrt{\cos.\alpha e'}$.

Si on suppose $u = u'$, on aura $e = \cos.\alpha e'$, ou $e' : e :: 1 : \cos.\alpha :: AB : AC$; donc, lorsque le mobile aura parcouru AB, il aura acquis la même vîtesse que si, abandonné librement à la puissance, il eût parcouru AC. Donc

66. *Un corps se mouvant le long d'un plan incliné, avec les circonstances énoncées* (64), *acquerra la même vîtesse, après avoir parcouru la longueur du plan, que s'il eût parcouru librement sa hauteur.*

Relation entre la vîtesse qu'il acquiert le long du plan et celle qu'il eût acquise librement.

67. L'équation $e = bt^2$ trouvée (16), renferme une constante b qui est égale à $\frac{1}{2}\varphi$, d'après ce qui est dit (19) et (25); ainsi on a $e = \frac{1}{2}\varphi t^2$, et conséquemment $e' = \frac{1}{2}\varphi\cos.\alpha t'^2$, en nommant t' le temps correspondant à e'. Ces équations donnent $e' : e :: \cos.\alpha t'^2 : t^2$, et lorsque $t = t'$, $e' : e :: \cos.\alpha : 1 :: AC : AB$; d'où $e = e'\frac{AB}{AC}$.

Supposons que le corps ait parcouru le long du plan incliné un espace AH, si je mene au point H la perpendiculaire HK sur AB, j'aurai, à cause des triangles semblables, AHK, ACB; $AC : AB :: AH : AK = AH \times \frac{AB}{AC} = e'\frac{AB}{AC} = e$. Ainsi

68. *En conservant les hypotheses de* (63) *et* (65), *l'espace parcouru le long du plan incliné sera, à l'espace qui auroit été parcouru librement dans le même temps, comme la hauteur du plan est à sa longueur, et on déterminera ce dernier espace en menant une perpendiculaire à la longueur du plan, à l'extrémité du premier espace, et prenant la distance entre le sommet du plan considéré comme l'origine des espaces, et l'intersection de la hauteur et de ladite perpendiculaire.*

Relation entre les espaces qu'il parcourt et ceux qu'il eût parcourus librement.

69. Si on a un cercle AHK (*fig.* 27), qu'on mene le diametre AK, et les cordes AH, celles-ci pourront être considérées comme des portions de plans inclinés, dont les hauteurs seroient prises sur le diametre AK. Tirant les lignes HK à l'autre extrémité du diametre, ces dernieres seront, par la propriété du cercle, per-

Digitized by Google

pendiculaires sur les AH ; et dans les hypotheses précédentes, et d'après la propriété énoncée (68), les cordes AH seront parcourues dans le même temps que le seroit librement le diametre AK. Donc

Relation entre le temps employé à parcourir la corde d'un cercle et celui employé à parcourir le diametre.

70. *Si un moteur imprime à un corps une force accélératrice constante qui lui feroit parcourir, dans un certain temps, le diametre d'un cercle, ce corps parcourra, dans un temps égal, une corde quelconque de ce cercle, considérée comme un plan incliné dont la hauteur seroit prise sur ledit diametre.*

71. Reprenons (*fig.* 26) la valeur de DE que nous avons trouvée égale à $\pm$ P cos.$(\alpha + \gamma)$. Faisons DE = P', nous aurons P' = $\pm$ P cos.$(\alpha + \gamma)$, qui, comme on l'a vu, est l'action que le moteur exerce librement le long de AB. Supposons un autre moteur Q, dirigé suivant une ligne qui fasse un angle γ' avec la hauteur du plan, et dont l'action parallele à la longueur de ce plan soit Q', on trouvera par le même raisonnement de l'art. (61) Q' = $\pm$ Q cos.$(\alpha + \gamma')$.

Il est évident que si P' et Q' agissent dans le même sens, c'est-à-dire (61) si cos.γ et cos.γ' ont le même signe, le corps M se mouvra le long du plan incliné, avec la somme des deux actions. Si P' et Q' agissent dans des sens opposés, ou si cos.γ et cos.γ' ont différents signes, l'action exercée parallèlement au plan sera égale à la différence de P' à Q', et si cette différence est nulle, et qu'on ait P' + Q' = 0, le corps M restera en repos.

L'équation P' + Q' = 0 donne $\pm$ P (cos.$(\alpha + \gamma)$) = $\mp$ Q (cos.$(\alpha + \gamma')$) ; d'où P : Q :: cos.$(\alpha + \gamma')$: cos.$(\alpha + \gamma')$, observant que $\alpha + \gamma$ = FDE = FdB = l'angle que la direction du moteur fait avec la longueur du plan, et faisant $\alpha + \gamma = \delta$, on a P : Q :: cos.δ' : cos.δ ; d'où

Condition de l'équilibre lorsqu'un corps placé sur un plan incliné est livré à l'action de deux moteurs.

72. *Lorsqu'un corps posé sur un plan incliné est sollicité par deux moteurs, il restera immobile sur ce plan, si ces deux moteurs sont en raison inverse des cosinus des angles formés par leurs directions et la longueur du plan incliné, ces cosinus étant supposés affectés de signes différents.*

Recherche sur l'action mutuelle de deux corps placés sur deux plans inclinés, adossés et liés ensemble par une corde.

73. Plaçons de l'autre côté de AC un autre plan incliné AH, dont la base soit HC et la hauteur AC commune avec le plan incliné AB. Nommons l'angle HAC, α', et supposons que le corps N, placé sur le plan incliné, soit soumis à l'action d'un moteur Q, qui fasse avec AC un angle γ', et avec AH un angle δ''.

On aura, d'après ce qui précede, pour l'action Q' du moteur, parallèlement à AH, Q' = Q cos.δ''.

Joignons les corps N et M par une corde parfaitement flexible

Digitized by Google

et inextensible, qui soit parallele de chaque côté à la longueur des plans inclinés, et passe par-dessus une poulie parfaitement mobile O; alors le corps N ne pourra point aller de A en H sans faire mouvoir avec la même vîtesse le corps M de B en A. Q′, ou Q cos.δ', exprimant la vîtesse que le moteur, considéré comme une force, donne parallèlement à AH, NQ cos.δ' sera la quantité de mouvement dans la même direction. Pareillement MP cos.δ sera la quantité de mouvement du corps M le long de la ligne AB, et la vîtesse commune de ces deux corps ainsi liés sera (39) $\frac{NQ\cos.\delta' \pm MP\cos.\delta}{Q+P}$. Le signe + aura lieu lorsque cos.δ et cos.δ' auront des signes contraires; car alors les mouvements primitifs P′, Q, tendant à faire monter un des corps tandis que l'autre descend, les mettront dans le cas de deux corps qui se choquent, et dont les vîtesses étoient dans le même sens. Le signe — aura lieu dans le sens contraire par la raison contraire.

74. Dans le cas de l'équilibre, on aura NQ cos.δ' = MP cos.δ; d'où Q : P : : M cos.δ : N cos.δ'. Si les moteurs sont égaux, on a M : N : : cos.δ' : cos.δ, ou parceque $\delta = \alpha + \gamma$, et $\delta' = \alpha' + \gamma'$ M : N : : cos.$(\alpha' + \gamma')$: cos.$(\alpha + \gamma)$. Il est évident que dans ce cas M tend à aller de A en B, et N de A en H, et, par conséquent, que cos.$(\alpha + \gamma)$ et cos.$(\alpha' + \gamma')$ ont le même signe.

Supposons l'action des moteurs parallele à la hauteur du plan, on aura $\gamma' = 0$, $\gamma = 0$, et M : N : : cos.α' : cos.α; mais nous savons que cos.$\alpha' = \frac{AC}{AH}$, et que cos.$\alpha = \frac{AC}{AB}$, et en substituant ces valeurs, on a M : N : : $\frac{AC}{AH}$: $\frac{AC}{AB}$: : AB : AH. Donc

Conditions de l'équilibre entre ces deux corps.

75. *Lorsque deux corps posés sur deux plans inclinés, adossés, et ayant même hauteur, sont soumis à l'action de deux moteurs égaux, qui agissent parallèlement à la hauteur commune, si on lie ces deux corps par une corde parfaitement flexible et inextensible, parallele aux longueurs des deux plans, et passant à leur sommet sur une poulie parfaitement mobile, les deux corps seront en équilibre, si leurs masses sont proportionnelles à la longueur des plans sur lesquels ils sont posés.*

Ce que c'est que le coin.

76. Si l'on a (*fig.* 28) deux plans inclinés adossés AB, AH, ayant une hauteur commune AC, et que le triangle AHB, composé de leur réunion, soit mobile, cet assemblage prendra le nom de *coin*, les lignes AB, AH, se nommeront *les côtés du coin*, et la ligne HB se nomme *la tête du coin.*

Sa théorie se rapporte à celle du plan incliné.

On voit par-là que la théorie du coin se rapporte à celle du plan incliné, qui, ainsi que celle du levier, est immédiatement

Digitized by Google

déduite de la proposition du parallélogramme des forces, ou n'est que cette proposition présentée sous un certain aspect. Nous traiterons par la suite des machines dans le plus grand détail, et nous les considérerons avec toutes les circonstances physiques qui influent sur leur mouvement et leur usage; mais il falloit auparavant développer les principes fondamentaux qui servent de base à toutes les discussions qu'elles comportent.

Récapitulation des principes généraux de la mécanique.

La doctrine qu'on vient d'exposer renferme le germe de la solution de toutes les questions de mécanique. Nécessité de bien fixer dans l'esprit l'ensemble de tous les principes qui la composent.

77. Toutes les questions qu'on peut proposer en mécanique ont le germe de leur solution dans les principes que nous venons de développer: il n'en faut pas même excepter les problêmes sur les fluides (quoique nous n'en ayons pas encore parlé); car nous verrons par la suite que leur théorie est soumise aux mêmes loix. Il est donc important, avant de pousser plus loin nos recherches, de jeter un coup-d'œil en arriere, de considérer l'ensemble de tous les objets que nous avons examinés en détail: par-là, notre esprit les appercevant sous un point de vue plus rapproché, en sentira mieux l'union et les rapports, et ils se fixeront dans la mémoire d'une maniere plus fructueuse et plus durable.

L'ordre naturel exige qu'on s'occupe d'abord des premiers phénomenes sensibles du mouvement, quels ils sont.

78. Nous avons vu (1 et 2) l'origine des notions qui servent de matériaux à la mécanique, et le rang qu'elles occupent dans le système général de nos connoissances. Cette premiere analyse faite, l'ordre naturel exige qu'on s'occupe d'abord des premiers phénomenes qui frappent nos sens, lorsqu'ils apperçoivent ce que nous appellons *mouvement*. Ces phénomenes sont au nombre de trois, la longueur de l'espace ou de la ligne parcourue par le mobile, la forme de cette ligne qui est droite ou courbe, enfin le temps employé à la parcourir: voilà ce que nous donne la Nature. Mais pour appliquer ces données à nos besoins, il faut créer une science, former un langage, établir des conventions. Faisons d'abord abstraction, pour simplifier, de la forme de l'espace parcouru, ou bien supposons-le rectiligne: il nous restera, pour premiers objets de combinaison, la longueur de cet espace et le temps employé à le parcourir. Ces deux choses, étant de nature différente, ne peuvent se comparer; d'ailleurs cette comparaison nous est inutile, puisque nous avons à considérer l'espace parcouru et le temps, non comme deux phénomenes identiques, mais comme deux phénomenes simultanés. Je m'explique. Lorsque nous avons à comparer plusieurs espaces parcourus, ou à connoître la longueur d'un de ces espaces, le

De l'espace et du temps considérés comme phénomenes simultanés.

Usage qu'on fait de cette considération pour la mesure des espaces.

moyen

moyen le plus simple est de les mesurer avec un pied, une toise, etc. Mais ce moyen n'est pas toujours praticable; alors il nous reste une ressource qui est de connoître le nombre d'unités de temps qui s'est écoulé pendant que chaque longueur a été parcourue : si à chaque unité de temps, pour chaque espace particulier, correspond le même nombre d'unités de longueur, ce dernier nombre étant donné ou déterminé par l'expérience, on aura chaque longueur totale par une simple multiplication; d'un autre côté, si à chaque unité de temps (toujours pour chaque espace particulier) correspond un nombre différent d'unités de longueur, alors il faudra savoir d'avance la loi de la variation des longueurs correspondante à chaque unité de temps, ou la déterminer par expérience, et l'on aura un moyen moins simple, mais tout aussi sûr que le premier, de déterminer chaque longueur totale. Dans l'un et l'autre cas, il faut avoir égard au nombre d'unités d'espace qui sont parcourues pendant qu'il s'écoule un certain nombre d'unités de temps, et voilà ce qu'on entend quand on dit qu'il faut considérer en mécanique l'espace parcouru et le temps comme deux phénomenes simultanés.

Origine des différents genres de mouvements.

79. Le cas où des portions égales d'espace correspondent à des unités ou à des sous-divisions égales quelconques du temps, et celui où cette propriété n'a pas lieu, forment deux genres ou classes de mouvements qu'il est essentiel de distinguer par des signes : nous avons nommé les premiers *mouvements uniformes*, et les seconds *mouvements variés* (3); ceux qui, parmi ces derniers, ont une variation constante, se nomment *uniformément variés*.

Maniere de distinguer les différentes especes de mouvements uniformes; d'où dérive la notion de la *vitesse*.

80. Les différentes sortes de *mouvements uniformes* sont bien moins diversifiées que celles *des mouvements variés :* elles ne laissent cependant pas d'être infinies; car quoiqu'il y ait le même espace parcouru pendant chaque portion égale de temps, cependant, généralement parlant, rien ne désigne quelle est la longueur précise de cet espace, qui peut, dans différentes sortes de mouvements uniformes, varier depuis zéro jusqu'à l'infini. Il est donc nécessaire de marquer par un signe le caractere qui distingue un mouvement uniforme d'un autre; ce caractere est évidemment le nombre d'unités d'espace parcourues pendant un nombre déterminé d'unités de temps. Nous sommes convenus de nommer *vîtesse* le rapport de ces deux nombres considérés comme abstraits; ainsi les *vîtesses* serviront à désigner sans équivoque les différentes sortes de mouvements uniformes.

Digitized by Google

Les notions de *mouvement uniforme, mouvement varié*, et *vîtesse*, dérivent de la simultanéité de l'espace parcouru, et du temps.

81. Nous voyons donc que les notions de *mouvement uniforme, mouvement varié*, et *vîtesse*, dérivent de la considération des phénomenes simultanés de l'espace parcouru et du temps écoulé; cette simultanéité nous est fournie immédiatement par la Nature, et nous avons ensuite créé un langage de convention pour en classer et peindre à notre esprit les différents accidents.

Maniere de distinguer les différentes especes de mouvements variés; cette maniere n'est qu'une imitation de ce qu'on a fait pour les mouvem. uniformes qui servent d'échelle ou de terme de comparaison dans tous les calculs relatifs aux mouvem. variés.

82. Après avoir distingué les mouvements uniformes entre eux, il est nécessaire de faire la même chose pour les mouvements variés, et le moyen employé pour les premiers sera encore celui dont nous nous servirons pour les seconds. Pour cela, il faut chercher une expression générale, mais variable, de la vîtesse, et nous avons vu qu'elle étoit égale, quelle que fût la variation du mouvement, au rapport de l'élément de l'espace parcouru, à l'élément du temps, considéré toujours comme un rapport entre deux nombres abstraits. Cette expression ne differe point de celle de la vîtesse, lorsqu'il s'agit des mouvements uniformes, car si le mouvement devenoit tel à l'instant où l'on considere le rapport $\frac{de}{dt}$, le mobile parcourroit uniformément un espace e dans un temps t, et le rapport $\frac{e}{t}$, qui exprimeroit sa vîtesse, seroit égal au rapport instantané $\frac{de}{dt}$ (12, 15 et 24).

83. L'équation $v = \frac{de}{dt}$ est commune à tous les mouvements variés, et ne sauroit par conséquent caractériser un mouvement varié en particulier afin de le faire distinguer de tout autre (23). Il est donc nécessaire d'avoir encore une équation qui indique la propriété caractéristique de tel ou tel mouvement particulier dont on voudra traiter; pour cela, cette équation doit désigner la loi particuliere suivant laquelle la vîtesse varie, c'est-à-dire renfermer dv, dt, et une fonction variable qui indique leur rapport pour chaque instant; je nomme φ cette fonction, et l'équation est évidemment $\varphi = \frac{dv}{dt}$, dans laquelle φ exprime une vîtesse finie égale à l'élément de vîtesse dv multiplié par $\frac{1}{dt}$, ou par le rapport de l'unité de temps à l'élément du temps; ainsi cette seconde équation n'est encore qu'une imitation de ce qu'on a fait pour distinguer les mouvements uniformes entre eux, en ce qu'elle sert à faire distinguer les variations élémentaires du mouvement varié, par la vîtesse finie qui résulteroit de ces variations répétées un nombre infini de fois. C'est donc le mouvement uniforme qui sert d'échelle ou de terme de comparaison dans tous les calculs relatifs aux mouvements variés.

Digitized by Google

Nous avons nommé la quantité φ *force accélératrice*, et son produit par dt, ou φdt, *force motrice* (40). On voit que lorsque φ sera ou donné *à priori*, ou connu par l'expérience, l'espece particuliere de mouvement varié sera absolument déterminée.

84. La relation que nous avons établie entre les espaces parcourus et les temps, considérés comme nombres abstraits, peut nous servir à réduire toutes les questions sur le mouvement à des questions de géométrie. Pour cela, nous regarderons les espaces et les temps comme les co-ordonnées d'une courbe dont l'équation représentera les propriétés du mouvement varié dont on aura à traiter. C'est la méthode que nous avons suivie depuis l'art. 5 jusqu'à l'art. 24, dont on a vu les avantages à la note de l'art. 26.

Inertie des corps; en quoi elle consiste.

85. Tout ce que nous avons établi jusqu'ici n'est qu'un langage de convention ou une maniere de retracer à l'esprit les différents accidents d'un effet que nous offre la Nature, la simultanéité de l'espace parcouru et du temps écoulé; mais comment le mouvement est-il produit? comment l'expliquer par une loi fondamentale de la Nature? La solution de cette question est aussi impossible que sa recherche est inutile (27); la seule chose qui nous intéresse, est de savoir si la cause du mouvement, quelle qu'elle soit, existe dans le corps mu, ou s'il peut, par sa propre énergie, et sans aucune impulsion étrangere, changer l'état de repos ou de mouvement dans lequel il se trouve. Nous sommes en état d'affirmer (29) que les corps n'ont point un pareil pouvoir, et cette propriété, que nous nommons *inertie*, est un principe fondamental de la mécanique.

Différentes dénominations données à la cause qui peut surmonter l'inertie des corps suivant les circonstances où on la considere.

86. Un corps ne pouvant quitter le mouvement ou le repos que par l'effet d'une cause étrangere, nous nommerons cette cause *force*, *puissance*, *moteur*, ou *résistance*, suivant l'effet qu'elle devra produire et les circonstances auxquelles elle sera appliquée. Elle sera *force* lorsqu'elle procurera ou tendra à procurer au mobile une *vitesse* dès le premier instant de son action; elle sera *puissance* lorsqu'elle fera varier ou tendra à faire varier le mouvement par degrés infiniment petits; la *force* et la *puissance*, considérées d'une maniere générique, et sans désigner l'une ou l'autre en particulier, se nommeront *moteur*: mais lorsque, dans une machine, on aura un système de forces ou de puissances mutuellement en opposition, celles qui produiront ou tendront à produire un certain effet, conserveront le nom de *moteurs*; et celles qui produiront ou tendront à produire l'effet contraire, prendront celui de *résistances*.

Digitized by Google

De la communication du mouvement.

87. Le langage que nous avons établi pour discuter et calculer ce qui a rapport à la simultanéité de l'espace parcouru et du temps, et la découverte de l'*inertie* des corps, nous mettent en état d'observer un effet de plus dans la Nature, qui augmentera le nombre de nos comparaisons, et par conséquent notre langue : cet effet est la *communication du mouvement.* Cette communication est, ou accompagnée de phénomenes apparents qui se réduisent tous à l'*impulsion* ou choc, ou elle est produite par un agent secret que nos sens ne peuvent appercevoir, tel que la pesanteur, la vertu magnétique, etc. Dans ce dernier cas, on n'a d'autre parti à prendre que de découvrir par l'expérience la loi suivant laquelle l'agent secret fait mouvoir le corps, c'est-à-dire la loi de ses effets, et ensuite à leur appliquer la théorie des mouvements variés : mais, dans le cas de l'impulsion ou choc, on peut, connoissant d'avance la direction, la vîtesse, la forme et la dureté des corps choquants, découvrir quel est le mouvement qui en résultera ; ainsi cette maniere de communiquer le mouvement exige de nouvelles recherches et de nouveaux signes.

88. Pour simplifier d'abord le raisonnement, on ne suppose que deux corps choquants parfaitement durs, concentrés en un seul point, ou agissant l'un sur l'autre de la même maniere que s'ils l'étoient, et dirigés dans la même ligne droite.

89. L'expérience journaliere nous fait voir que la masse d'un corps restant la même, lorsque sa vîtesse augmente, il produit plus d'effet, et réciproquement. Ces deux éléments, la *masse* et la *vîtesse*, doivent donc entrer pour beaucoup dans la communication du mouvement. Nous nommons leur produit, dans un même corps, *quantité de mouvement.*

90. Cela posé, nous avons considéré deux corps, dans les circonstances énoncées (88), se mouvant en sens contraire avec des masses et des vîtesses respectivement égales. Dans cette hypothese, il n'y a aucune raison pour que l'un l'emporte sur l'autre : l'état de repos où ils se trouvent après le choc se nomme *équilibre.*

Nous avons supposé ensuite que les masses et les vîtesses étoient inégales, mais réciproquement proportionnelles, en sorte que les quantités de mouvement fussent égales ; ce cas se réduit au précédent, leur identité se découvre par des décompositions assez simples ; ainsi il y a généralement *équilibre* toutes les fois que, les corps se mouvant en sens directement opposés, les masses sont réciproquement proportionnelles aux vîtesses.

Digitized by Google

91. La combinaison de deux principes, de l'*inertie* et de l'*équilibre*, nous a servi à découvrir les loix du mouvement, lorsque, les corps allant dans le même sens ou en sens contraire, il n'y avoit pas égalité de *quantité de mouvement*. Ainsi la théorie de ces loix n'est qu'une répétition des deux principes dont il s'agit, ou plutôt un langage établi pour exprimer les différents cas où ils se trouvent combinés ensemble.

92. Un corps qui tend à en déplacer un autre en repos, ou à détruire son mouvement, s'il en a, le fait ou avec une vîtesse finie, ou avec une vîtesse infiniment petite, qui ne devient finie que par l'action continuée de la puissance qui la produit. Ce qu'on appelle *choc* dans le premier cas, se nomme *pression* dans le second : on a vu (40) les propriétés respectives du choc et de la *pression*.

Deux manieres de mesurer la force suivant les points de vue sous lesquels on considere son effet.

93. La vîtesse d'un corps peut donc être détruite ou subitement, par une *quantité de mouvement* finie, ou graduellement, par la répétition d'un nombre infini de pressions. Dans le premier cas, la quantité de mouvement qui détruit doit être égale à celle qui est détruite, et, dans le second cas, c'est la somme des quantités de mouvements élémentaires ou obstacles infiniment petits, produits à chaque instant par les pressions, qui est égale à la quantité de mouvement détruite.

Si on considere ces obstacles, non quant à leur *somme*, mais quant à leur *nombre*, ce nombre sera proportionnel à une certaine fonction de la vîtesse qui deviendra le quarré de cette vîtesse lorsque les obstacles seront égaux.

On voit par-là que la mesure, ou l'expression de ce qu'on nomme *force*, est susceptible de deux énonciations, suivant qu'on considere son effet comme employé à détruire une certaine *somme* ou un certain *nombre* d'obstacles. C'est faute d'être convenu d'un langage précis qu'on a voulu adopter exclusivement l'une ou l'autre de ces énonciations.

Origine du mouvement en ligne courbe ; principe qui sert à résoudre les questions qui y ont rapport.

94. Tout ce que nous avons établi jusqu'à présent se réduit, en derniere analyse, 1°. à un algorithme ou langage de convention relatif à la simultanéité de l'espace parcouru et du temps, d'où est résultée la notion de la *vîtesse ;* 2°. à la découverte des deux principes de l'*inertie* et de l'*équilibre :* on peut, avec cette doctrine, traiter toutes les questions où l'on considere la longueur de l'espace parcouru et la durée du temps, sans avoir égard à la nature de la ligne parcourue par le mobile, et celles où, cette ligne étant droite, l'action de chacun des moteurs qui la lui font décrire est dirigée dans cette même ligne droite. Mais

Digitized by Google

nous observons à chaque instant, dans la Nature, des phénomenes de mouvement, où les directions des moteurs sont différentes, et il seroit bien utile d'avoir un nouveau principe qui pût rendre raison des effets résultants de cette différence dans la direction des moteurs, c'est-à-dire une propriété qui fût telle que les plus compliqués de ces effets ne fussent que cette même propriété répétée et combinée de différentes manieres.

95. Nous avons vu (42) quelle étoit cette propriété ou principe fondamental qui, avec les deux précédents, de l'*inertie* et de l'*équilibre*, sert de base à toute la mécanique. La propriété du *parallélogramme des forces* nous a conduits à la notion des *forces composantes* et des *forces résultantes* (44), bien entendu qu'on peut substituer au mot *force* les mots *puissance, moteur*, etc. Enfin nous sommes parvenus à établir un langage pour exprimer les différentes circonstances du *mouvement composé*.

96. On doit se rappeller qu'en analysant les premiers phénomenes sensibles du mouvement, nous y avons distingué (3 et 78) 1°. la longueur de l'espace ou de la ligne parcourue; 2°. la forme de cette ligne; 3°. le temps employé à la parcourir. Nous avons fait d'abord abstraction de la seconde de ces considérations, vu que nous n'avions aucun moyen de rendre raison des différentes courbes qu'un corps peut parcourir en se mouvant: la théorie du *mouvement composé* nous fournit à présent ce moyen; et le principe de la décomposition des forces, joint à celui d'inertie, serviront à résoudre (45) tous les problêmes sur le mouvement polygone et curviligne, lorsqu'on aura les données que comporte la nature de ces problêmes.

97. Le mouvement polygone et curviligne peut être déterminé ou *à priori*, par des moteurs de différentes directions qui agissent successivement sur le mobile, ou *à posteriori*, par la rencontre d'obstacles qui modifient le mouvement primitif imprimé par un seul moteur. Dans ce dernier cas, le mouvement primitif étant donné, la nature, la position, et des obstacles, suffisent pour en connoître les modifications. Les articles (46) et suivants contiennent les cas généraux de cette théorie où l'on suppose que les obstacles sont des plans immobiles polygones ou courbes.

Du levier et du plan incliné; ces machines servent de base à toutes celles qu'on peut imaginer.

98. En traitant du mouvement composé, nous avons supposé que les différents moteurs agissoient immédiatement sur le mobile, et en effet tous les cas possibles peuvent se réduire à celui-là. Néanmoins lorsqu'il s'agit d'appliquer la mécanique à nos besoins, on emploie des machines dans lesquelles les moteurs

et les résistances ne sont point appliqués immédiatement au même point. Ces machines sont ou de simple commodité, et n'ajoutent rien à l'énergie du moteur, ou elles réunissent la double propriété d'être commodes et de faire produire au moteur des effets qu'il ne produiroit pas sans elles. La théorie de cette derniere classe de machines peut en général se réduire ultérieurement à celle du *levier;* mais comme, dans certains cas, cette réduction deviendroit compliquée, nous y avons joint le *plan incliné*, et nous avons considéré ces deux machines simples comme la base de toutes celles que l'industrie humaine peut imaginer pour nos besoins.

La théorie de ces deux machines n'exige aucun principe différent des trois généraux établis précédemment.

99. Nous avons vu que le principe général du levier étoit que le moteur et la résistance devoient être en raison réciproque des perpendiculaires menées du point d'appui sur leur direction, et que cette propriété n'étoit que celle du parallélogramme des forces, considérées sous un certain aspect; il en est de même de toutes celles du plan incliné : la théorie de ces deux machines n'exige donc aucun autre principe différent des trois rappellés à l'art. (95), ou plutôt elle n'est que ces mêmes principes énoncés d'une maniere propre à faciliter leur application à la théorie des machines.

Résumé.

100. Cela posé, pour résumer en peu de mots toute la doctrine établie jusqu'à présent, nous considérerons la mécanique ou comme *spéculative*, ou comme *pratique*. La mécanique *spéculative* porte entièrement 1°. sur le langage ou *algorithme* $u = \frac{dc}{dt}$ et $\varphi = \frac{du}{dt}$; 2°. sur les trois principes de l'*inertie*, de l'*équilibre*, et du *parallélogramme des forces*. La mécanique *pratique* n'est autre chose que la *spéculative*, dans laquelle on énonce les principes fondamentaux d'une maniere plus commode pour leur application aux machines, en les considérant dans le *levier* et le *plan incliné*.

Motifs de la méthode suivie dans l'exposition des notions préliminaires de la mécanique.

101. Nous nous sommes efforcés d'expliquer les principes généraux de la mécanique avec la clarté et la méthode dont ils sont susceptibles; nous n'avons rien négligé pour faire voir la génération naturelle des idées sur lesquelles porte cette science, et le rang qu'elle occupe dans le système de notre entendement. Les définitions ou explications des signes n'ont été données jusqu'à l'art. (77) qu'à mesure que l'ordre naturel des matieres en faisoit sentir la nécessité, et dans la récapitulation on a suivi l'ordre le plus propre à classer et fixer les principales dans la mémoire. Nous n'avons point craint de donner un peu

Digitized by Google

d'étendue au développement de ces premieres notions, car c'est de leur parfaite intelligence que dépend tout le succès des études subséquentes. L'espece et le but de cet ouvrage étoit un motif de plus pour s'étendre une premiere fois sur la partie métaphysique, à laquelle la nature des objets que nous aurons à traiter, sur-tout dans la partie descriptive, ne nous permettra plus guere de revenir. Il y a plus : nous emploierons quelquefois, dans la solution et la discussion de certaines questions de mécanique que nous aurons à traiter, des principes généraux reçus des géometres, et dont nous omettrons la démonstration ou la liaison avec ceux que nous avons donnés comme fondements de cette science; tel est un principe général de l'équilibre qu'on verra dans la 1re section contenant la statique. Nous userons de cette liberté, parcequ'un ouvrage comme celui-ci étant plutôt destiné à renfermer des résultats que des théories, nous avons en vue de faciliter et d'abréger tout ce qui ne renferme pas des connoissances pratiques; mais en même temps nous avons voulu fournir, dès l'abord, les moyens de faire une analyse détaillée de ces mêmes questions, plus longue, à la vérité, que celle que nous donnerons, mais déduite des premiers principes démontrés de la science.

Divisions de la mécanique.

102. Les deux états de repos ou d'équilibre et de mouvement fournissent naturellement deux grandes divisions de la mécanique. On a nommé *statique* celle qui traite de l'équilibre, et *dynamique* celle qui traite du mouvement. Néanmoins ces deux expressions s'emploient principalement lorsqu'il s'agit de la mécanique des corps solides. La mécanique des fluides a des sous-divisions analogues aux précédentes; savoir, l'*hydrostatique*, qui traite de l'équilibre des fluides; et l'*hydrodynamique*, qui traite de leur mouvement (*).

D'après cela, nous allons diviser toute cette premiere partie de l'architecture hydraulique en cinq sections : les quatre premieres renfermeront par ordre la statique, la dynamique, l'hydrostatique et l'hydrodynamique; la cinquieme sera particuliérement destinée à traiter des machines considérées dans leur état physique. Nous donnerons à chacune de ces sections autant de briéveté et de clarté qu'il nous sera possible.

(*) L'hydrodynamique se nomme aussi *hydraulique*; nous n'emploierons que la premiere dénomination, afin de conserver l'analogie dans les mots qui désignent la théorie du mouvement des corps solides et fluides.

SECTION PREMIERE.

Digitized by Google

SECTION PREMIERE.

DE LA STATIQUE.

Composition et décomposition d'un nombre quelconque de forces ou de puissances dirigées soit dans un même plan, soit dans des plans quelconques.

Le théorème qui établit les propriétés de l'équilibre entre trois moteurs fournit le moyen de trouver la résultante d'un nombre quelconque de moteurs.

103. La proposition démontrée précédemment (41), applicable à deux forces, deux puissances, ou généralement à deux moteurs agissant dans le même plan, nous fournit le moyen de réduire l'action combinée d'un nombre quelconque de moteurs, agissant pareillement dans un même plan, à l'action unique d'un seul, c'est-à-dire de trouver la quantité et la direction de ce moteur unique qui, agissant sur un point ou sur un corps, feroit le même effet que l'action simultanée de tous ceux auxquels on le substitue.

Application à quatre moteurs agissant dans le même plan.

104. Soient (*fig.* 29) les moteurs P, Q, R, S, dirigés dans un même plan, et auxquels on veuille substituer un moteur unique qui produise le même effet; je commence d'abord par prolonger les directions de P et de Q jusqu'à leur point de rencontre A; et comme leur action peut être supposée exercée à un point quelconque de cette direction, je prends AB pour représenter P, et AD pour représenter Q; ces lignes expriment des vîtesses ou des forces accélératrices, parcequ'on suppose, pour simplifier la notation, que toutes les masses sont égales entre elles ou à l'unité : dans le cas contraire, il n'y a pas d'autre changement à faire aux regles et aux formules qui vont suivre, que celui de multiplier les moteurs par les masses que ces moteurs animent. Je forme le parallélogramme ABCD, et la résultante AC peut être substituée aux deux moteurs ou composantes AB et AD (*). Je prolonge le moteur *résultante* AC jusqu'au point E, où il rencontre la direction du moteur R : prenant EF = AC et EH pour représenter R, formant le parallélogramme EFGH, la diagonale EG tient lieu des moteurs R et EF; et comme EF = AC et représente les moteurs P et Q, la diagonale EG représentera les moteurs P, Q

(*) J'emploierai toujours avec le mot substantif *moteur* les adjectifs fémins *résultante*, *composante*, quoiqu'il paroisse plus grammatical de dire *résultant* et *composant*; mais ces adjectifs *résultante* et *composante* sont censés se rapporter aux mots *force* ou *puissance* dont le terme générique *moteur* tient lieu.

Digitized by Google

et R. Je prolonge EG jusqu'en K, où il rencontre la direction du moteur S dont KN exprimera la valeur; je prends KL = EG, et je forme le parallélogramme KLMN; la diagonale KM sera la résultante de KL et de KN ou de EG et de S; et comme EG représente les trois moteurs P, Q et R, KM représentera les quatre moteurs P, Q, R et S, c'est-à-dire produira lui seul le même effet qu'on auroit pu attendre de l'action simultanée de ces quatre moteurs.

Le même procédé peut s'étendre à un nombre quelconque de moteurs.

105. On voit que le procédé employé pour les quatre moteurs P, Q, R, S, peut s'étendre à un nombre indéfini de moteurs, et qu'ainsi, quel que soit le nombre des composantes, si elles sont toutes dirigées dans le même plan, il est toujours possible de trouver une résultante unique dont l'action peut être substituée à l'action simultanée de toutes les composantes.

Opération inverse par laquelle on substitue un nombre quelconque de moteurs à un moteur unique.

106. En employant le procédé inverse, on peut, étant donné un moteur unique, le décomposer en un nombre quelconque de moteurs particuliers; par exemple, étant donné le moteur KM (*fig.* 29), on peut, en suivant la marche inverse de l'art. 104, lui substituer les moteurs S, R, Q, P; et comme chacun de ceux-ci est également susceptible d'être encore décomposé, on voit qu'on peut, à l'action du moteur KM, substituer celle d'un nombre arbitraire d'autres moteurs particuliers.

Lorsqu'on substitue deux moteurs *composantes* à un moteur unique, la valeur et la direction de l'un d'eux est arbitraire.

107. Puisque, pour substituer deux moteurs à un moteur unique, on n'est assujetti à d'autre condition générale que celle de former avec les lignes qui représentent les premiers, un parallélogramme dont la diagonale soit égale à la ligne qui représente le dernier, on voit qu'on peut prendre pour un des moteurs *composantes* une valeur et une direction arbitraire, à moins qu'elles ne soient déterminées par l'état de la question : sans cela on peut s'assujettir à la rendre égale à une ligne donnée, parallele à une autre ligne, ou à un plan dont la position est déterminée.

On peut, à des moteurs qui sont dans un même plan, substituer des moteurs qui n'y sont pas.

Il y a plus : lorsqu'on a un ou plusieurs moteurs dans le même plan, on peut réduire leur action à celle de plusieurs moteurs qui seroient dans des plans différents. En effet, qu'on fasse passer un plan par la ligne de direction de chacun des moteurs, ces plans faisant des angles quelconques entre eux et avec le plan dans lequel se trouvent les moteurs donnés, il est évident que chacun de ceux-ci peut se décomposer en deux autres moteurs situés dans le plan qu'on a fait passer par sa direction, et ainsi de suite. Donc, etc.

Digitized by Google

La résultante de plusieurs moteurs parallèles est égale à leur somme et parallèle à leur direction.

108. Lorsque les directions des moteurs dont on veut trouver la résultante sont parallèles, cette résultante est égale à la somme de tous les moteurs qu'elle remplace, en prenant positivement ceux qui sont dirigés dans un sens, et négativement ceux qui sont dirigés dans l'autre, et sa direction est aussi parallèle à celle de ces moteurs.

Démonstration de cette propriété lorsque les moteurs sont dans le même plan.

Pour se rendre raison de cette propriété, qu'on se rappelle la proposition démontrée (53), où l'on établit que si deux moteurs P, Q (*fig.* 20), sont les composantes, le moteur R la résultante, et que, d'un point pris sur la direction de l'un d'eux, on abaisse des perpendiculaires sur la direction de chacun des autres, qu'ensuite on joigne par une ligne les points de rencontre des perpendiculaires et des directions, chaque moteur sera représenté par la ligne comprise entre les directions des deux autres. Qu'on suppose maintenant les directions des moteurs parallèles, c'est-à-dire le point commun de rencontre A infiniment loin, la même propriété subsistera toujours; les lignes GF, FE, GE, se confondront dans une seule ligne droite GE (*fig.* 30), perpendiculaire aux trois directions; et comme cette ligne GE, qui représente la résultante R, est égale à la somme des deux autres lignes GF, FE, qui représente chacune des composantes P et Q, le moteur R sera par conséquent égal à la somme des moteurs P et Q.

Ce qu'on dit ici de deux moteurs parallèles s'applique à un nombre quelconque; car soient ces moteurs A, B, C, D, etc. (*fig.* 31); pour en trouver la résultante, je cherche d'abord celle de A et de B, qui est $= \gamma = A + B$, et celle de C et D, qui est $= \epsilon = C + D$; je cherche ensuite celle de γ et ϵ, qui est $= \delta = \gamma + \epsilon = A + B + C + D$, et ainsi d'un plus grand nombre de moteurs.

Elle a encore lieu lorsqu'ils sont dans des plans différents.

109. La même propriété a encore lieu quoique les moteurs parallèles ne soient pas dirigés dans un même plan; car comme on les compose deux à deux, et qu'on peut toujours faire passer un plan par deux lignes parallèles, les résultantes des moteurs primitifs, composés deux à deux, se composeront encore elles-mêmes, deux à deux, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on soit parvenu à une résultante unique.

Méthode pour réduire un nombre quelconque de moteurs agissant dans des plans quelconques à deux moteurs, dont l'un

110. Si on a un nombre quelconque de moteurs qui ne soient ni parallèles ni dans le même plan, on pourra toujours les réduire à deux, dont l'un soit dirigé dans un plan donné, et l'autre perpendiculaire à ce plan.

Pour le prouver, soit AB (*fig.* 32, n° 1), un de ces moteurs; je

Digitized by Google

soit dirigé dans un plan donné et l'autre perpendiculaire au plan.

fais passer par sa direction un plan KILM qui coupe à angle droit un autre plan GHPO, n° 2, sur la ligne KI. La ligne AB, n° 1, projetée sur la section KI, n° 2, y deviendra la ligne AB. Je prolonge la direction AB, n° 1, jusqu'au point *b* de la ligne KI, où elle rencontre le plan GHPO; et comme le moteur AB, n° 1, peut être censé appliqué à un point quelconque de sa direction, je le suppose appliqué en *b*, et je prends *ba* = BA pour le représenter. J'abaisse sur KI la perpendiculaire *ac* qui sera aussi perpendiculaire sur le plan GHPO, n° 2, où elle se projettera sur le point *a c*, et où *cb*, n° 1, sera, sans changer de valeur *cb*, n°. 2. Cela posé, je puis, dans le demi-parallélogramme rectangle *acb*, n° 1, considérer *ac* et *cb* comme les deux composantes de *ab*, et au lieu de tous les moteurs *ab* qui se trouveront dans les différents plans, n° 1, substituer les perpendiculaires *ac* au plan GHPO, n° 2, et les lignes *cb* situées dans ce même plan. Or toutes les perpendiculaires *ac* étant paralleles entre elles, peuvent (109) se composer en une seule, également perpendiculaire au plan n° 2, et toutes les lignes *cb* étant dans ce plan n° 2 peuvent aussi (105) se composer en une seule située dans le même plan. Donc, ainsi qu'on l'a dit plus haut, tous les moteurs AB, situés dans des plans quelconques, peuvent se réduire à deux, l'un situé dans le plan GHPO, et l'autre perpendiculaire à ce plan.

Autre méthode pour les réduire à trois moteurs paralleles à 3 axes perpendiculaires entre eux, et passant par un même point.

111. On peut encore réduire un nombre quelconque de moteurs, situés dans des plans quelconques, à trois moteurs, dont deux seroient paralleles à deux lignes formant un angle droit entre elles, et le troisieme perpendiculaire au plan qui passe par ces deux lignes.

En effet, soit la ligne représentant un de ces moteurs (*fig.* 33, n° 1), projetée en AB sur le plan KILM, c'est-à-dire en terme de projection orthogonale; soit AB l'élévation de cette ligne, et AB, n° 2, son plan. Du point projeté en B, n° 1, j'abaisse une perpendiculaire sur le plan GHPO, n° 2, qui se projetera dans sa vraie longueur en B*h*, n° 1; ensuite, par le point projeté en A, n° 1, je mene sur cette ligne une perpendiculaire qui sera par conséquent parallele au plan GHPO, n°. 2, et dont la projection et la vraie longueur sera = A*h* = AB dans le même plan.

D'après cela les lignes B*h*, n° 1, et A*h*, n° 2, expriment la vraie longueur des côtés du demi-parallélogramme rectangle formé, dans l'espace, sur la ligne représentant un des moteurs, prise comme diagonale; on peut donc à ce moteur substituer les composantes B*h*, n° 1, et A*h*, n° 2. Maintenant A*h*, n° 2,

Digitized by Google

peut se décomposer en deux autres Ai, ih, paralleles à OG et GH, qu'on supposera être à angles droits l'un sur l'autre. Donc, au moteur en question, on peut substituer les composantes Bh, Ai et ih, la premiere perpendiculaire au plan passant par les lignes OG, GH, et les deux autres paralleles à chacune de ces lignes. On peut dire la même chose de tous les autres moteurs situés dans l'espace dont l'élévation seroit projetée sur le plan KILM, et ensuite, par la méthode exposée ci-dessus (108 et 109), réduisant à un seul tous les moteurs paralleles, on parviendra à n'avoir que trois résultantes paralleles aux lignes GO, GH, et à une perpendiculaire au plan GOPH, ou, si l'on veut, paralleles à trois lignes perpendiculaires entre elles, et passant par le même point, puisque rien n'empêche de supposer la perpendiculaire au plan GOPH, menée au point G de rencontre des lignes GO et GH.

Premiere propriété générale de l'équilibre.

112. Ce qu'on vient de démontrer sur la décomposition des moteurs fournit le théorême suivant qui a lieu dans tous les cas possibles d'équilibre, et qui exprime la condition relative au mouvement de translation.

Propriété générale de l'équilibre relativement au mouvem. de translation.

Si des moteurs en nombre quelconque, agissant les uns sur les autres, se font équilibre, et qu'on décompose chacun d'eux en trois autres dont les directions soient paralleles à trois lignes passant par le même point, placé où l'on voudra, et perpendiculaires entre elles, la somme des moteurs paralleles à chacune des lignes sera égale à zéro en prenant positivement ceux qui sont dirigés dans un sens, et négativement ceux qui sont dirigés dans l'autre.

Démonstration de cette propriété.

En effet, lorsqu'il y a équilibre, l'effet produit par l'action simultanée des moteurs est nul; or, cet effet est représenté par celui des trois résultantes (111), et ces résultantes, perpendiculaires entre elles, agissant indépendamment l'une de l'autre, puisque le mouvement progressif que tend à imprimer l'une des trois ne peut en produire aucun parallèlement au plan qui renferme les deux autres, doivent être nulles chacune en particulier; mais elles ne peuvent être nulles que la somme des moteurs paralleles qu'elles représentent ne soit nulle aussi. Donc, etc.

Ce qu'elle devient lorsque tous les moteurs sont dans le même plan.

113. Si tous les moteurs sont dirigés dans un même plan, il suffit de les décomposer chacun en deux autres paralleles à deux lignes prises dans ce plan; et faisant un angle droit entre elles, la troisieme composante sera censée égale à zéro.

Digitized by Google

Lorsqu'il y a un point fixe dans le système.

114. Il peut se faire que dans le système de points ou de corps animés par les moteurs en équilibre, il y en ait quelques uns de fixes ; la propriété générale n'en a pas moins lieu, car on peut rendre ces points ou corps mobiles en les supposant animés par des moteurs qui contre-balancent l'effort qu'ils éprouvoient dans leur état d'immobilité, et rien n'est changé par cette hypothese.

L'inverse de la proposition qui énonce la propriété générale ci-dessus n'est pas toujours vraie.

115. L'inverse du théorême général (112) n'est pas toujours vraie ; ce qu'on peut rendre sensible par un exemple bien simple. Soient les deux moteurs P et Q (*fig.* 34) paralleles égaux, et appliqués dans des directions contraires aux extrémités de la ligne AB, leur somme est bien égale à zéro ; néanmoins il est évident que la ligne AB aura un mouvement de rotation.

Cas où il y auroit un équilibre absolu.

116. Il y auroit un équilibre absolu si, dans chacun des trois grouppes de moteurs paralleles, les résultantes des moteurs négatifs étoient non seulement égales, mais directement opposées aux résultantes des moteurs positifs, c'est-à-dire si, ayant réduit, comme ci-dessus, tous les moteurs dirigés dans des plans quelconques à trois grouppes de moteurs paralleles à trois lignes perpendiculaires entre elles, chaque grouppe pouvoit se réduire à deux moteurs égaux, dirigés en sens contraire dans une même ligne droite. Nous allons traiter ce second cas d'une maniere plus générale.

Des moments.

Équation entre les produits de trois moteurs en équilibre par les perpendiculaires menées sur leurs directions d'un point pris dans leur plan.

117. Soient les deux moteurs AB, AC (*fig.* 37, n° 1), et leur résultante AD ; formons le parallélogramme ABDC, prenons un point M dans le plan de ce parallélogramme, et menons les perpendiculaires MP', MP, MP', sur les directions des lignes AB, AD, AC, prolongées s'il est nécessaire ; nommons AB, P ; AD, R ; AC, Q ; MP, p ; MP', p' ; MP'', p'' ; je dis qu'on a l'équation

$$Rp = Pp' + Qp''.$$

Démonstration de cette égalité.

Pour le démontrer, soit l'angle BAD $= a$, et l'angle DAC $= b$, on aura les analogies AM : rayon (1) : : MP' (p') : sin.MAP' $= \frac{p'}{AM}$ et AM : AP : : rayon (1) : cos.MAP $= \frac{AP}{AM}$; on aura pareillement sin.MAP $= \frac{p}{AM}$; sin.MAP'' $= \frac{p''}{AM}$.

Maintenant l'angle MAP' $=$ MAP $- a$. Donc, en développant par les formules trigonométriques, sin. MAP', ou $\frac{p'}{AM} =$ sin.MAP cos. a — sin. a cos.MAP $= \frac{p}{AM}$ cos. a $- \frac{AP}{AM}$ sin. a. Donc $p' = p$ cos. a — AP sin. a.

Digitized by Google

On aura ensuite l'angle $MAP'' = b + MAP$; ainsi sin.MAP'', ou $\frac{p''}{AM} = \sin.b \cos.MAP + \sin.MAP \cos.b = \frac{AP}{AM} \sin.b + \frac{p}{AM} \cos.b$; d'où l'on tire $p'' = AP \sin.b + p \cos.b$.

Je multiplie l'équation $p' = p \cos.a - AP \sin.a$ par $\sin. b$; l'équation $p'' = AP \sin.b + p \cos.b$ par $\sin. a$, et ajoutant ensemble les deux équations-produits, il vient $p \cos.a \sin.b + p \sin.a \cos.b = p' \sin.b + p'' \sin.a$, ou $p \sin.(a + b) = p' \sin.b + p'' \sin.a$. Mais dans le triangle ABD, on a AD : AB : DB :: sin.ABD : sin.BDA : sin.DAB, ou R : P : Q :: $\sin.(a+b)$: $\sin.b$: $\sin.a$. Donc, au lieu des facteurs de p, p', p'', dans l'équation précédente, je peux substituer R, P, Q, qui sont dans le rapport de ces facteurs, et j'aurai l'équation $Rp = Pp' + Qp''$ qui est celle qu'on se proposoit de démontrer (*).

Cas particuliers de cette égalité; équation qui les réunit tous.

118. Dans le cas de la *fig.* 37, n° 2, le point M tombe dans l'angle BAD, MP', ou p' devient négatif, et l'équation devient $Rp = Qp'' - Pp'$. Dans celui du n° 3, M se trouve dans l'angle DAC, p et p' sont négatifs, et l'équation devient $Rp = Pp' - Qp''$. Pour réunir tous ces différents cas, il faut la mettre sous cette forme $Rp = Pp'' \pm Qp''$, le signe supérieur servant lorsque le point M est hors de l'angle BAD, et le signe inférieur lorsqu'il est dans cet angle.

Ce que c'est que le moment d'un moteur.

119. Les produits Rp, Pp', Qp'', des moteurs, par la distance perpendiculaire de leur direction à un point donné M, s'appellent les *moments* de ces moteurs. Nous verrons bientôt que le mot *moment* n'a pas toujours été pris dans le sens que nous lui donnons ici; mais nous l'adopterons pour nous conformer à l'usage reçu actuellement par presque tous les auteurs qui ont écrit sur la mécanique.

Égalité entre les moments de deux composantes et celui de leur résultante.

120. D'après cette définition et le théorême précédent (117 et 118), on a la proposition générale,

Si trois moteurs sont en équilibre, le moment de la résultante est égal à la somme ou à la différence des moments des composantes, selon que le point auquel on rapporte ces moments se trouve au dehors ou au dedans de l'angle formé par les directions de ces composantes.

Égalité entre la somme des moments d'un nombre quelconque de moteurs dans le même plan, et celui de leur résultante.

121. Nous avons vu (105) qu'un nombre quelconque de moteurs, agissant dans un même plan, peut se réduire à un moteur unique dirigé dans le même plan. Cette réduction peut être censée se faire en les composant d'abord deux à deux, et

(*) Voyez la Mécanique de Marie, art. 53.

Digitized by Google

ainsi successivement, jusqu'à ce qu'on soit parvenu à la résultante finale. Rapportons le moment de tous les moteurs primitifs à un point quelconque pris dans le plan où ils sont dirigés, il est clair, d'après la proposition précédente (120), qu'à chaque composition particuliere de deux moteurs, le moment de la résultante est égal à la somme des moments des deux composantes; il en sera de même en composant ensuite deux à deux ces résultantes partielles, et faisant successivement la même opération jusqu'à ce qu'on soit parvenu à une résultante unique dont le moment sera par conséquent égal à la somme des moments de tous les moteurs primitifs. Donc

122. *Si un nombre quelconque de moteurs agissent dans un même plan, et qu'on rapporte leurs moments à un point pris dans ce plan, la somme de tous ces moments sera égale au moment de la résultante.*

Cas où le moment de la résultante est égal à zéro.

123. Une conséquence évidente de cette proposition est que, *lorsque le point auquel on rapporte les moments sera dans la direction de la résultante, le moment de cette résultante, et par conséquent la somme des moments des moteurs, sera égale à zéro.*

Application des moments au mouvement de rotation.

124. On peut supposer (*fig.* 37) que les perpendiculaires MP, MP′, MP″, sont des verges inflexibles, à l'extrémité desquelles agissent les moteurs R, P, Q, ou, ce qui revient au même, que ces moteurs agissent sur un corps assujetti à tourner autour d'un axe perpendiculaire à leur plan, et passant par le point M de ce plan, à des distances p, p', p'', du point ou axe M. Dans le cas du n° 1, les deux composantes tendent à faire tourner dans le même sens, et dans les cas des n°s 2 et 3, elles tendent à faire tourner en sens contraire.

Cette considération nous fournit le moyen de transformer la proposition énoncée 120 en celle-ci :

Propriété générale déduite de cette application.

125. *Si deux moteurs, dirigés dans le même plan, agissent sur un corps assujetti à tourner autour d'un axe perpendiculaire à ce plan, le moment de leur résultante, rapporté au point de rencontre de la perpendiculaire et du plan, est égal à la somme ou à la différence des moments des deux composantes, suivant qu'elles tendent à faire tourner le corps dans le même sens ou en sens contraire.*

Ce que devient cette propriété pour trois moteurs en équilibre, le moment de la résultante étant = à zéro.

126. Dans le cas de l'art. (123), où l'axe de la rotation se trouveroit sur la direction de la résultante, la différence des moments des deux composantes sera égale à zéro, c'est-à-dire que ces moments seront égaux. On aura donc $p'P = p''Q$,

ou

Digitized by Google

ou $P : Q :: p'' : p'$, c'est-à-dire que les deux moteurs seront en raison inverse de la distance perpendiculaire de leur direction à l'axe de rotation.

Cette propriété renferme le principe général de l'équilibre du levier démontré (53 et 54); il n'y a qu'à changer le mot *axe de rotation* en celui de *point d'appui;* l'identité est manifeste, et nous allons l'énoncer ainsi d'une maniere générale.

Propriété qui résulte du cas précédent, pour l'equilibre de rotation, entre deux moteurs agissant dans le même plan.

127. *Si deux moteurs agissant dans le même plan tendent à faire tourner en sens contraires un corps autour d'un axe perpendiculaire à ce plan et supposé immobile, il y aura équilibre, si les moments des moteurs rapportés au point de rencontre de l'axe et du plan sont égaux* (*).

Application de cette propriété à un nombre quelconque de moteurs agissant dans le même plan.

128. Supposons maintenant que le corps soit sollicité à tourner autour d'un axe par un nombre quelconque de moteurs agissant dans un plan perpendiculaire à cet axe; on peut réduire tous ces moteurs à deux, dont le premier représentera tous ceux qui tendent à faire tourner dans un sens, et le second tous ceux qui tendent à faire tourner dans l'autre. Si les moments de ces deux derniers moteurs sont égaux, le corps sera, par ce qui vient d'être dit, en équilibre autour de l'axe; mais (122) chacun de ces moments est égal à la somme de tous ceux que le moteur représente. Donc

129. *Si un nombre quelconque de moteurs, agissant dans un même plan, tendent à faire tourner un corps autour d'un axe perpendiculaire à ce plan, et qu'on rapporte les moments au point de rencontre du plan et de l'axe, il y aura équilibre autour de cet axe si la somme des moments des moteurs est égale à zéro, en prenant positivement ceux qui tendent à faire tourner dans un sens, et négativement ceux qui tendent à faire tourner dans l'autre.*

Elle a encore lieu lorsque les moteurs agissent dans des plans parallèles.

130. Si les moteurs n'étoient pas dans le même plan, mais dans des plans paralleles entre eux, et perpendiculaires à l'axe de rotation, la même propriété subsisteroit toujours; car avec la moindre attention on voit que les moteurs agissent pour faire tourner autour de l'axe de la même maniere que s'ils se trouvoient dans le même plan. Seulement, au lieu de rapporter les moments à un point unique, il faut les rapporter à l'axe de rotation par une perpendiculaire commune à la direction du moteur et à l'axe. D'après cela nous énoncerons ainsi plus généralement la proposition précédente.

131. *Si un nombre quelconque de moteurs, agissant dans des*

(*) Cette proposition n'est ici déduite du levier que pour ne pas répéter inutilement la suite de raisonnements par lesquels on la déduiroit du *parallélogramme des forces.*

Digitized by Google

plans paralleles entre eux, tendent à faire tourner un corps autour d'un axe perpendiculaire à ces plans, auxquels on rapporte les moments, il y aura équilibre autour de cet axe lorsque la somme des moments sera égale à zéro.

Seconde propriété générale de l'équilibre.

Application de la théorie des moments à l'équilibre de rotation.

132. Nous avons vu (112) une premiere propriété de l'équilibre qui est relative au mouvement progressif parallèlement à trois axes perpendiculaires entre eux. La théorie des moments va nous fournir les conditions de l'équilibre considéré relativement au mouvement de rotation autour des mêmes axes.

Soient (*fig.* 38) les trois axes AB, AC, AF, perpendiculaires entre eux et passant par le point A. Le plan ACEF, n°. 2, étant perpendiculaire au plan ABDC, n°. 1, sur l'axe d'intersection AC, et le plan ABGF, n°. 3, perpendiculaire aux deux premiers sur les axes d'intersection AB et AF.

Réduisons tous les moteurs, appliqués à un corps considéré dans l'espace, à six; savoir, deux ab, $a'b'$, paralleles à l'axe AB; deux cd, $c'd'$, paralleles à l'axe AC, et deux ef, $e'f'$, paralleles à l'axe AF, les lignes qui représentent ces moteurs étant projettées de même grandeur sur les plans n°s 1, 2 et 3.

Nous savons par ce qui précede qu'on doit avoir, dans le cas de l'équilibre, $ab + a'b' = 0$; $cd + c'd' = 0$; $ef + e'f' = 0$, ou que chaque moteur doit être égal à celui parallele au même axe et dirigé en sens contraire.

Soient a, b', n°. 2, les points où ce plan est rencontré par les directions des moteurs ab, $a'b'$, n°. 1; c', d, n°. 3, les points où ce plan est rencontré par les directions des moteurs cd, $c'd'$, n°. 2; et e', f, n° 1, les points où ce plan est rencontré par les directions des moteurs ef, $e'f'$, n° 3. Menons les perpendiculaires $e'e''$, ff'', ei, fi', n° 1; aa'', $b'b''$, ag, $b'g'$, n°. 2; $c'c''$, dd'', $c'h$, dh', n°. 3.

Les moteurs ab, $a'b'$, ef, $e'f'$, sont dans des plans perpendiculaires à l'axe AC, et les distances perpendiculaires de leurs directions à cet axe sont les lignes ag, $b'g'$, ff'', $e'e''$; de plus, ces moteurs sont les seuls qui puissent imprimer un mouvement de rotation autour de l'axe AC, puisque les deux autres cd, $c'd'$, lui étant paralleles, ne sauroient produire un pareil effet.

Équations qui établissent cet équilibre.

133. Il faut donc, pour établir la condition de l'équilibre de rotation autour de l'axe AC, égaler à zéro la somme des mo-

ments qui tendent à faire tourner autour de cet axe ce qui donnera l'équation

$$ab \times ag + a'b' \times b'g' + ef \times ff'' + e'f' \times e'e'' = 0.$$

Le même raisonnement donnera pour l'équilibre de rotation autour de l'axe AB,

$$cd \times dd'' + c'd' \times c'c'' + ef \times fi' + e'f' \times e'i = 0;$$

et pour l'équilibre de rotation autour de l'axe AF,

$$ab \times aa'' + a'b' \times b'b'' + cd \times dh' + c'd' \times c'h = 0.$$

On donnera dans chaque cas particulier les signes convenables.

Récapitulation des conditions de l'équilibre entre un nombre quelconque de moteurs dirigés dans des plans quelconques.

134. Ayant réduit ces moteurs à six, paralleles, deux à deux, à trois axes perpendiculaires entre eux, et passant par le même point que nous nommerons axes des x, des y et des z. Soit P et P' les deux moteurs paralleles à l'axe des x; Pz, P'z', leurs moments rapportés à l'axe des y, Py, P'y', leurs moments par rapport à l'axe des z.

Soient Q et Q' les moteurs paralleles à l'axe des y; Qz'', Q'z''', leurs moments rapportés à l'axe des x; Qx, Q'x', leurs moments rapportés à l'axe des z.

Soient enfin R, R', les moteurs paralleles à l'axe des z; Ry'', R'y''', leurs moments rapportés à l'axe des x, et Rx'', R'x''', leurs moments rapportés à l'axe des y.

On aura pour les conditions de l'équilibre, relativement au mouvement progressif,

$$P + P' = 0;\ Q + Q' = 0;\ R + R' = 0;$$

et pour les conditions de l'équilibre, relativement au mouvement de translation,

$$\begin{aligned}
&\text{Autour de l'axe des } z,\ Py + P'y' + Qx + Q'x' = 0,\\
&\text{Autour de l'axe des } y,\ Pz + P'z' + Rx'' + R'x''' = 0,\\
&\text{Autour de l'axe des } x,\ Ry'' + R'y''' + Qz'' + Q'z''' = 0;
\end{aligned}$$

ou, en faisant les substitutions qui résultent des équations pour le mouvement progressif,

$$\begin{aligned}
P(y + y') + Q(x + x') &= 0,\\
P(z + z') + R(x'' + x''') &= 0,\\
R(y'' + y''') + Q(z'' + z''') &= 0.
\end{aligned}$$

Digitized by Google

Il est bien entendu que quoique tous les termes de ces équations aient le signe positif, néanmoins ils sont censés affectés des signes qui conviennent tant à la direction des moteurs qu'au sens dans lequel ils tendent à faire tourner.

135. Les principes qu'on vient de poser renferment le fondement de toute la statique; et comme plusieurs auteurs très suivis les ont appliqués à toutes les questions particulieres d'équilibre, il étoit utile de connoître ces principes. Mais leur application entraîne souvent dans bien des longueurs. Pour éviter cet inconvénient, et en même temps multiplier les ressources, nous allons exposer un autre principe qui réunit la briéveté à la facilité dans la solution des problêmes, et dont nous nous servirons pour exprimer analytiquement les conditions de l'équilibre d'une maniere plus directe que celle qu'on vient de voir. Ce principe est celui des *vîtesses virtuelles.*

Des vîtesses virtuelles.

Ce que c'est que les vîtesses virtuelles considérées quant au mouvement de rotation.

136. Pour se faire une idée de ce qu'on entend par *vîtesses virtuelles,* imaginons d'abord deux moteurs P et Q en équilibre; qu'ils soient, par exemple, appliqués aux extrémités d'un levier CB (*fig.* 31, n° 1). Supposons à présent que, par une cause quelconque, l'équilibre entre ces moteurs P et Q est rompu, le point A étant supposé immobile, le levier sera sollicité à tourner autour de ce point, et passera, dans le premier instant de la position CAB, à la position infiniment voisine *c*A*b*. Ce mouvement fera décrire aux points B et C les petits arcs B*b* et *c*C, dont la longueur est proportionnelle aux distances AB, AC, et qui représenteront dans ce cas la *vîtesse virtuelle* des points ou des corps B et C sollicités par les moteurs P et Q.

Au lieu de deux moteurs en équilibre autour du point A, qu'on en suppose trois P, Q, R, numéro 2, et que l'équilibre vienne à être rompu, les arcs infiniment petits D*d*, B*b*, C*c*, que parcourront les points D, B, C, exprimeront leurs vîtesses virtuelles, et il en sera de même d'un nombre quelconque de points ou de corps en équilibre autour d'un point fixe.

Ce que c'est que ces vîtesses virtuelles considérées quant au mouvement de translation.

137. Si les corps en équilibre ne sont point assujettis à tourner autour d'un point fixe, mais sont susceptibles de prendre différents mouvements, en supposant néanmoins qu'ils restent toujours liés les uns aux autres, leurs vîtesses virtuelles seront représentées par les petites portions de ligne droite ou de courbes quelconque qu'ils décriront dans le premier instant où l'équilibre sera rompu. Par exemple, deux corps EFBA, ABCD, n° 3,

Digitized by Google

ayant des vîtesses perpendiculaires à la ligne de jonction AB, dirigées en sens contraires, et réciproquement proportionnelles à leurs masses, seront en équilibre (37). Qu'on suppose un mouvement imprimé au corps ABCD, de maniere à faire parcourir, dans le premier instant, à chacun des points qui le composent, un espace égal en quantité, et parallele en direction à la ligne $\gamma\delta$, cette ligne représentera sa vîtesse virtuelle relativement au mouvement dont on vient de parler. Or, pendant que le corps ABCD parcourra la ligne $\gamma\delta$, il agira sur le corps EFBA perpendiculairement à la ligne de jonction AB, et puisqu'on ne suppose ni frottement ni adhésion sur cette ligne, il fera parcourir à chacun des points de ce corps un espace $\gamma\varphi$, perpendiculaire à la direction de AB, de telle sorte que lorsque le corps ABCD aura pris la position *abcd*, le corps EFBA aura pris celle $efb'a'$, et la ligne $\gamma\varphi$, qu'il parcourt pendant que l'autre parcourt la ligne $\gamma\delta$, exprimera sa vîtesse virtuelle.

Considérations sur la maniere dont on doit envisager les vîtesses virtuelles.

138. J'ajouterai que la notion de vîtesse virtuelle suppose qu'après la rupture de l'équilibre, au moins dans le premier instant, les corps restent toujours liés entre eux, de maniere que le mouvement donné à l'un d'eux détermine le mouvement des autres; ce qui n'auroit pas lieu s'ils étoient simplement et isolément abandonnés aux moteurs qui les animent; par exemple, n° 3, le corps ABCD étant sollicité à parcourir $\delta\gamma$ dans le sens $\delta\gamma$, détermine par-là le corps EBAE à parcourir $\gamma\varphi$; mais si, au contraire, il étoit sollicité à aller dans le sens $\gamma\delta$, de maniere que sa vîtesse perpendiculaire à AB fût plus grande que celle que le corps EFBA peut avoir dans ce sens, alors les deux corps se sépareroient, ne seroient plus liés, et les espaces parcourus dans le premier instant ne représenteroient plus les vîtesses virtuelles.

Après s'être fait ainsi une idée nette de ce qu'on doit entendre par *vîtesse virtuelle*, on concevra aisément que ces sortes de vîtesses peuvent différer totalement, tant en quantité qu'en direction, des vîtesses réelles que comportent les moteurs en équilibre. Les directions, numéros 1 et 2, sont assujetties à être perpendiculaires aux lignes AB, AC, AD, et le cas d'équilibre peut résulter de moteurs qui n'aient nullement de pareilles directions : la chose est de nécessité pour le n° 3. Quant à la quantité de la *vîtesse virtuelle*, sa valeur absolue est tout-à-fait indéterminée, et dépend de la nature de la cause qui a rompu l'équilibre, cause dont la connoissance est inutile relativement à l'objet que nous avons en vue. La seule chose qu'il nous im-

Digitized by Google

porte de connoître est le rapport des *vîtesses virtuelles*, et ce rapport, indépendant de leur valeur absolue, peut toujours se déduire de la maniere dont les corps agissent les uns sur les autres. Par exemple, numéros 1 et 2, quoiqu'on ignore les vîtesses réelles de rotation des points B, C, D, autour du point A, on sait néanmoins que ces vîtesses doivent être proportionnelles aux lignes AB, AD, AC. Si, d'un autre côté, numéro 3, on mene $\delta\varphi'$ et $\varphi'\gamma$ perpendiculaires l'un à l'autre, on verra, avec la moindre réflexion, que le rapport de $\gamma\delta$ à $\gamma\varphi$ est égal à celui de $\gamma\delta$ à $\gamma\varphi'$, lequel se calcule aisément en connoissant l'inclinaison de $\gamma\delta$ par rapport à AB.

Principe général des vîtesses virtuelles.

139. Tout ceci bien compris, voici une propriété qui sert de fondement à la solution de toutes les questions qu'on peut proposer sur *l'équilibre*.

Si plusieurs points ou corps, soumis à des moteurs quelconques, agissent les uns sur les autres de maniere qu'il y ait équilibre, il en doit résulter la propriété suivante : Supposez qu'une cause quelconque vienne à rompre cet équilibre, chacun des corps ou points parcourra un petit espace qui représentera sa vîtesse virtuelle (136 et 137); *décomposez cette vîtesse en deux autres, dont l'une soit parallele et l'autre perpendiculaire à la direction du moteur qui agit sur le point ou corps dont il s'agit; multipliez la premiere composante, par la vîtesse, ou par la force motrice que comporte le moteur, suivant sa nature, et par la masse, en prenant cette composante positivement ou négativement, suivant qu'elle agira dans le même sens ou dans un sens contraire à celui de la force ou puissance : la somme de tous les produits faits de cette sorte doit être égale à zéro.*

Il n'en existe pas de démonstration directe; généralité de ce principe.

140. Il n'existe pas de démonstration générale et directe de ce principe; mais sa vérité n'en est pas moins certaine, puisqu'il donne des résultats absolument conformes à tous ceux obtenus d'ailleurs. On peut voir dans la *Nouvelle Mécanique* de M. de la Grange l'histoire de sa découverte, et les belles applications qu'il en fait aux questions de l'équilibre. « Je crois pou-« voir avancer, dit ce sublime géometre, que tous les principes « généraux qu'on pourroit encore découvrir dans la science de « l'équilibre ne seront que le même principe des vîtesses vir-« tuelles, envisagé différemment, et dont ils ne différeront que « dans l'expression ».

Différentes applications de ce principe.

141. Les différentes questions d'équilibre que nous avons résolues dans les notions préliminaires de ce Traité peuvent d'avance

Digitized by Google

nous fournir des occasions d'appliquer le principe des vîtesses virtuelles et d'en sentir la vérité. D'abord nommons P (*fig.* 31, n° 3) le corps ABCD, V sa vîtesse perpendiculaire à AB, et dirigée vers cette ligne ; nommons Q le corps EFBA, et U sa vîtesse, dirigée en sens contraire de V, et cherchons la relation entre V et U pour qu'il y ait équilibre. Il faut, pour cela (139), décomposer $\gamma\delta$ en deux vîtesses $\gamma\varphi'$ et $\varphi'\delta$ parallele et perpendiculaire à V. Quant à $\gamma\varphi$, la décomposition est inutile, puisqu'étant lui-même parallele à U, la seconde composante est zéro; or $\gamma\varphi$ étant le chemin que les deux corps ont fait parallèlement à la direction des vîtesses V et U, et par conséquent égal à $\gamma\varphi'$, nommant cette quantité ω, on a $\gamma\varphi = \gamma\varphi' = \omega$; et par le principe général, faisant attention que $\gamma\varphi$ doit être pris négativement, parcequ'il est en sens contraire de U, on a $\gamma\varphi' \times VP - \gamma\varphi \times UQ = 0$, ou $\omega VP = \omega UQ$, ou $VP = UQ$; ce que nous avons déja démontré (37), mais d'une maniere bien plus longue.

Au choc des corps durs.

142. Observons que rien ne nécessite de supposer, ainsi qu'on vient de le faire pour énoncer la chose plus généralement, la vîtesse virtuelle $\gamma\delta$ oblique à la direction des vîtesses qu'auroient les corps s'ils étoient libres ; on peut la supposer dans la direction même de ces vîtesses, la démonstration sera plus simple, et le résultat plus général, en ce que les corps ne seront pas nécessités à se toucher par un plan.

Au levier.

143. Cherchons maintenant les conditions de l'équilibre dans le levier, et prenons le cas de la *fig.* 32 qui renferme tous ceux que nous avons traités jusqu'à présent. Prolongeons les directions PB, QC, des forces ou des puissances P et Q, jusqu'à des points D et E, où l'on puisse mener des perpendiculaires AD, AE, sur ces directions. Supposons ensuite une rupture d'équilibre qui fasse tourner le levier autour du point A, les points B et C décriront dans le premier instant les petits arcs dB, Cf, qui auront pour rayons les distances directes AB, AC. Menons les perpendiculaires de, fg, ces perpendiculaires, et les petites lignes gC, eB, seront les composantes des vîtesses virtuelles dB, fC; eB devant être pris négativement. On aura donc (139) $gC \times Q - eB \times P = 0$, ou $\frac{P}{Q} = \frac{gC}{eB}$; mais, à cause des triangles semblables, deB, ADB, et gfC, EAC, on a les égalités de rapports $\frac{dB}{AB} = \frac{eB}{AD}$ et $\frac{Cf}{AC} = \frac{Cg}{AE}$; et les arcs dB et Cf étant décrits avec les rayons AB et AC, on a $\frac{dB}{AB} = \frac{Cf}{AC}$. Donc $\frac{Cg}{AE} = \frac{eB}{AD}$, ou $\frac{Cg}{eB} = \frac{AE}{AD} = \frac{P}{Q}$; d'où P : Q :: AE : AD; ainsi les moteurs P et Q

Digitized by Google

doivent être réciproquement proportionnels aux perpendiculaires menées du point d'appui sur leurs directions; ce qui est conforme à ce qu'on a vu précédemment (54).

Au plan incliné.

144. Les conditions de l'équilibre, pour deux corps placés sur deux plans inclinés adossés, énoncées art. 75 (*fig.* 26), sont bien aisées à déduire du principe des vîtesses virtuelles. Supposons que le corps N descende un peu le long de AH, la corde qui unit les deux corps étant inextensible, le corps M parcourra la même longueur en montant le long de BA. Les petites lignes Di, di, étant les espaces ainsi parcourus, seront les vîtesses virtuelles égales, dont les composantes Dn, ni; dm, mi, seront paralleles à la direction du moteur ou à la hauteur commune AC, et aux bases CB, CH, la composante Dn sera négative. On aura, par le principe général, $N \times dm - M \times Dn = 0$, ou $\frac{M}{N} = \frac{dm}{Dn}$; mais les triangles semblables donnent $\frac{Di}{dn} = \frac{AB}{AC}$, et $\frac{di}{dm} = \frac{AH}{AC}$, observant que $Di = di$, et éliminant cette quantité, ainsi que AC, par la simple multiplication des deux équations, il en résulte $\frac{AB}{AH} = \frac{dm}{Dn} = \frac{M}{N}$, ou M : N : : AB : AH; ce qui est la propriété énoncée à l'article cité.

Formules générales d'équilibre, déduites du principe des vîtesses virtuelles.

Un corps peut toujours, pendant un instant, être supposé se mouvant, ou tendant à se mouvoir autour d'un centre.

145. Quel que soit le mouvement imprimé à un corps, en considérant ce mouvement pendant un instant dt, on peut toujours regarder généralement ce corps ou une de ses molécules comme se mouvant ou tendant à se mouvoir autour d'un point qui seroit à une distance finie ou infinie. Le premier cas a lieu dans le mouvement curviligne quelconque, où chaque élément de courbe que le corps parcourt pendant chaque instant dt peut être considéré comme un arc de cercle, et le second cas a lieu dans le mouvement rectiligne ou mouvement simple de translation.

146. Cette maniere d'envisager le mouvement est simple et sans exception; néanmoins si, lorsqu'on a des questions particulieres d'équilibre ou de mouvement à résoudre, on vouloit toujours les traiter sous un point de vue aussi général, on tomberoit dans des difficultés qui entraîneroient souvent bien des longueurs. Par exemple, si un corps placé sur un plan se meut dans la circonférence d'un cercle tracé sur ce plan, qu'on suppose avoir lui-même un mouvement rectiligne ou de translation, la combinaison de ces deux mouvements de rotation et de translation

Digitized by Google

translation fera parcourir au corps, dans l'espace absolu, une courbe dont la considération compliqueroit la recherche soit des loix du mouvement, soit des conditions de l'équilibre. Il vaut mieux traiter à part chacun de ces mouvements, et les regarder comme indépendants l'un de l'autre ; c'est ce que nous allons faire dans la recherche des formules générales d'équilibre ; nous donnerons d'abord celles qui ont rapport au mouvement de translation, et ensuite celles qui ont rapport au mouvement de rotation.

Application du principe des vitesses virtuelles à la recherche des conditions de l'équilibre pour le mouvement de translation.

147. Soit XY (*fig.* 35, n° 1), la direction d'un moteur agissant dans le plan GHKL, projetée en *plan* sur ABCD, n° 2, et en *élévation* sur ACEF, n° 3; on voit par cet exposé que les plans n°s 1 et 3, sont perpendiculaires sur le plan n° 2; que la ligne AC est l'intersection des plans n°s 2 et 3, et que AB étant supposé perpendiculaire à AC, AF est perpendiculaire à l'une et à l'autre, ou que BA, AC et AF, sont trois axes perpendiculaires entre eux.

Je suppose l'action du moteur appliquée au point ou au corps a, et que dans le premier instant de la rupture d'équilibre le système dont a fait partie, en vertu de son mouvement de translation parallele à l'axe AB, parcoure un espace élémentaire égal à ab, qui sera la vîtesse virtuelle de a; pour l'estimer dans le sens de la direction XY, j'abaisse du point b la perpendiculaire bc, et j'ai la proportion, *rayon* : cos.bac : : ab : ac, bien entendu que l'angle bac n'est point celui qu'on voit sur les projections n°s 1, 2 et 3, mais celui qui existe dans l'espace. Je fais $bac = \epsilon$; $ab = \omega$, et j'ai $ac = \omega \cos.\epsilon$; nommant M le moteur qui agit en a, m la masse du corps ou de la molécule qui y est placée, le produit indiqué par la regle générale (139) sera $Mm\omega \cos.\epsilon$.

148. Soient M′, M″, M‴, etc., les autres moteurs du système en équilibre, m', m'', m''', etc., les masses qu'ils animent, ϵ', ϵ'', ϵ''', etc. les angles que forment leurs directions avec des paralleles à l'axe AB, ω étant la vîtesse virtuelle commune, on aura pour les conditions de l'équilibre, relativement au mouvement de translation parallele à l'axe AB, $Mm\omega \cos.\epsilon + M'm'\omega \cos.\epsilon' + M''m''\omega \cos.\epsilon'' + \text{etc.} = 0$, ou, divisant par ω, $Mm \cos.\epsilon + M'm' \cos.\epsilon' + M''m'' \cos.\epsilon'' + \text{etc.} = 0$.

149. Si on appelle γ l'angle que la direction XY fait avec les paralleles à l'axe AC, et δ celui que cette même direction fait avec les paralleles à l'axe AF, on trouvera deux équations absolument semblables à celle qu'on vient de poser, pour exprimer les conditions de l'équilibre relativement aux mouvements de translation paralleles aux axes AC et AF.

Équations qui expriment ces conditions.

150. On aura donc, pour exprimer les conditions de l'équilibre considéré relativement au mouvement de translation parallele à trois axes perpendiculaires entre eux, les trois équations suivantes,

$$\begin{aligned} Mm\cos.\mathcal{C} + M'm'\cos.\mathcal{C}' + M''m''\cos.\mathcal{C}'' + \text{etc.} &= 0,\\ Mm\cos.\gamma + M'm'\cos.\gamma' + M''m''\cos.\gamma'' + \text{etc.} &= 0,\\ Mm\cos.\delta + M'm'\cos.\delta' + M''m''\cos.\delta'' + \text{etc.} &= 0. \end{aligned}$$

Application du principe des vîtesses virtuelles à la recherche des conditions de l'équilibre pour le mouvement de rotation.

151. Cherchons maintenant les conditions de l'équilibre pour le mouvement de rotation autour des axes AB, AC, AF (*fig.* 36), le moteur étant dirigé suivant XY dans le plan n° 1, projetée en *plan* dans celui n° 2, et en élévation dans celui n° 3, le tout comme dans la *fig.* 35.

Supposons maintenant que tout le système a un mouvement de rotation autour de l'axe AF ; imaginons dans l'espace une ligne perpendiculaire à cet axe et à la direction XY du moteur dont il s'agit, qu'elle rencontre en *a*, cette ligne sera aussi perpendiculaire au plan GLKH, n° 1, dans lequel agit ce moteur, et sa projection A*a*, n° 2, sera perpendiculaire à la projection XY même n° 2. L'effort représenté par le produit M*m*, du moteur par la masse qu'il anime, pouvant être censé appliqué à un point quelconque de la direction XY, je le suppose exercé au point *a*, où la perpendiculaire, menée de l'axe AF, rencontre la direction XY dans l'espace. Cela posé, lorsque le système tournera autour de l'axe AF, le point *a* décrira dans le premier instant un arc infiniment petit *ab*, tangent à la projection XY, n° 2, et au plan n° 1, et ayant A*a* pour rayon. Cet arc *ab* représentera la vîtesse virtuelle de *a*, son extrémité *b* sera distante de la projection XY, n° 2, et par conséquent du plan n° 1, de la longueur de la perpendiculaire *bo*; mais l'arc *ab* étant infiniment petit du premier ordre, la distance *bo*, le sera du second ordre ; ainsi les points *b* et *o* seront censés n'être qu'un seul et même point, et l'arc *ab* pourra être censé confondu avec la ligne XY, ou avec le plan n° 1, et ne pas différer de sa projection *ab* dans le même plan, qui renfermera par conséquent la direction XY du moteur et la vîtesse virtuelle de rotation *ab*, du point ou du corps *a*. Menons la perpendiculaire *bc* sur XY, *ac* sera la vîtesse virtuelle *ab* estimée dans la direction XY ; menons encore *ad* perpendiculaire sur *ab*, ou parallele à l'axe AF, l'angle *cad* sera l'angle appellé δ, art. (149), et de plus, complément de l'angle *cab* ; enfin le triangle *cab* fournira

la proportion *rayon* : cos.*cab* :: *ab* : *ac*, ou comme *cad* = complément *cab*, rayon : sin.*cad* :: *ab* : *ac*.

Nommons ω l'arc de même valeur angulaire que *ab*, qui a pour rayon l'unité, et faisons A*a* = *p*, on aura arc *ab* = ωp; substituant cette valeur dans la proportion précédente, on aura *ac* = ωp sin. δ, vîtesse virtuelle estimée dans la direction du moteur.

152. Cette expression trouvée, on agira comme on a fait pour le mouvement de translation, et on trouvera pour exprimer les conditions de l'équilibre, considéré relativement au mouvement de rotation autour de l'axe AF, Équations qui expriment ces conditions.

$$Mmp \sin.\delta + M'm'p' \sin.\delta' + M''m''p'' \sin.\delta'' + \text{etc.} = 0.$$

Pour le mouvement de rotation autour de l'axe AC, en nommant *q* la perpendiculaire commune à cet axe et à la direction du moteur,

$$Mmq \sin.\gamma + M'm'q' \sin.\gamma' + M''m''q'' \sin.\gamma'' + \text{etc.} = 0.$$

Et enfin pour l'axe AB, en nommant *r* ce que nous avons nommé *p* et *q* dans les deux équations précédentes,

$$Mmr \sin.\varepsilon + M'm'r' \sin.\varepsilon' + M''m''r'' \sin.\varepsilon'' + \text{etc.} = 0.$$

153. Lorsqu'un système de moteurs appliqué à un point ou à un corps aura, relativement à trois axes donnés, les propriétés énoncées par les formules (150) relatives au mouvement de translation, il les aura également relativement à un axe quelconque pris dans l'espace, puisque le mouvement imprimé parallèlement à cet axe peut toujours se décomposer en trois autres paralleles aux trois axes donnés, et que si ces trois derniers sont nuls, le premier le sera aussi. L'équilibre de translation, par rapport à trois axes perpendiculaires entre eux, a lieu par rapport à un axe quelconque.

154. Pareillement lorsqu'il y aura équilibre de rotation autour de trois axes perpendiculaires entre eux et passant par un même point, le même équilibre subsistera relativement à un axe quelconque passant par le point de rencontre des trois premiers. Cette vérité a son principe dans une propriété analogue à celle du mouvement de translation, qui est qu'un mouvement de rotation autour d'un axe quelconque peut toujours se décomposer en trois autres mouvements de rotation autour de trois axes perpendiculaires entre eux et se rencontrant en un point commun du premier. Il en est de même de l'équilibre de rotation, par rapport à un axe quelconque, passant par le point de rencontre des trois premiers; mais cette propriété n'est point une conséquence immédiate de la premiere.

Digitized by Google

Malgré l'analogie, cette propriété n'est point une conséquence de la premiere ; M. de la Grange en donne une belle démonstration dans sa mécanique ; nous allons l'exposer ici avec les développements et les explications qui peuvent en faciliter l'intelligence aux personnes un peu exercées à la géométrie et à l'analyse.

Démonstration de cette propriété qui fournit une méthode pour décomposer les mouvements de rotation d'une maniere analogue à celle employée pour les mouvements de translation.

Soient (*fig.* 39) les trois plans XAY, n° 1 ; ZAY, n° 2 ; ZAX, n° 3, perpendiculaires entre eux, et se coupant deux à deux sur les axes AY, n°s 1 et 2 ; AZ, n°s 2 et 3, et AX, n°s 3 et 1, de maniere que A soit le point commun de rencontre des trois axes et des trois plans. Imaginons un point dans l'espace, projeté en M, M′, M″, sur chacun des trois plans, et rapporté à trois coordonnées AP, n° 1, qui est égale à M″P′, n° 3 ; PM, n° 1, qui est égale à AN, n° 2 ; et NM′, n° 2, qui est égal à AP′, n° 3. Faisons AP $= x$; PM $= y$; NM′ $= z$; *angle* MAX, n° 1 $= \varphi$; *angle* M′AY, n° 2 $= \Psi$; *angle* M″AZ, n° 3 $= \omega$.

Que le point projeté en M, M′, M″, soit maintenant, successivement, supposé tourner autour de chacun des trois axes $\left\{\begin{matrix}\text{AZ, n° 3;}\\ \text{AX, n° 1;}\\ \text{AY, n° 2;}\end{matrix}\right.$, dont il est distant de la longueur $\left\{\begin{matrix}\text{AM, n° 1;}\\ \text{AM′, n° 2;}\\ \text{AM″, n° 3;}\end{matrix}\right.$, et décrire un arc infiniment petit $\left\{\begin{matrix}\text{M}m\text{, n° 1;}\\ \text{M′}n\text{, n° 2;}\\ \text{M″}t\text{, n° 3;}\end{matrix}\right.$, qui a pour rayon la distance $\left\{\begin{matrix}\text{AM, n° 1;}\\ \text{AM′, n° 2;}\\ \text{AM″, n° 3;}\end{matrix}\right.$; menons à l'axe $\left\{\begin{matrix}\text{AX, n° 1;}\\ \text{AY, n° 2;}\\ \text{AZ, n° 3;}\end{matrix}\right.$, la perpendiculaire et la parallele $\left\{\begin{matrix}pm, mr\text{, n° 1;}\\ qn, ns\text{, n° 2;}\\ p't, tu\text{, n° 3;}\end{matrix}\right.$; les triangles semblables $\left\{\begin{matrix}\text{M}mr\text{, MAP, n° 1;}\\ \text{M′}ns\text{, M′AN, n° 2;}\\ \text{M″}ut\text{; M″AP′, n° 3;}\end{matrix}\right.$ donneront les proportions $\left\{\begin{matrix}\text{M}m : \text{MA} :: \text{M}r : \text{AP} :: mr : \text{PM, n° 1;}\\ \text{M′}n : \text{M′A} :: \text{M′}s : \text{AN} :: ns : \text{NM′, n° 2;}\\ \text{M″}t : \text{M″A} :: \text{M″}u : \text{AP′} :: tu : \text{P′M″, n° 3;}\end{matrix}\right.$.

Représentons les angles φ, Ψ, ω, par des arcs d'un cercle qui auroit l'unité pour rayon, on aura $\left\{\begin{matrix}\text{M}m : \text{MA} :: d\varphi : 1;\\ \text{M′}n : \text{M′A} :: d\Psi : 1;\\ \text{M″}t : \text{M″A} :: d\omega : 1;\end{matrix}\right.$; on a de plus $\left\{\begin{matrix}\text{M}r = dy, mr = dx\text{, n° 1;}\\ \text{M′}s = dz, ns = dy\text{, n° 2;}\\ \text{M″}u = dx, ut = dz\text{, n° 3;}\end{matrix}\right.$, où il faut bien remarquer que le dy, n° 1, n'est point égal au dy, n° 2, vu qu'ils résultent de mouvement de rotation autour d'axes différents, et ainsi des autres différentielles dx, dz. Observons de plus que $\left\{\begin{matrix}\varphi \text{ et } y\text{, n° 1;}\\ \Psi \text{ et } z\text{, n° 2;}\\ \omega \text{ et } x\text{, n° 3;}\end{matrix}\right.$, décroissant ensemble, $\left\{\begin{matrix}d\varphi \text{ et } dy\text{, n° 1;}\\ d\Psi \text{ et } dz\text{, n° 2;}\\ d\omega \text{ et } dx\text{, n° 3;}\end{matrix}\right.$, doivent avoir le même signe contraire à celui de $\left\{\begin{matrix}dx\text{, n° 1;}\\ dy\text{, n° 2;}\\ dz\text{, n° 3;}\end{matrix}\right.$, puisque $\left\{\begin{matrix}x\text{, n° 1;}\\ y\text{, n° 2;}\\ z\text{, n° 3;}\end{matrix}\right.$, croissent pendant que les premiers décroissent.

Digitized by Google

D'après cela les proportions qui résultent des triangles semblables trouvés ci-dessus, deviendront, en substituant les valeurs analytiques, et ayant égard aux conformités de signes, $\begin{cases} -d\varphi : 1 :: -dy : x :: dx : y, \text{ n° 1}; \\ -d\Psi : 1 :: -dz : y :: dy : z, \text{ n° 2}; \\ -d\omega : 1 :: -dx : z :: dz : x, \text{ n° 3}; \end{cases}$ ce qui donnera les équations $\begin{cases} dy = xd\varphi, dx = -yd\varphi, \text{ n° 1}; \\ dz = yd\Psi, dy = -zd\Psi, \text{ n° 2}; \\ dx = zd\omega, dz = -xd\omega, \text{ n° 3}; \end{cases}$

Qu'on suppose maintenant que les trois rotations élémentaires $d\varphi$, $d\Psi$, $d\omega$, que nous avons jusqu'à présent considérées séparément, ont lieu toutes ensemble. Cela est très aisé à concevoir : car on peut imaginer que le point que nous avons pris dans l'espace, ou, ce qui revient à la même chose, sa projection M, n° 1, tourne autour du point A ou de l'axe AZ ; que pendant ce temps le plan n° 1 se meut autour de l'axe AY, considéré comme une charniere, et que, de plus, toujours pendant le même temps, le plan n° 2 se meut autour de l'axe AX perpendiculairement à cet axe.

Dans cette hypothese des trois rotations simultanées, les variations qui en résultent pour x, y et z, doivent être égales à la somme des variations partielles qui résultent de chaque rotation particuliere, prises avec leurs signes ; car il est évident, soit d'après les regles du calcul différentiel, soit d'après l'inspection de la figure, que y, dans le même instant, augmentant de sn, n° 2, et diminuant de Mr, n° 1, sa variation finale sera sn — Mr, et ainsi des autres co-ordonnées. Ainsi la considération des trois rotations simultanées donnera les équations

$$dx = zd\omega - yd\varphi;\ dy = xd\varphi - zd\Psi;\ dz = yd\Psi - xd\omega.$$

Telle est la valeur générale des variations que subiroient les trois co-ordonnées à un point quelconque, pris dans l'espace, et ayant trois mouvements simultanés de rotation, suivant les conditions exposées ci-dessus. Supposons que ce point soit tel qu'on ait AP, n° 1 : AN, n° 2 : AP′, n° 3 : : M′n, n° 2 : M″t, n° 3 : Mm, n° 1, ou que $x : y : z :: d\Psi : d\omega : d\varphi$, c'est-à-dire que les différentes co-ordonnées soient proportionnelles à la rotation autour de l'axe auquel elles appartiennent, la suite des points qui jouiront de cette propriété formera une ligne droite dans l'espace, passant par l'origine A des co-ordonnées ; car 1°. la projection de cette ligne donnera $\begin{cases} \text{sur le plan n° 1}, x : y :: d\Psi : d\omega; \\ \text{sur le plan n° 2}, y : z :: d\omega : d\varphi; \\ \text{sur le plan n° 3}, z : x :: d\varphi : d\Psi; \end{cases}$, et les rapports de $d\varphi$, $d\Psi$, $d\omega$, quoiqu'arbitraires, sont supposés cons-

Digitized by Google

tants ; 2°. les deux co-ordonnées dans chacun des trois plans sont zéro en même temps au point A. Ainsi les trois projections de la ligne en question étant des lignes droites, passant par le point A, cette ligne est aussi droite, et passe par le même point.

D'un autre côté les rapports $x : y : z :: d\Psi : d\omega : d\varphi$, donnent $x d\omega = y d\Psi$; $y d\varphi = z d\omega$; $x d\varphi = z d\Psi$; substituant ces valeurs dans les trois équations ci-dessus, on a $dx = 0$; $dy = 0$; $dz = 0$; ainsi la ligne qu'on vient de déterminer à la propriété que les variations des co-ordonnées qui s'y rapportent, provenant des rotations élémentaires simultanées, $d\varphi$, $d\Psi$, $d\omega$, sont nulles. Mais cette propriété ne peut avoir lieu qu'autant que cette ligne sera le centre commun de ces rotations, c'est-à-dire l'axe immobile, relativement au système, autour duquel axe s'exerce la rotation unique qui résulte de leur simultanéité.

Ainsi les rotations élémentaires $d\varphi$, $d\Psi$, $d\omega$, se composent en une rotation unique $d\theta$ autour d'un axe passant par l'origine des co-ordonnées x, y, z, et ayant la propriété que, pour tous les points qui s'y rapportent, on a $x : y : z :: d\Psi : d\omega : d\varphi$. Réciproquement, une rotation $d\theta$ autour d'un axe quelconque pourra se décomposer en trois rotations élémentaires autour de trois axes perpendiculaires entre eux, et passant par un point quelconque du premier axe, telles qu'en prenant ce point pour origine des co-ordonnées supposées parallèles aux trois premiers axes, leur rapport soit égal au rapport constant des co-ordonnées de l'axe en question (*).

(*) Pour trouver la valeur de $d\theta$ résultante des valeurs de $d\varphi$, $d\Psi$ et $d\omega$, il faut considérer le mouvement angulaire correspondant, d'un point pris sur un plan perpendiculaire *à l'axe instantané de rotation* (*voyez* la définition de l'art. 155), et qu'on supposera, pour plus de facilité, passer par le point A, origine des co-ordonnées. Cherchons d'abord l'équation de ce plan.

En considérant $\left\{\begin{array}{l} \text{AM, n° 1;} \\ \text{AM', n° 2;} \\ \text{AM'', n° 3;} \end{array}\right.$ comme la projection de l'axe instantané de rotation, le plan dont il s'agit coupera le plan $\left\{\begin{array}{l} \text{n° 1,} \\ \text{n° 2,} \\ \text{n° 3,} \end{array}\right.$ sur une ligne $\left\{\begin{array}{l} \text{QR} \\ \text{Q'R'} \\ \text{Q''R''} \end{array}\right.$ perpendiculaire à la ligne de projection $\left\{\begin{array}{l} \text{AM} \\ \text{AM'} \\ \text{AM''} \end{array}\right.$. Menons les perpendiculaires $\left\{\begin{array}{l} \text{RT, n° 1;} \\ \text{R'T', n° 2;} \\ \text{R''T'', n° 3;} \end{array}\right.$ aux axes $\left\{\begin{array}{l} \text{AY, n° 1;} \\ \text{AZ, n° 2;} \\ \text{AX, n° 3;} \end{array}\right.$, les triangles semblables $\left\{\begin{array}{l} \text{ATR, APM, n° 1;} \\ \text{AT'R', ANM', n° 2;} \\ \text{AT''R'', AP'M'', n° 3;} \end{array}\right.$ donneront $\left\{\begin{array}{l} \text{AT : TR :: AP : PM :: } d\Psi : d\omega \\ \text{AT' : T'R' :: AN . NM' :: } d\omega : d\varphi, \\ \text{AT'' : T''R'' :: AP' : P'M'' :: } d\varphi : d\Psi \end{array}\right.$

Maintenant si, pour tout rapporter à des co-ordonnées de même origine et de même dénomination, on nomme $\left\{\begin{array}{l} \text{AT'', } x, \text{ n° 3,} \\ \text{AT, } y, \text{ n° 1;} \\ \text{AT', } z, \text{ n° 2;} \end{array}\right.$, il faudra nommer $\left\{\begin{array}{l} \text{T''R'', } -z, \text{ n° 3;} \\ \text{TR, } -x, \text{ n° 1;} \\ \text{T'R', } -y, \text{ n° 2;} \end{array}\right.$. Substituant ces valeurs dans les proportions ci-dessus, on aura $\left\{\begin{array}{l} y : -x :: d\Psi : d\omega \\ z : -y :: d\omega : d\varphi \\ x : -z :: d\varphi : d\Psi \end{array}\right.$; ce qui donnera les

Digitized by Google

S'il y a équilibre autour des trois axes auxquels se rapportent les rotations $d\varphi$, $d\Psi$, $d\omega$, il y aura évidemment équilibre autour de l'axe auquel se rapporte la rotation résultante $d\theta$: or, la position de ce dernier dépendant du rapport des quantités $d\varphi$, $d\Psi$, $d\omega$, qui, comme on l'a vu, entrent dans les équations de ses projections, et ce rapport étant entièrement arbitraire, cette position est également arbitraire; ainsi l'équilibre de rotation autour des trois premiers axes suppose un équilibre pareil autour d'un axe quelconque passant par leur point commun de rencontre, et par conséquent un équilibre absolu de rotation autour de ce même point.

Ce que c'est que l'*axe instantané de rotation.*

155. L'axe autour duquel s'exerce la rotation $d\theta$, résultante des trois rotations simultanées $d\varphi$, $d\Psi$, $d\omega$, s'appelle *axe instantané de rotation.*

Avantage des dernieres formules d'équilibre sur celles données précédemment. Conformité des unes et des autres.

156. Les formules d'équilibre données (150 et 152) ont l'avantage sur celles de l'article 134, de ne supposer aucune composition ni décomposition préliminaire des moteurs, et de les prendre dans leur état actuel de quantité et de direction; on verra quel avantage elles fournissent par-là pour la solution des questions d'équilibre, et même, sous ce point de vue, les conditions générales d'équilibre, données précédemment, se déduiroient comme corollaires des dernieres formules; par exemple, dans les formules (150), chaque moteur est multiplié par le cosinus de l'angle qu'il forme avec les trois axes ou leurs paralleles: or il est aisé de s'assurer que ces produits ne

égalités $yd\omega + xd\Psi = 0$; $zd\varphi + yd\omega = 0$; $xd\Psi + zd\varphi = 0$; ajoutant ces trois équations, et divisant par 2, on aura $xd\Psi + yd\omega + zd\varphi = 0$, équation demandée.

Nommons s le petit arc décrit autour de l'axe instantané de rotation par un point du plan dont on vient de donner l'équation, lequel a pour valeur angulaire $d\theta$. Le rayon avec lequel l'arc s sera décrit sera égal à sa distance à l'origine des co-ordonnées, puisque le plan dans lequel il se trouve tourne autour de cette origine. On sait que cette distance est généralement égale à $\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}$, expression très facile à trouver; ainsi on aura la proportion $d\theta : 1 :: s : \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}$; d'où $s = d\theta\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}$.

On sait encore, et il est aussi aisé de se rendre compte, qu'un espace infiniment petit quelconque, décrit par un point rapporté à trois co-ordonnées x, y, z, est égal à $\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}$; ce qui donne une seconde valeur $s = \sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}$. Nous avons vu dans le texte que $dx = zd\omega - yd\varphi$; $dy = xd\varphi - zd\Psi$; $dz = yd\Psi - xd\omega$; ainsi la derniere valeur de s deviendra $s = \sqrt{((xd\varphi - zd\Psi)^2 + (yd\Psi - xd\omega)^2 + (zd\omega - yd\varphi)^2)}$, ou $s^2 = (x^2 + y^2 + z^2)(d\Psi^2 + d\omega^2 + d\varphi^2) - (xd\Psi + yd\omega + zd\varphi)^2$.

La seconde partie de cette valeur de s^2 est égale à zéro, puisque c'est l'équation du plan dans lequel se trouve l'arc s, ainsi qu'on l'a trouvé plus haut. On a donc simplement $s = \sqrt{((x^2 + y^2 + z^2)(d\Psi^2 + d\omega^2 + d\varphi^2))}$. Egalant cette valeur de s à la premiere trouvée, on a, réduction faite, $d\theta = \sqrt{(d\Psi^2 + d\omega^2 + d\varphi^2)}$.

Ceci fournit un moyen bien simple de composer et de décomposer les mouvements de rotation; et comme le rapport entre les composantes est arbitraire, lorsqu'il n'est déterminé par aucune condition particuliere, cette méthode est aussi générale que celle qui a rapport aux mouvements de translation.

Digitized by Google

sont autre chose que la décomposition de ces moteurs parallèlement à ces trois axes. Ainsi les formules d'équilibre pour le mouvement de translation, données précédemment (134), ne sont qu'un corollaire de celle-ci.

Pareillement les formules (152) offrent toutes les propriétés des moments ou des produits des moteurs par les distances de leur direction à des axes ou plans, et renferme par conséquent les formules pour l'équilibre de rotation données (134).

157. Si les directions des moteurs sont toutes paralleles, on aura $\epsilon = \epsilon' = \epsilon''$, etc. ; $\gamma = \gamma' = \gamma''$, etc. ; $\delta = \delta' = \delta''$, etc. ; et la formule (150) pour l'équilibre du mouvement de translation deviendra

$$Mm + M'm' + M''m'', \text{ etc.} = 0 ;$$

c'est-à-dire que la somme des produits des moteurs, par les masses qu'ils animent, doit être égale à zéro, ou qu'il doit y avoir égalité entre la somme des actions dans un sens, et la somme des actions dans le sens opposé.

158. Si un certain nombre de moteurs paralleles agissent dans un sens, et sont contre-balancés par un seul moteur agissant en sens contraire, et qui par conséquent est égal à leur résultante (108), celui-ci doit, d'après ce qui vient d'être dit, être égal à la somme de tous les autres, et tout cela est conforme à tout ce qu'on a vu jusqu'à l'art. (112) (*).

Ce que deviennent les dernieres formules d'équilibre dans le cas du parallélisme des moteurs.

159. Les formules relatives au mouvement de rotation (152) se réduisent, dans le cas des moteurs paralleles, par la même raison exposée (157), à

$$Mmp + M'm'p' + M''m''p'' + \text{etc.} = 0.$$
$$Mmq + M'm'q' + M''m''q'' + \text{etc.} = 0.$$
$$Mmr + M'm'r' + M''m''r'' + \text{etc.} = 0.$$

Point autour duquel les moteurs paralleles sont en équilibre, quelle que soit leur direction ou la position du corps.

160. Par le point autour duquel tout le systême de moteurs paralleles est en équilibre, menons trois axes perpendiculaires entre eux ; d'après les formules précédentes, la somme des produits des moteurs, par leurs distances perpendiculaires à chacun de ces axes, est égale à zéro. Il y a plus, cette propriété a lieu, quels que soient les angles formés par les axes et la direction commune des moteurs ; car ces angles n'entrant point dans les

(*) Toutes les fois qu'on parlera de moteurs sans faire mention de masses qu'ils animent, il faut supposer que toutes ces masses sont égales entre elles pour l'équilibre, ou qu'elles sont, en général, égales à l'unité.

équations

équations qu'on vient de poser (159) restent absolument arbitraires, et, quelque valeur qu'on leur donne, les quantités p, p', etc. q, q', etc. r, r', etc. conservent toujours le même rapport entre elles.

D'après cela, si tous les points de la masse d'un corps libre sont animés par des moteurs parallèles en équilibre autour d'un point, la direction de ces moteurs pourra être quelconque relativement au corps, sans que la position de ce point ou *centre d'équilibre* varie, les moteurs étant supposés contants; et réciproquement, la direction des moteurs demeurant parallèle à une ligne donnée, le corps pourra avoir une position quelconque relativement à cette direction, et ce point ou centre restera toujours le même relativement au corps. On suppose, bien entendu que chaque moteur agit toujours sur le même point du corps.

Ce qu'on entend par *centre de gravité*.

161. Le centre d'équilibre ou le point autour duquel le mouvement est nul, dans l'hypothèse du parallélisme des moteurs, se nomme *centre de gravité*, lorsque les moteurs sont égaux.

Méthode et formules pour déterminer le centre d'équilibre.

162. Pour déterminer la position du centre d'équilibre d'un corps Q (*fig.* 40), supposons ce centre en A, et par ce point, faisons passer un plan parallèle à la direction des moteurs, représenté par la ligne ou axe XY. Imaginons un autre plan, représenté par la ligne VZ, parallèle au premier, et à une distance connue du corps Q; il s'agit, pour trouver la position du plan XY, de déterminer la distance AB; nommant cette distance a, et conservant, pour les moteurs, les molécules et leurs distances aux axes, les dénominations des formules (142), on a $a = \frac{\mathrm{M}m(p+a)+\mathrm{M}'m'(p'+a)+\mathrm{M}''m''(p''+a)+\text{etc.}}{\mathrm{M}m+\mathrm{M}'m'+\mathrm{M}''m''+\text{etc.}}$; car en développant le 2^{d} terme, il devient $\frac{\mathrm{M}mp+\mathrm{M}'m'p'+\mathrm{M}''m''p''+\text{etc.}+(\mathrm{M}m+\mathrm{M}'m'+\mathrm{M}''m''+\text{etc.})a}{\mathrm{M}m+\mathrm{M}'m'+\mathrm{M}''m''+\text{etc.}}$. La première partie du numérateur de cette fraction est égale à zéro, puisque c'est la première équation de l'art. (159), et le surplus de la fraction est évidemment égal à a.

Les quantités $p+a$, $p'+a$, $p''+a$, etc., sont les distances des directions des moteurs au plan VZ, en donnant à p, p', p'', etc. les signes convenables, suivant que m, m', m'', etc. se trouvent d'un côté ou de l'autre de XY par rapport à VZ; car m étant une molécule, on voit, par la figure, que la ligne $mb = ma + ab = ma + \mathrm{AB} = p + a$, et ainsi des autres. Faisons $p+a=f$, $p'+a=f'$, $p''+a=f'$, etc., on aura, pour déterminer la distance AB, $a = \frac{\mathrm{M}mf+\mathrm{M}'m'f'+\mathrm{M}''m''f''+\text{etc.}}{\mathrm{M}m+\mathrm{M}'m'+\mathrm{M}''m''+\text{etc.}}$.

Qu'on suppose un second plan perpendiculaire au plan XY, parallèle à la direction des moteurs, et passant par le centre d'é-

Digitized by Google

quilibre A, et qu'à une distance b de ce plan on en imagine un autre qui lui soit parallele, et par conséquent perpendiculaire au plan VZ; on aura, par un raisonnement semblable au précédent, $b = \frac{Mm(q+b)+M'm'(q'+b)+M''m''(q''+b)+\text{etc.}}{Mm+M'm'+M''m''+\text{etc.}}$; et faisant $q+b=g, q'+b=g', q''+b=g''$, etc. $b=\frac{Mmg+M'm'g'M''m''g''+\text{etc.}}{Mm+M'm'+M''+\text{etc.}}$.

Enfin la distance d'un troisieme plan passant par le point A, et perpendiculaire aux deux premiers à un autre plan qui lui seroit parallele, étant nommée c, les moteurs étant supposés paralleles à ce troisieme plan; ce qui (160) ne change point la place du centre d'équilibre, et h, h', h'', etc. étant les distances des molécules au plan distant du centre de gravité de la longueur c, on aura la troisieme équation

$$c = \frac{Mmh+M'm'h'+M''m''h''+\text{etc.}}{Mm+M'm'+M''m''+\text{etc.}}.$$

Ainsi lorsque le corps et les moteurs seront donnés, pour trouver le centre d'équilibre, on se donnera, de position, trois plans perpendiculaires entre eux; et les valeurs de a, b, c, tirées des équations précédentes, détermineront la position de trois autres plans, paralleles aux trois premiers, et dont l'intersection commune sera le centre de gravité demandé.

Méthode analogue à la précédente, pour déterminer le point par où passe la résultante de plusieurs moteurs paralleles.

163. La méthode que nous venons de donner sert aussi à trouver le point par où passe la résultante de plusieurs moteurs paralleles. On sait que cette résultante, pour pouvoir remplacer les composantes, quant au mouvement de translation, doit être égale à leur somme; il ne s'agit plus, pour la placer de maniere qu'elle puisse équivaloir au mouvement de rotation, que de trouver le point par où elle passe, au moyen des formules précédentes. R étant cette résultante, sa distance a, à un axe quelconque de rotation, sera, d'après ces formules, $= \frac{Mf+M'f'+M''f''+\text{etc.}}{M+M'+M''+\text{etc.}}$; et son produit, par cette distance, sera $\frac{Mf+M'f'+M''f''+\text{etc.}}{M+M'+M''+\text{etc.}}$ R. En effet, la somme des produits des autres moteurs, par leur distance au même axe, sera $Mf+M'f'+M''f''+$ etc. Cette somme ajoutée au produit de R, par sa distance, pris avec un signe contraire, est évidemment égale à zéro, en faisant attention que $R=M+M'+M''+$ etc. Donc R, placé à la distance $\frac{Mf+M'f+\text{etc.}}{M+M'+\text{etc.}}$ de l'axe, équivaut (159) au mouvement de rotation que $M+M'+$ etc. tendent à produire autour du même axe.

Enonciation de cette méthode par la théorie des moments.

164. La position de cette résultante n'a besoin que d'être déterminée par rapport à deux plans paralleles aux moteurs, qui, par leur intersection, donneront sa ligne de direction. Sa

Digitized by Google

distance à l'un quelconque de ces plans se trouvera, divisant la somme des moments des moteurs rapportés au plan auquel on cherche la distance, par la somme des moteurs. C'est la traduction d'une des formules précédentes en employant la définition donnée art. (119).

165. Il est temps d'appliquer la théorie que nous venons d'exposer à la détermination des centres de gravité des différents corps et à l'équilibre des machines. Nous allons seulement faire précéder ces recherches de quelques réflexions sur la pesanteur.

De la pesanteur.

Ce que c'est que *pesanteur*, *ligne verticale* et *horizontale*.

166. La *pesanteur*, qu'on nomme aussi *gravité*, est la propension qu'ont les corps terrestres à se mouvoir (abstraction faite de tout obstacle) dans la direction du rayon de courbure et vers le centre de courbure du lieu où ils sont placés. La direction de ce rayon se nomme *ligne verticale*, et la perpendiculaire à cette direction, *ligne horizontale*. On voit, d'après ces définitions, que chaque point de la terre a une verticale et une horizontale particulière.

Gravitation, loi générale de la nature, d'où dérive la pesanteur.

167. Cette propriété des corps terrestres dérive d'une propriété générale de tous les corps de la Nature, qu'on nomme *gravitation*, et qui consiste à tendre à s'approcher les uns des autres avec une force accélératrice qui suit la raison directe des masses et la raison inverse des quarrés des distances. La cause inconnue de la gravitation, quelle qu'elle soit, se nomme *attraction*.

Formule qui exprime la force accélératrice qui résulte de la gravitation.

168. En désignant la force accélératrice par φ, nommant M et m les masses des deux corps, D et d leurs distances à un point commun pris sur la ligne qui joint leurs centres d'attraction, on voit, d'après ce qui vient d'être dit, que φ sera proportionnel à $\frac{M+m}{(D+d)^2}$, et que par conséquent on aura l'équation $\varphi = A\frac{M+m}{(D+d)^2}$, A étant un coëfficient constant déterminé d'après une valeur particulière de φ qui sert de module ou d'échelle pour avoir les valeurs absolues dans toutes les hypotheses de M, m, D et d.

Cas où cette force accélératrice peut être regardée comme constante ; ce cas a lieu près la surface de la terre.

169. M exprimant la masse de la Terre, D la distance moyenne du centre à la surface, m la masse d'un corps mu par les hommes sur cette surface, et d la hauteur ou la profondeur à laquelle ils peuvent transporter cette masse ; je dis que, dans cette hypothese, c'est-à-dire en se renfermant dans les limites des valeurs possibles de m et de d, la force accélératrice φ pourra être regardée comme constante.

Digitized by Google

Pour le prouver, donnons d'abord à la fraction $\frac{M+m}{(D+d)^2}$ la valeur $\frac{M+m}{D^2}$ qu'elle a à la surface de la terre, et cherchons quelle variation éprouve le numérateur D^2 relativement à la quantité d. Cette variation est en général $2dD + d^2$. Supposons $d = 2000$, ou le corps transporté à 2000 toises au-dessus du niveau de la mer. Le rayon moyen D étant égal à 3271794 toises, on trouvera que le rapport de D^2 à l'incrément $2dD + d^2$ est $= 817{,}7$, et qu'ainsi la fraction $\frac{M+m}{(D+d)^2}$ est plus petite de $\frac{1}{818}$, à 2000 toises au-dessus de la surface, qu'à la surface même.

La valeur de φ, que nous avons dit être de 30,196 pieds, ou de 5,0327 toises à la surface de la terre, diminue donc aussi de $\frac{1}{818}$ à 2000 toises de hauteur, qui répondent à environ 5 lignes $\frac{1}{3}$. Il y a en physique des circonstances où il seroit nécessaire d'avoir égard à cette diminution ; mais elle est absolument à négliger pour tous les objets d'application que nous avons en vue dans ce Traité, où les corps, dont nous avons à comparer les pesanteurs, sont trop rapprochés pour produire des différences appréciables ; ce dont on peut aisément se rendre compte en sous-divisant proportionnellement la diminution $\frac{1}{818}$ depuis 0 jusqu'à 2000 (*).

Quant à la variation occasionnée par la masse des différents corps m qu'on peut enlever au-dessus de la surface de la terre, elle doit être regardée comme absolument nulle ; car M, exprimée en toises cubes, étant un nombre de 21 chiffres, toutes les valeurs de m, renfermées dans les limites dont nous avons parlé plus haut, peuvent être censées infiniment petites à son égard.

(*) Les calculs de cet article sont fondés sur ce que le rayon terrestre à l'équateur est de . . . . . 3277123 toises.
Et au pole de 3266165
Somme. 6543588
Rayon moyen. 3271794

Prenant la valeur du rayon moyen, qui a 13,0295720 pour logarithme de son quarré, et calculant dans l'hypothese de la sphere, on trouve, pour les neuf premiers chiffres du logarithme de M, 20, 1664467.

M. Bouguer a fait des expériences sur la variation de la pesanteur, à différentes hauteurs, au-dessus du niveau de la mer, rapportées dans son livre de *la Figure de la Terre*, édition de 1749, pag. 357 et suivantes. Il a trouvé qu'à *Quito*, élevée au-dessus de la surface de la mer de 1466 toises, ou d'une 2232e partie du rayon terrestre moyen, la pesanteur étoit moindre de $\frac{1}{270}$; et que sur le *Pichincha*, haute de 2434 toises, ou de $\frac{1}{1345}$ du rayon terrestre moyen, la force accélératrice diminuoit de $\frac{1}{450}$. Ces rapports ne sont pas extrêmement éloignés du rapport inverse du quarré des distances, et la diminution est au-dessous de ce qu'elle seroit en suivant exactement ce rapport. La cause de cette irrégularité tient à des circonstances physiques que M. Bouguer expose dans le chapitre ci-dessus cité.

170. On savoit par expérience, long-temps avant d'avoir appliqué l'attraction au système du monde, que la force accélératrice, causée par la pesanteur, étoit constante ; la théorie précédente fait voir comment ce phénomene s'accorde avec celui de la gravitation universelle, et que les forces accélératrices qui résultent de chacun, quoique de différente nature, n'impliquent point contradiction, et sont au contraire une conséquence l'une de l'autre (*).

(*) Voici comment le savant auteur de l'*Histoire des Mathématiques* rapporte une des premieres vérifications de Newton aussitôt qu'il eut soupçonné que la cause qui fait tomber les corps à la surface de la terre pouvoit bien être une loi générale de la Nature.

« M. Newton ne s'en tint pas là ; il fit encore le raisonnement que voici : Si la lune est « forcée de circuler autour de la terre, parcequ'elle tend vers elle avec une pesanteur dimi- « nuée dans le rapport ci-dessus (c'est-à dire 3600 fois moindre qu'à la surface, puisque la « lune est éloignée du centre de la terre de 60 demi-diametres terrestres), la chûte qu'elle feroit « étant uniquement livrée à cette force, pendant un temps déterminé, celui d'une minute, « par exemple, devra être de la 3600e partie de l'espace que décrivent les corps pesants vers « la surface de la terre pendant le même temps. Or cette chûte, nous voulons dire ce dont la « lune s'approcheroit de la terre durant une minute, si elle obéissoit uniquement à la pesan- « teur, c'est le sinus verse de l'arc qu'elle décrit durant ce temps. M. Newton compara donc « ce sinus verse pour voir s'il se trouveroit exactement la 3600e partie de l'espace parcouru par « les corps graves à la surface de la terre durant une minute. Ceci faillit ruiner de fond en « comble l'édifice qu'il commençoit à élever. Comme la mesure assez exacte de la terre, prise « par Norwood en 1635, lui étoit inconnue, il supposa, avec les géographes et les navigateurs « de sa nation, que le degré contenoit 60 milles anglois. Mais, au lieu de 60, il en contient « environ 69 $\frac{1}{2}$: il ne trouvoit plus le rapport qu'il falloit pour vérifier sa conjecture. Bien des « philosophes se fussent peu embarrassés de cette difficulté, et, se la déguisant, eussent con- « tinué d'élever leur édifice. Mais cet homme incomparable, cherchant la vérité de bonne foi, « n'avoit pas pour objet de faire un système. Quand il vit qu'un fait renversoit toutes ses « conjectures, jusqu'alors si bien liées, il les abandonna, ou il remit à un autre temps à les « examiner.

« Ce fut seulement en 1676 que M. Newton reprit le fil de ses idées sur ce sujet : il y a « apparence que l'ouvrage de *Hook* (an attempt to prove the motion of the earth) en fut l'oc- « casion. Le livre de *la Mesure de la Terre*, par M. *Picard*, voyoit le jour depuis quelques « années ; M. Newton s'en servit pour résoudre ou confirmer la difficulté qui l'avoit d'abord « arrêté. Mais quand, au moyen de cette mesure, il eut déterminé exactement les dimensions « de l'orbite lunaire, le calcul lui donna précisément ce qu'il cherchoit. Car en supposant, « d'après les meilleurs astronomes, la distance moyenne de la lune à la terre, de 60 demi- « diametres, et le degré terrestre de 57100 toises, on trouve que le sinus verse de l'arc décrit « par la lune, dans une minute, est de 15 pieds $\frac{1}{12}$. Or les corps voisins de la surface de la terre « tombent, dans une seconde, de cette même hauteur de 15 pieds $\frac{1}{12}$, et par conséquent, dans « une minute ou 60 secondes, cette chûte seroit 3600 fois plus grande ; d'où il est évident que « la chûte de la lune, pendant cet intervalle de temps, est 3600 fois moindre que celle des « corps terrestres, et par conséquent, la force qui la produit, 3600 moindre qu'à la surface « de la terre. Après cette détermination, M. Newton n'hésita plus de conclure que la même « force qu'éprouvent les corps voisins de la surface de la terre, la lune l'éprouve dans son « orbite, et que c'est cette force qui l'y retient et qui l'empêche de s'échapper en ligne « droite. »

Ce morceau, d'une curiosité piquante, en même temps qu'il rappelle un trait bien intéressant sur l'origine d'une découverte sublime, sert à prouver, par le fait, d'une maniere non suspecte, l'identité qui existe entre la pesanteur et la gravitation universelle, puisque cette identité se déduit d'observations d'une nature aussi différente que celles sur la chûte des graves à la surface de la terre, et celles qui ont servi à déterminer la vitesse de la lune dans son orbite.

Digitized by Google

La pesanteur n'est pas tout-à-fait la même a différentes distances de l'équateur.

171. L'évaluation précédente de la force accélératrice, qui résulte de la pesanteur, est supposée rapportée à un point déterminé de la surface de la terre; on a reconnu que cette force accélératrice n'étoit pas tout-à-fait la même dans les différents points de cette surface, et qu'elle diminuoit depuis le pole jusqu'à l'équateur. La cause de cette diminution est la rotation diurne de la terre sur son axe, qui tend à éloigner les corps du centre de courbure à mesure que la pesanteur tend à les en approcher. Nous n'y aurons pareillement aucun égard, et nous supposerons, dans toutes les circonstances, $\varphi = 30{,}196$ pieds, conformément à la valeur que nous avons adoptée précédemment (*).

Elle communique la même vitesse, quelle que soit la masse et la nature du corps sur lequel elle agit.

172. Après avoir établi que la pesanteur est constante à différentes hauteurs au-dessus de la surface du globe, et à différents points de cette surface, c'est-à-dire que ses variations sont assez petites pour être négligées, il faut encore ajouter qu'elle est constante, quelle que soit la masse et la nature du corps sur lequel elle agit, et qu'elle agit indistinctement de la même maniere sur tous les graves. La théorie précédente prouve cette assertion pour ce qui concerne la masse; car nous avons vu (169) que l'expression $\frac{M+m}{(D+d)^2}$, appliquée aux corps pesants, est constante, quelle que soit la valeur de m; il en est de même, quelle que soit sa nature. Les expériences qui le prouvent ont été faites dans le vuide, parceque, pour connoître la force accélératrice qui vient uniquement de la pesanteur, il faut faire abstraction de la résistance de l'air, qui modifie différemment le mouvement des corps, suivant le rapport du volume à la masse; on a reconnu que, sous la machine pneumatique, tous les corps généralement tomboient de la même hauteur, précisément dans le même temps, et qu'ainsi la pesanteur devoit leur imprimer à tous indistinctement la même vîtesse.

(*) On nomme *force centrifuge* l'impulsion produite par le mouvement diurne de la terre, et qui agit en sens contraire de la pesanteur. Cette force, évaluée théoriquement, diminue la valeur de φ, sous l'équateur, de 15,08 lignes, ou de 0,104 pieds, qui, ajoutés à cette valeur qu'on y a trouvée, par expérience, de 30,104 pieds, donne 30,208 pour la valeur de φ, telle qu'elle seroit si la terre étoit sans rotation autour de son axe, ou telle qu'elle est au pole.

Cette variation de 0,104 pieds décroît comme les quarrés des cosinus de latitude, en sorte qu'elle devient nulle au pole, où la valeur de φ est entiere de 30,208.

Tout cela est fondé sur des considérations théoriques auxquelles les observations ont occasionné quelques modifications qui sont trop légeres pour influer sur les résultats des calculs mécaniques où l'on fait entrer la pesanteur.

La valeur de φ, 30,196 pieds, ou, plus exactement, 4347,262712 lignes, est celle qui a réellement lieu à la latitude de Paris.

Digitized by Google

173. La direction de la pesanteur est sensiblement parallele dans un espace de peu d'étendue, comme de quelques toises. En effet pour que deux verticales, placées sous un même méridien, fassent un angle d'un degré, il faut, à la latitude de Paris, qu'elles soient distantes de 57069 toises; ce qui donne, pour une minute, 951,15 toises, et pour une seconde, 15,85 toises. Or, dans les recherches dont nous aurons à nous occuper, un angle de quelques secondes pouvant être censé nul, les différentes directions de la pesanteur pourront être regardées comme paralleles dans un espace de quelques toises.

Sa direction est sensiblement parallele dans un espace de peu d'étendue.

174. Nous nommerons *poids* d'un corps le produit de sa mase par la force accélératrice que la pesanteur peut lui imprimer; ainsi φm exprimera le poids du corps dont la masse est m; nommant p ce poids, on aura $p = \varphi m$.

Ce que c'est que le poids d'un corps; il est proportionnel à la masse.

La masse d'un corps, ou la quantité de matiere qu'il contient, ne pouvant point se connoître d'une maniere absolue, mais seulement par relation avec celle d'un autre corps, il en sera de même de la valeur de p. Tout le monde connoît le procédé employé pour connoître les rapports des poids des différents corps au moyen de la balance. La théorie de cet instrument se déduit bien aisément de celle du levier. Mais les rapports trouvés par ce procédé donnent-ils aussi bien exactement ceux des masses, comme nous le supposons dans notre définition? c'est l'opinion de tous les physiciens, et Newton a fait des expériences pour le prouver (*).

175. Le rapport du poids d'un corps à son volume se nomme *pesanteur spécifique*. Soit π la pesanteur spécifique, u le volume, on aura $\pi = \frac{p}{u}$. D'après cette définition, lorsqu'on sera convenu d'une unité de volume, et qu'on sera convenu, de plus, de donner une valeur numérique au poids d'un certain nombre d'unités de volume, d'une matiere déterminée, comme un métal, un fluide, etc., l'expression $\frac{p}{u}$ désignera la valeur numérique du poids de l'unité de volume de la même matiere. Si, par exemple, on veut attribuer 100 unités de poids à 10 unités de

De la pesanteur spécifique.

(*) Ce grand géometre ayant suspendu à des fils ou verges d'égale longueur des poids égaux de différentes matieres, comme d'or, de plomb, renfermés dans des boites égales et de même matiere, a trouvé que tous ces poids faisoient leur oscillation dans le même temps. Or, la résistance de l'air étoit égale pour tous, puisque cette résistance n'agissoit que sur les boites égales qui les renfermoient. Donc la cause qui faisoit mouvoir ces poids y produisoit la même vitesse; donc cette cause étoit proportionnelle à la masse de chaque poids; donc la pesanteur, qui étoit cette cause, étoit, dans chaque poids oscillant, proportionnelle à la masse. (Voyez l'*Encyclopédie* de MM. Diderot et d'Alembert, tome 10, page 178.

Digitized by Google

volume, chaque unité de volume aura 10 unités de poids, comme l'indique l'expression $\frac{p}{u} = \frac{100}{10} = 10 = \pi$.

Lorsqu'on sera convenu du nombre à attribuer à la pesanteur spécifique d'une certaine matiere, on déterminera aisément la pesanteur spécifique de tous les autres corps, et par conséquent la valeur numérique à attribuer à un volume quelconque d'une matiere quelconque. Il ne faut pas perdre de vue que le nombre à attribuer à la pesanteur spécifique de la matiere qui sert de terme de comparaison, étant absolument arbitraire, les nombres exprimant les poids de tous les autres corps ne sont que des termes de rapport, ainsi qu'on l'a dit dans l'article précédent, et qu'on n'en peut point conclure la quantité absolue de la masse. Il faudroit, pour que cela fût possible, comparer les poids à celui d'un corps dont la masse et le volume occuperoient précisément le même espace. Or, on ne connoît pas de corps dont on puisse affirmer cette propriété.

On trouvera à la fin de ce volume une table des pesanteurs spécifiques des principaux corps, dressée d'après l'ouvrage que vient de publier sur cette matiere M. Brisson, de l'académie des sciences.

Ce que c'est que la densité.

176. Les physiciens donnent le nom de *densité* au rapport entre la masse et le volume ; ainsi, la densité étant δ, on a $\delta = \frac{m}{u}$.

Usage à faire des équations dans lesquelles entre le poids, la pesanteur spécifique et la densite.

Cette équation et les deux précédentes, $p = \varphi m$, $\pi = \frac{p}{u}$, fournissent le moyen de comparer et de combiner ensemble, à volonté, les quantités m, u, p, π et δ, bien entendu que le mot comparaison, entre des quantités de nature différente, doit toujours s'entendre dans le sens expliqué art. (4), en parlant de la relation des espaces et des temps.

Cas où l'on veut avoir égard aux variations de la pesanteur.

La force accélératrice φ, introduite dans la valeur de p, étant rendue variable, peut servir à rendre comparatives les expériences faites en différents lieux et à différentes hauteurs, lorsqu'on voudra avoir égard aux petites variations qu'y éprouve la pesanteur.

177. Il arrive souvent, en mécanique, qu'on désigne la vîtesse d'un mobile par la hauteur dont ce mobile auroit dû tomber pour acquérir cette vîtesse. Désignant par h la hauteur, par v la vîtesse, h se nommera *la hauteur due à la vîtesse* v.

On trouvera à la fin de ce volume une table des hauteurs dues à différentes vîtesses, calculée d'après la formule $v = 7{,}77125\sqrt{h}$, donnée art. (26).

178.

178. Après ce que nous avons dit, art. (16) et suivants, sur les mouvements uniformément accélérés, nous n'avons rien à ajouter ici de relatif à la chûte des corps graves; d'ailleurs cette discussion appartient proprement à la dynamique.

Ce que c'est que la hauteur due à une vîtesse; tables qui y sont relatives.

Nous allons appliquer les formules de l'art. (162) à la détermination du centre de gravité des lignes, des surfaces et des solides; on voit bien à présent que ce centre est appellé de *gravité* parceque c'est le point autour duquel les efforts de la pesanteur sont en équilibre, les directions du mouvement qu'elle tend à imprimer à chaque point du système étant paralleles entre elles, d'après ce qui est dit art. (173).

Pourquoi le centre de gravité est ainsi nommé.

Des centres de gravité.

179. Soit Q la masse du corps dont on veut avoir le centre de gravité, U son volume, D la densité d'une des particules dQ, qui le composent, x, y et z, les distances de dQ à chacun des trois plans perpendiculaires entre eux, dont on cherche les distances au centre de gravité.

Application des formules des centres de gravité au cas de la pesanteur.

Comparant ces valeurs avec celles des formules de l'art. (162), on voit que m, m', m'', etc., doivent être généralement représentés par dQ; f, f', f'', etc., par x; h, h', h'', etc., par y; g, g', g'', etc., par z; et que les moteurs M, M', M'', etc., étant tous égaux entre eux, ou à la pesanteur dont la valeur est constante, doivent disparoître, puisqu'ils multiplient également tous les termes du numérateur et du dénominateur des fractions qui expriment les distances du centre de gravité à chaque plan.

D'après cela, la distance du centre de gravité au premier plan pourra être exprimée par $\frac{\int x\,dQ}{Q}$; sa distance au second, par $\frac{\int y\,dQ}{Q}$; et sa distance au troisieme, par $\frac{\int z\,dQ}{Q}$.

180. Nous avons vu (176) que la densité étoit égale à la masse divisée par le volume; ainsi la masse sera égale au produit de la densité par le volume, et on aura la masse élémentaire dQ égale au volume élémentaire dU, multiplié par sa densité D ou $dQ = D\,dU$. Substituant cette valeur de dQ dans les expressions précédentes, elles deviennent $\frac{\int x D\,dU}{Q}$, $\frac{\int y D\,dU}{Q}$, $\frac{\int z D\,dU}{Q}$.

Introduction de la densité dans ces formules.

181. Si l'on suppose que la densité du corps est la même dans tous les points de son volume, c'est à-dire que D est constant, il pourra sortir de dessous le signe d'intégration, et disparoîtra, puisqu'il multiplie les deux termes de chaque fraction, dont le

Cas où la densité est constante.

Digitized by Google

dénominateur Q sera égal à U, multiplié par la constante D, et on aura, pour les distances cherchées, $\frac{\int x dU}{U}$, $\frac{\int y dU}{U}$, $\frac{\int z dU}{U}$.

Position du centre de gravité dans les différentes hypotheses de densité.

182. La figure et le volume du corps restant les mêmes, la position du centre de gravité, dans l'hypothese de l'art. (180) ou de la densité variable, dépendra de la variation de cette densité qui peut ou être soumise à une loi, ou être absolument irréguliere, c'est-à-dire, être exprimée par une fonction continue ou discontinue.

Dans l'hypothese de l'art. (181) ou de la densité constante, la figure et le volume restant toujours les mêmes, le centre de gravité n'a évidemment qu'une seule position, qui est absolument invariable, relativement aux différentes parties du corps.

Différentes dénominations de ce centre d'après ces hypotheses.

183. Le centre de gravité, lorsqu'on suppose la densité variable, peut se nommer *centre de gravité et de masse;* et lorsqu'on la suppose constante, *centre de gravité et de figure.* Il est clair que ce dernier n'est qu'un cas particulier du premier.

Centre de gravité des figures ou corps symmétriques.

184. Le centre de gravité et de figure, de tous les corps symmétriques, relativement à un plan ou à un axe, se trouve dans ce plan ou dans cet axe : car si, dans le premier cas, on suppose le plan parallele à la direction de la pesanteur, les portions du corps qu'il sépare se feront évidemment équilibre ; et dans le second cas, le corps doit nécessairement être en équilibre autour de l'axe dans toutes les positions, puisqu'on peut toujours imaginer un plan vertical passant par cet axe et divisant le corps en deux parties égales et semblables.

Cas où les centres de gravité de plusieurs corps sont dans la même ligne droite.

185. Lorsque les centres de gravité de plusieurs corps se trouvent sur une même ligne droite, le centre de gravité de l'assemblage de tous ces corps est aussi sur la même ligne, et cette propriété se déduit d'un raisonnement absolument semblable au précédent.

Centre de gravité communs de plusieurs corps, dont les centres de gravité particuliers sont connus.

186. Lorsqu'on voudra déterminer le centre commun de gravité de plusieurs corps dont les masses et les centres particuliers de gravité sont connus, il faudra prendre pour $\int z dQ$, $\int y dQ$, et $\int x dQ$ (179), somme des produits de chaque masse particuliere, par la distance de son centre de gravité, au plan dont on veut avoir la distance au centre de gravité commun; et pour Q, la somme des masses de tous les corps ; ce procédé se conçoit avec la plus petite réflexion, et on en conclut que les distances du centre de gravité de deux corps, au centre de gravité particulier de chacun des corps, sont entre elles en raison inverse des masses de ce corps.

187. Cela posé, pour nous mettre en état de faire quelques applications, nous allons déduire des formules de l'art. (181) celles qui donnent les centres de gravité des lignes et des surfaces considérées comme composées de points pesants, et ceux de quelques solides.

Formule pour trouver le centre de gravité d'un arc de courbe.

188. Soit un arc de courbe CM (*fig.* 41) dont on cherche le centre de gravité ; soit encore AX l'axe des abscisses perpendiculaire à celui des ordonnées QR. Menons les ordonnées infiniment près PM, pm ; l'élément de courbe Mm représentera dU des formules $\frac{\int x d\mathrm{U}}{\mathrm{U}}$ et $\frac{\int y d\mathrm{U}}{\mathrm{U}}$. Nommons AP ou QM, x ; PM, y ; CM, s ; la distance du centre de gravité de l'arc CM à l'axe QR sera exprimée par $\frac{\int x ds}{s}$, et celle à l'axe AX par $\frac{\int y ds}{s}$, les intégrales étant prises depuis C jusqu'en M.

189. Si la courbe a deux branches symmétriques CM, DM′, et qu'on veuille avoir le centre commun de gravité des arcs CM, DM′, terminés par la double ordonnée MPM′, on le trouvera sur l'axe AX, à la distance $\frac{\int x ds}{s}$ du point A (185).

190. On sait, par la théorie des courbes, qu'on a en général $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$. Substituant cette valeur dans les deux distances $\frac{\int x ds}{s}$ et $\frac{\int y ds}{s}$, elles deviendront $\frac{\int x \sqrt{(dx^2+dy^2)}}{\int \sqrt{(dx^2+dy^2)}}$ et $\frac{\int y \sqrt{(dx^2+dy^2)}}{\int \sqrt{(dx^2+dy^2)}}$.

Formule pour trouver le centre de gravité des surfaces planes.

191. Cherchons maintenant les distances aux mêmes axes du centre de gravité de la surface BPMC.

L'élément de la surface est égal au petit trapeze PpmM, ou plutôt au parallélogramme PprM, mesuré par le produit ydx ; le centre de gravité de ce petit parallélogramme est évidemment au milieu de la ligne qt, parallele aux lignes PM, pr, et également distante de l'une et de l'autre ; la distance de ce centre à l'axe AX sera donc égale à $\frac{1}{2}y$, et celle à l'axe QR sera $= x$. D'après cela, la distance du centre de gravité de la surface BPMC à l'axe QR sera $\frac{\int yx dx}{\int y dx}$, et celle à l'axe AX, $\frac{\frac{1}{2}\int y^2 dx}{\int y dx}$, les intégrales étant prises depuis C jusqu'en M.

192. Si la courbe a deux branches telles que les ordonnées soient égales des deux côtés de l'axe, et qu'on veuille le centre de gravité de la surface comprise entre la ligne CBD et la double ordonnée MPM′, ce centre se trouvera sur l'axe AX (185) à une distance $\frac{\int yx dx}{\int y dx}$ du point A, l'intégrale étant prise depuis B jusqu'en P.

Digitized by Google

Cette derniere expression seroit la même en supposant que les co-ordonnées fissent un angle quelconque entre elles; car la distance du centre de gravité de l'élément MM'$m'm$ seroit toujours $= x$, et la surface de cet élément seroit multipliée par une constante qui, se trouvant au numérateur et au dénominateur, disparoîtroit.

Formule pour trouver le centre de gravité des solides dont les éléments ont leur centre de gravité dans la même ligne droite.

193. Soit MCDM (*fig.* 42, n° 1) la coupe d'un solide, faite par un plan passant par l'axe des abscisses AX; soit encore MFM'E, n° 2, une autre coupe du même solide, faite sur la double ordonnée MPM' par un plan perpendiculaire au premier; on suppose que l'axe AX passe par le centre de gravité de toutes les coupes MFM'E, et il s'agit de déterminer celui du solide qui doit par conséquent (185) se trouver sur le même axe AX.

Nommons AP, x; PM, y, ces co-ordonnées formant entre elles un angle φ; menons la double ordonnée infiniment près mpm', et faisons la surface du profil, n° 2, $= Q$; on voit que Q doit être une fonction de x et d'y.

Qu'on suppose un autre profil infiniment près de celui n° 2, pris sur la ligne mpm', l'épaisseur de cette tranche élémentaire sera mesurée par la perpendiculaire Pr, n° 1, menée d'un profil à l'autre, et se trouvera, par la proportion suivante, $1 : \sin.Ppr(\sin.\varphi) :: Pp(dx) : Pr = \sin.\varphi dx$. Multipliant $\sin.\varphi dx$ par le profil Q, le produit $Q\sin.\varphi dx$ donnera la solidité de la tranche élémentaire, dont le centre de gravité, placé au point P, n°s 1 et 2, sera distant du point A, de AP $= x$. Ainsi la distance du centre de gravité du solide au même point A sera $\frac{\int Q \sin.\varphi x dx}{\int Q \sin.\varphi dx}$, ou $\frac{\int Q x dx}{\int Q dx}$, en divisant par la constante $\sin.\varphi$. L'intégrale doit être prise depuis B jusqu'en P.

Cas où le solide est de révolution, et formules pour le centre de gravité, tant de sa surface que de son volume.

194. Si le solide est de révolution, les co-ordonnées faisant un angle droit, et qu'on veuille trouver le centre de gravité de la surface engendrée par la courbe génératrice CM, que nous nommerons S, on trouvera sans peine, en nommant n, le rapport de la circonférence au rayon, que la surface élémentaire, engendrée par M$m = dS$, est égale à $nydS$; le centre de gravité de cet élément est au centre P du cercle décrit par PM, et la distance de ce centre au point A $= x$; ainsi la distance du centre de gravité de la surface, engendrée par CM au point A, est $\frac{\int nxydS}{\int nydS} = \frac{\int xydS}{\int ydS}$, prise sur l'axe AX.

Pour avoir le centre de gravité du solide lui-même, il ne s'agit

que de substituer pour Q, dans la formule (193), sa valeur $\frac{1}{3}ny^3$, et elle deviendra $\frac{\int y^3 x\,dx}{\int y^3 dx}$.

195. Il peut se faire qu'on ne cherche point la distance du centre de gravité à l'axe AR, mais à un axe quelconque qui lui seroit parallele. Dans ce cas, nommant a la distance de cet axe à l'axe AR, l'élément de la surface ou du solide devra être multiplié par $x \pm a$, quantité qu'il faudra substituer à x dans le numérateur de toutes les formules données depuis l'article (179) dont nous allons faire quelques applications.

Cas où l'on cherche la distance du centre de gravité à un point quelconque pris sur l'axe.

Application des formules précédentes à quelques cas particuliers.

196. Il est évident que le centre de gravité de la circonférence et de la surface du cercle est au centre, et qu'il en est de même de tous les polygones réguliers qu'on peut lui inscrire ou lui circonscrire.

Centre de gravité du cercle et des polygones réguliers.

197. Cherchons le centre de gravité de l'arc de cercle M'BM (*fig.* 43), ou, ce qui est la même chose, la distance du centre de gravité du demi-arc BM au diametre DE, parallele à la corde MM', laquelle distance nous porterons sur le rayon AB perpendiculaire à cette corde. Nommant AP, x; PM, y; le rayon AB, ou AM, a; l'arc BM, s; on a, à cause de la similitude des triangles formés par les lignes, a, y, x; et par les différentielles, ds, dx, dy; la proportion $ds : dx :: a : y$; d'où on tire $ds = \frac{a\,dx}{y}$. Substituant cette valeur dans la formule générale $\frac{\int y\,ds}{s}$, qui (188) exprime la distance ou centre de gravité à l'axe des abscisses, elle devient $\frac{\int a\,dx}{s} = \frac{ax}{s}$; il n'y a point de constante à ajouter, parceque $\int y\,ds$ s'évanouit quand x devient zéro.

Centre de gravité d'un arc de cercle.

Si on nomme d la distance du centre de gravité de l'arc M'BM au centre A, on aura $d = \frac{ax}{s} = \frac{2x}{2s}\,a$, et $2s : 2x :: a : d$, ou M'BM : M'M :: AB : d; c'est-à-dire que cette distance est quatrieme proportionnelle à l'arc, à la corde et au rayon.

198. On aura ainsi, par des calculs plus ou moins compliqués, les centres de gravité des différentes courbes. Nous allons présenter quelques exemples des centres de gravité des surfaces.

199. Proposons-nous de trouver le centre de gravité du trapeze CDFE (*fig.* 44); par le milieu de CD et de EF, menons

Centre de gravité d'un trapeze.

Digitized by Google

l'axe AX; cet axe coupera en deux toutes les paralleles MM', à ces deux lignes, et ces paralleles pouvant être considérées comme les éléments du trapeze, l'axe AX passera par son centre de gravité (185). Nommons AP, x; PM, y; AG, a; CD, b; EF, b'; menons Ce parallele à AG, les triangles semblables CeE, CmM, donneront $Ce : eE :: Cm : mM$, ou $a : \frac{1}{2}(b' - b) :: x : y - \frac{1}{2}b$; ce qui fournit l'équation $y = \frac{b'-b}{2a}x + \frac{b}{2}$. Substituant cette valeur dans la formule générale $\frac{\int xy\,dx}{\int y\,dx}$, elle devient

$$\frac{\int\left(\frac{b'-b}{2a}x^2dx + \frac{1}{2}bxdx\right)}{\int\left(\frac{b'-b}{2a}xdx + \frac{1}{2}bdx\right)} = \frac{\frac{b'-b}{6a}x^3 + \frac{1}{4}bx^2}{\frac{b'-b}{4a}x^2 + \frac{1}{2}bx} = \frac{\frac{1}{2}(b'-b)x^2 + abx}{(b'-b)x + 2ab}.$$

Il n'y a point de constante à ajouter, parceque, lorsque x est égal à zéro, les deux intégrales s'évanouissent.

La valeur précédente est la distance au point A du centre de gravité d'une portion CDM'M du trapeze. Pour avoir celle qui convient à tout le trapeze, il faut faire $x = a$. Nommant d la distance cherchée, on aura, toutes réductions faites, $d = \frac{a(\frac{1}{3}b + \frac{1}{3}b')}{(b' + b)}$; si $b' = b$, on a $d = \frac{1}{2}a$; c'est le cas du parallélogramme.

Centre de gravité d'un triangle.

200. Si $b = 0$, le trapeze devient un triangle, et l'on a $\frac{2}{3}a$, c'est-à-dire que le centre de gravité du triangle se trouve aux deux tiers de la ligne menée de son sommet sur le milieu du côté opposé.

Centre de gravité d'un segment de cercle.

201. Cherchons la distance du centre de gravité d'un segment de cercle MAM' (*fig.* 45) au centre C du cercle. Nommons $\frac{1}{2}a$ le rayon AC qui divise le segment en deux parties égales; AP, x; PM, y; on a, par la propriété du cercle, $y = \sqrt{(ax - xx)}$; ainsi l'élément de APM, ou de $\frac{1}{2}$ MAM', est $(ax - xx)^{\frac{1}{2}}dx$; la distance de P à C est $\frac{1}{2}a - x$; et appliquant ces valeurs à la formule $\frac{\int yx\,dx}{\int y\,dx}$, avec la modification indiquée (195), elle devient $\frac{\int\left[\left(\frac{a}{2} - x\right)dx(ax - xx)^{\frac{1}{2}}\right]}{\frac{1}{2}\text{MAM'}}$. Pour intégrer le numérateur, faisons $ax - xx = z$; on aura $dz = (a - 2x)\,dx$, et $\left(\frac{a}{2} - x\right)dx = \frac{1}{2}dz$. Substituant ces valeurs, $\int\left[\left(\frac{a}{2} - x\right)dx(ax - xx)^{\frac{1}{2}}\right]$ se change en $\int \frac{1}{2}z^{\frac{1}{2}}dz = \frac{1}{3}z^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}(ax - xx)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}y^3$; il n'y a point de constante à ajouter, parceque l'intégrale s'évanouit quand

$x = 0$; ainsi la distance du centre de gravité de MAM' au point C est $\frac{\frac{1}{3}y^3}{\frac{1}{2}MAM'}$. Cette expression peut se changer en $\frac{\frac{1}{12}.8.y^3}{\frac{1}{2}MAM'} = \frac{\frac{1}{12}(2y)^3}{MAM'}$; mais $2y$ est égale à la corde de l'arc MM'; ainsi la distance du centre du cercle au centre de gravité de l'un de ses segments est égale au douzieme du cube de la corde, divisé par la surface du segment.

Centre de gravité d'un secteur.

202. Si l'on veut avoir le centre de gravité du secteur AMCM', on pourra se servir de la méthode indiquée art. (186). En effet, ce secteur est composé du triangle CMM', dont le centre de gravité est aux deux tiers de CP, que nous nommerons x (200), et du segment MAM' dont on vient de trouver le centre de gravité. On aura donc, en suivant le procédé de l'art. (186), et faisant attention que la surface CMM' $= xy$, et que la surface AMCM' $= as$, s étant l'arc MA; on aura, dis-je, $\frac{xy \cdot \frac{2}{3}x + (as - xy)\frac{\frac{1}{3}y^3}{\frac{1}{2}(as-xy)}}{as}$ = la distance du centre C au centre de gravité du secteur. Nommant d cette distance, et substituant pour x^2 sa valeur $a^2 - y^2$, on a, toutes réductions faites, $d = \frac{\frac{1}{3}ay}{s}$. On a de plus, $s =$ MB $= \frac{1}{2}$ MBM'; $y =$ MP $= \frac{1}{2}$ MPM'; ainsi la distance du centre du cercle au centre de gravité du secteur est quatrieme proportionnelle au demi-arc, à la demi-corde, et aux deux tiers du rayon.

Centre de gravité de la surface d'un cône tronqué ou non tronqué.

203. Le trapeze ABCD (*fig.* 46), rectangle en A et B, étant supposé faire une révolution sur la ligne AB, la ligne DC engendrera la surface d'un cône tronqué. Nous pouvons appliquer les formules (194) à chercher le centre de gravité de cette surface.

Nommons AB, a; DC, c; AD, b; BC, b'; AP, x; PM, y; DM, s; Pp, dx; mr, dy; Mm, ds; menons DE parallele à AB, les triangles semblables DEC, Mrm, donneront DE : DC :: Mr : Mm, ou $a : c :: dx : ds = \frac{c\,dx}{a}$. On a de plus, comme on l'a démontré pour la *figure* 44, $y = \frac{b'-b}{2a}x + \frac{b}{2}$. Substituant ces valeurs dans la formule $\frac{\int xy\,ds}{\int y\,ds}$ trouvée (194), elle devient $\frac{\int\left(\frac{c(b'-b)}{2a^2}x^2dx + \frac{bc}{2a}x\,dx\right)}{\int\left(\frac{c(b'-b)}{2a^2}x\,dx + \frac{bc\,dx}{2a}\right)} = \frac{\frac{1}{3}(b'-b)x^3 + abx}{(b'-b)x + 2ab}$. Cette expression est la même qu'on a trouvée pour le centre de gravité du trapeze (199); ainsi le centre de gravité de la surface du cône tronqué est à la même distance de la ligne AD que le centre de

Digitized by Google

gravité du trapeze générateur, et cette distance doit être portée sur la ligne AB.

Dans le cas du cylindre, c'est-à-dire lorsque $b' = b$, la distance est au milieu de AP, et dans le cas du cône non tronqué, ou lorsque $b = 0$, la distance est aux deux tiers de AP.

Centre de gravité de la surface d'une portion de sphere comprise entre deux plans parallèles, contenant le cas du segment sphérique.

204. Soit MDAEM' (*fig.* 47) le profil d'une portion de sphere comprise entre deux plans paralleles, le centre de la sphere étant en B, la ligne AB passant par le milieu des cordes MM', DE, et proposons-nous de trouver le centre de gravité de la zone profilée en DM et EM'. Nommons AP, x; PM, y; le rayon MB, a; l'arc DM, s; on a, par la propriété du cercle, $ds = \frac{a\,dx}{y}$. Substituant cette valeur dans la formule $\frac{\int xy\,ds}{\int y\,ds}$, elle devient $\frac{\int ax\,dx}{\int a\,dx} = \frac{\frac{1}{2}ax^2}{ax} = \frac{1}{2}x$; il n'y a point de constante à ajouter, parceque chaque intégrale s'évanouit en même temps que x.

Si AB étoit le rayon de la sphere, le solide seroit un segment sphérique dont AP seroit la fleche ; ainsi la surface d'un segment sphérique est en général celle de la zone d'une portion de sphere comprise entre deux plans paralleles, à son centre de gravité au milieu de la fleche, ou au milieu de la ligne qui joint les centres des cercles formés par les sections des deux plans paralleles.

Centre de gravité des cônes pyramides, etc.

205. Représentons par ADC (*fig.* 48) le profil d'un solide tel que la surface des sections CD, MM', faites parallèlement à une ligne donnée, soit proportionnelle aux quarrés des distances AB, AP, prises sur une ligne droite AX, passant par le centre de gravité de toutes ces sections, le solide étant susceptible de cette derniere propriété.

Nommons AB, a; la surface de la section faite sur CD, A; AP, x; PM, y, la section faite sur MM', Q, on aura la valeur de Q par la proportion suivante $a^2 : A :: x^2 : Q = \frac{A}{a^2}x^2$. Substituant cette valeur dans la formule $\frac{\int Qx\,dx}{\int Q\,dx}$ (193), elle devient $\frac{\int \frac{A}{a^2}x^3\,dx}{\int \frac{A}{a^2}x^2\,dx} = \frac{\frac{1}{4}\frac{A}{a^2}x^4 + C}{\frac{1}{3}\frac{A}{a^2}x^3 + D}$.

206. Si on veut avoir le centre de gravité à partir du sommet A, alors C = 0, et D = 0, et sa distance au point A est $\frac{3}{4}x$; mais si l'on veut avoir, à partir du point C, tel que AC = b, alors

alors on a $C = -\frac{1}{4}\frac{A}{a^3}b^4$ et $D = -\frac{1}{3}\frac{A}{a^3}b^3$, et la distance au point A, du centre de gravité de la partie profilée en EMM'F; devient $\frac{\frac{1}{4}(x^4-b^4)}{x^3-b^3} = \frac{3}{4}\cdot\frac{(x^2+b^2)(x+b)(x-b)}{(x^2+bx+bb)(x-b)}$.

Si, dans l'un et l'autre cas, on veut avoir le centre de gravité jusqu'à la section connue A, alors x deviendra égal à a, et les distances au point A seront $\frac{3}{4}a$ et $\frac{\frac{3}{4}(a^4-b^4)}{a^3-b^3}$.

207. L'espece de solide dont on vient de parler renferme les pyramides et les cônes, et l'on voit qu'à partir du sommet le centre de gravité se trouve aux trois quarts de l'axe.

208. Soit MAM' (*fig.* 45) le profil d'une calotte sphérique dont on cherche le centre de gravité; nommons AP, x; PM, y; le rayon AC, a; on a d'abord $yy = 2ax - xx$, qui substituée dans la formule $\frac{\int y^2x\,dx}{\int y^2\,dx}$ de l'article (194), donne $\frac{\int(2ax^2\,dx - x^3\,dx)}{\int(2ax\,dx - x^2\,dx)}$ $= \frac{\frac{1}{4}ax^4 - \frac{1}{5}x^5}{ax^3 - \frac{1}{4}x^4} = \frac{8a-3x}{12a-4x}x$, distance du centre de gravité cherché au point A; en faisant $x = 2a$, c'est-à-dire le diametre de la sphere, cette distance devient égale à a, c'est-à-dire que le centre de gravité de la sphere est au centre ce qu'on sait très bien; en supposant $x = a$, on a $\frac{5}{8}a$ pour la distance du sommet au centre de gravité de la demi-sphere.

Centre de gravité d'un segment et d'un secteur sphérique.

209. Pour avoir le centre de gravité du secteur sphérique MCM'A, on remarquera que ce secteur est composé de la calotte ou segment MAM' et du cône MCM'. La solidité du segment est, en nommant n le rapport de la circonférence au rayon, $\frac{n}{6}(3ax^2 - x^3)$, et la distance de son centre de gravité au point A, $\frac{8a-3x}{12a-4x}x$. La solidité du cône est $\frac{n}{6}(2ax - xx)(a-x)$, son centre de gravité est aux $\frac{3}{4}$ de BP ou de $a - x$, et par conséquent distant de A de la longueur $x + \frac{1}{4}(a-x) = \frac{3x+a}{4}$; enfin la solidité du secteur est $\frac{1}{3}na^2x$.

Cela posé, et agissant d'après la regle énoncée art. (186), on a, pour la distance du centre de gravité du secteur sphérique au point A,

$$\frac{\frac{n}{6}(3ax^2-x^3)\left(\frac{8a-3x}{12a-4x}\right)x + \frac{n}{6}(2ax-xx)(a-x)\left(\frac{3x+a}{4}\right)}{\frac{1}{3}na^2x} = \frac{2a+3x}{8}.$$

210. Si le solide en question est un paraboloïde dont l'équation de la courbe génératrice soit $y^2 = px$, la formule $\frac{\int y^2x\,dx}{\int y^2\,dx}$ deviendra $\frac{\int px^2\,dx}{\int px\,dx} = \frac{\frac{1}{3}x^3}{\frac{1}{2}x^2} = \frac{2}{3}x$.

Centre de gravité d'un solide engendré par la révolution d'une parabole.

On voit évidemment qu'il n'y a point de constante à ajouter dans ce cas-ci et dans celui de l'art. (208).

Digitized by Google

Centre de gravité d'un segment ellipsoïdal.

211. Le centre de gravité d'un segment ellipsoïdal quelconque, fait perpendiculairement à l'axe, est constamment le même que celui du segment correspondant de la sphere circonscrite ; on le trouvera donc par le même procédé.

Centre de gravité du solide engendré par la révolution d'une hyperbole.

Le centre de gravité du solide, engendré par la révolution d'une hyperbole qui a pour équation $yy = 2ax + xx$, l'axe de révolution étant celui des abscisses, est, à une distance du sommet, égale à $\frac{8a+3x}{12a+4x}x$. Cette expression se réduit à $\frac{3}{4}$ de x, lorsque x est très grand par rapport à a, et à $\frac{2}{3}x$ dans le cas contraire ; ainsi le centre de gravité se trouve toujours entre les $\frac{2}{3}$ et les $\frac{3}{4}$ de l'abscisse.

Lorsque les surfaces et les corps sont soumis à des loix, la recherche de leur centre de gravité n'a en général d'autre difficulté que celle du calcul.

212. Il seroit inutile de donner un plus grand nombre d'exemples sur les centres de gravité, chacun pourra en imaginer à volonté, et l'on comprend parfaitement que toutes les fois que les lignes, les surfaces ou les solides seront soumis à des loix exprimées par des équations, la recherche de leur centre de gravité n'aura d'autre difficulté que celle d'exiger un calcul plus ou moins long.

Nous allons passer à une propriété des centres de gravité qui peut être utile en bien des circonstances, et sur-tout dans le toisé en architecture.

Propriété des centres de gravité pour la mesure des surfaces et des solidités.

Égalité entre les surfaces de révolutions et le produit des courbes génératrices par la circonférence que décrit leur centre de gravité.

213. Soit δ la distance du centre de gravité d'une courbe à l'axe des abscisses ; nommons x, y, les co-ordonnées ; s l'arc de courbe ; n le nombre de fois que le rayon est contenu dans la circonférence.

Nous avons vu qu'on a $\delta = \frac{\int y\,ds}{s}$; d'un autre côté on sait que la surface de révolution engendrée par la révolution de l'arc de courbe s autour de l'axe des abscisses, est égale à $n\int y\,ds$; multipliant donc par ns les deux termes de l'équation qu'on vient de poser, il vient $s \cdot n\delta = n\int y\,ds$. Mais δ étant la distance du centre de gravité de la courbe à l'axe des abscisses, et $n\delta$ la circonférence qui a cette distance pour rayon, $n\delta$ sera par conséquent la circonférence décrite par le centre de gravité de la courbe pendant que cette courbe fait une révolution autour de l'axe des abscisses ; ainsi l'équation $s \cdot n\delta = n\int y\,ds$ renferme la propriété suivante :

214. *La surface engendrée par la révolution d'un arc de courbe*

Digitized by Google

autour de son axe est égale au produit de cet arc de courbe par la circonférence que décrit son centre de gravité.

Application du théorème précédent au cas où l'on a plusieurs surfaces de révolution rapportées au même axe.

215. Si on a plusieurs arcs de courbe s, s', s'', etc., dont les ordonnées soient y, y', y'', etc., assujetties à tourner autour du même axe qui est l'axe commun des abscisses, la distance du centre de gravité commun de ces arcs de courbe à l'axe des abscisses sera $\frac{\int y\,ds + \int y'\,ds' + \int y''\,ds'' + \text{etc.}}{s + s' + s'' + \text{etc.}}$, dans laquelle les termes du numérateur, qui appartiennent à des arcs placés de différents côtés de l'axe, doivent avoir des signes différents. Nommant D cette distance, et multipliant chaque terme par $(s + s' + s'' + \text{etc.})n$, on aura l'équation

$$(s + s' + s'' + \text{etc.}) \cdot n\mathrm{D} = n(\int y\,ds + \int y'ds' + \int y''ds'' + \text{etc.})$$

Le second terme est évidemment la somme des surfaces engendrées par les arcs de courbe dans leur révolution, prises avec leurs signes, c'est-à-dire la différence entre celles engendrées par les arcs placés d'un côté et de l'autre de l'axe. Le premier terme est la circonférence décrite par le centre commun de gravité multiplié par la somme des arcs. Donc

216. *Lorsque plusieurs arcs de courbe, situés dans un même plan, sont assujettis à tourner autour d'un même axe pris dans ce plan, la somme des surfaces qu'ils engendrent par cette révolution est égale au produit de la somme des arcs ou lignes génératrices, par la circonférence que décrit le centre commun de gravité de ces lignes dans le cas où elles se trouvent toutes placées d'un même côté de l'axe.* Lorsqu'elles sont placées de différents côtés, il faut prendre la différence dans le sens énoncé à l'article précédent.

Égalité entre un solide de révolution et le produit de la surface génératrice par la circonférence que décrit son centre de gravité.

217. Nommons S la surface MCBP (*fig.* 41), nous avons vu (192) que la distance de son centre de gravité au point A étoit, en nommant AP, x; PM, y; $\frac{\int xy\,dx}{S}$. Si on suppose que S fasse une révolution autour de l'axe des ordonnées QR, le volume du solide qu'elle engendrera aura pour expression $n\int xy\,dx$. Nommons δ la distance du centre de gravité au point A, on aura d'une maniere analogue à ce qui a été dit plus haut, $\mathrm{S} \cdot n\delta = n\int xy\,dx$; ainsi, en faisant le même raisonnement que ci-dessus, on dira que

318. *Le volume du solide, engendré par la révolution d'une surface plane autour d'un axe, est égal au produit de cette surface par la circonférence que décrit son centre de gravité.*

Digitized by Google

Cas où l'on a plusieurs solides de révolution rapportés au même axe.

219. Généralisant ensuite, comme on a fait à l'art. (215), on étendra la proposition précédente à un nombre quelconque de surfaces situées dans un même plan et tournant autour d'un axe pris dans ce plan, c'est-à-dire que,

220. *Si on a un nombre quelconque de figures situées dans un même plan, et assujetties à tourner autour d'un axe pris dans ce plan, la somme des solides qu'elles engendreront sera égale à la somme des figures génératrices multipliées par l'arc de cercle que décrira le centre de gravité commun de ces figures, en donnant des signes différents à celles qui sont placées de différents côtés de l'axe de rotation* (*).

Développement et exposition d'un théorême très général pour mesurer un solide engendré par le mouvement d'un plan.

221. Qu'on suppose, dans l'hypothese précédente, que le plan représenté par la ligne AB (*fig.* 49) qui renferme toutes ces figures ne tourne point autour d'un axe constant, mais que cet axe varie à chaque instant, et se trouve en c, c', c'', etc., en sorte que le centre de gravité commun des figures, supposé en a, décrive successivement les arcs infiniment petits aa', $a'a''$, etc., avec la condition que le plan AB restera toujours perpendiculaire à ces mêmes arcs.

Nommons s la somme des figures, les solides engendrés depuis a jusqu'en a' seront égaux à $aa' \times s$; les solides engendrés de a' en a'' seront égaux à $aa'' \times s'$, etc., et la somme totale des solides engendrés par les figures, pendant le mouvement de AB, sera égale à $s \times (aa' + a'a''$, etc.) ou à s, multiplié par la longueur de la courbe que décrit le centre de gravité.

La nature de cet arc de courbe dépend de celle de sa développante $cc'c''$, etc.; et comme cette développante peut être quelconque, et même à double courbure, la courbe $aa'a''$ peut aussi être quelconque. Donc

222. *Si un plan, renfermant une ou plusieurs figures, se meut dans l'espace, d'une maniere quelconque, avec la seule condition d'être toujours placé perpendiculairement à la courbe que décrit le centre de gravité commun de ces figures, ou un point quelconque du plan qui les renferme, la somme des solides qu'elles engendreront par leur mouvement sera égale à la somme de ces figures, multipliée par le chemin qu'aura parcouru leur centre commun de gravité.*

(*) La méthode qu'on vient de donner pour le toisé des surfaces et des solides de révolution est du P. Guldin, jésuite, né à Saint-Gall en 1577, et mort en 1643. Il la publia, partie en 1635, et partie en 1640, dans un ouvrage intitulé, *Centro-barica;* mais il n'a pas donné de démonstration directe, et n'a prouvé la vérité de son principe que par la conformité des résultats qu'il en obtenoit avec ceux connus par d'autres méthodes.

Méthode pour déterminer les centres de gravité des surfaces et des solides quelconques soumis ou non à une loi susceptible d'être exprimée par une équation.

223. La méthode qu'on va exposer a l'avantage de ne point supposer la connoissance de la nature des courbes qui servent de périmetre aux surfaces, et celles des surfaces qui terminent les solides : ces courbes et ces surfaces peuvent même n'être assujetties à aucune loi susceptible d'être exprimée par une équation ; et comme cette méthode renferme la maniere de mesurer les surfaces qui ont de pareils périmetres, ainsi que les solides de figure quelconque, assujettie ou non à une loi, nous avons pensé qu'elle pouvoit avoir une application utile en bien des cas ; il est heureux de réunir le double avantage de simplifier les procédés dans la pratique, et de les étendre à des cas que la théorie n'embrasse que difficilement.

Avantages de la méthode qu'on va exposer. Auteurs qui en ont traité.

Cette méthode, dont on doit la premiere idée au géometre anglois Thomas Simpson (*Math. Dissertationes*, p. 109), a été donnée par M. Chapman dans son *Traité de la construction du navire*, et ensuite par M. Lévêque dans les notes de sa traduction de l'ouvrage de dom Georges Juan, sur la construction et la manœuvre des vaisseaux, 2 vol. in-4°, chez Didot fils aîné.

224. Soit $AP^{(1)}P^{(2)}$, etc. A (*fig.* 50) un espace terminé par la courbe $P^{(1)}P^{(2)}P^{(3)}$, etc., de nature quelconque, et proposons-nous d'abord d'en mesurer la surface. Pour cela, on divisera l'axe AX depuis l'origine A jusqu'au point où se termine la mesure, en un certain nombre de parties égales ; plus il y en aura, et plus le calcul sera exact. Par les points de divisions A, A, etc., on élevera des perpendiculaires $AP^{(1)}$, $AP^{(2)}$, $AP^{(3)}$, etc., que nous nommerons $y(1)$, $y(2)$, $y(3)$, etc., les chiffres (1), (2), (3), etc., désignant le n° des ordonnées, et chaque espace répondant à deux divisions, tel que $AP^{(1)}P^{(2)}P^{(3)}A$, sera composé d'un trapeze $AP^{(1)}gP^{(3)}A$, et d'un segment $P^{(1)}P^{(2)}P^{(3)}$. Cela posé, les divisions AA étant supposées avoir la petitesse convenable, on pourra regarder l'arc de courbe, répondant à deux de ces divisions, comme appartenant à une courbe quelconque ; et comme on a une expression simple du segment parabolique, il conviendra de la supposer de cette espece ; et alors $AP^{(2)}$ sera un diametre de la parabole dont $P^{(1)}gP^{(3)}$ sera une double ordonnée.

Recherche d'une formule pour mesurer une surface plane quelconque.

Nommons h l'intervalle constant entre les ordonnées, l'aire du trapeze $AP^{(1)}gP^{(3)}A$ sera $= (y(1)+y(3))\,n$. L'aire du segment

Digitized by Google

parabolique $P^{(1)}P^{(2)}P^{(3)}$ est égale aux $\frac{2}{3}$ du parallélogramme qui auroit $P^{(2)}g$ pour base, et pour hauteur $2h$.

Pour trouver la valeur de $P^{(2)}g$, menons $P^{(1)}k$ parallele à AX, on aura $P^{(2)}g = AP^{(2)} - Ag = AP^{(2)} - Al - lg$, et $lg = \frac{1}{2}P^{(3)}k = \frac{1}{2}(AP^{(3)} - AP^{(1)})$. Donc $P^{(2)}g = y(2) - y(1) - \frac{1}{2}(y(3) - y(1)) = y(2) - \frac{1}{2}(y(1) + y(3))$. Multipliant cette quantité par $2h$, et prenant les deux tiers du produit, on a, toute réduction faite $(2y(2) - y(1) - y(3))\frac{2}{3}h$ pour la surface du segment parabolique $P^{(1)}P^{(2)}P^{(3)}$; ajoutant cette surface à celle du trapeze, et réduisant, on a $(y(1) + 4y(2) + y(3))\frac{1}{3}h$ pour la surface de la portion de l'aire demandée, comprise depuis l'ordonnée $y(1)$ jusqu'à l'ordonnée $y(3)$ (*); la surface, depuis l'ordonnée $y(3)$ jusqu'à l'ordonnée $y(5)$, sera par conséquent $(y(3) + 4y(4) + y(5))\frac{1}{3}h$; celle depuis l'ordonnée $y(5)$ jusqu'à l'ordonnée $y(7)$, $(y(5) + 4y(6) + y(7))\frac{1}{3}h$, etc. Ajoutant toute ces surfaces, on aura $(y(1) + 4y(2) + 2y(3) + 4y(4) + 2y(5) + \ldots\ldots y(k))\frac{1}{3}h$, k étant un nombre impair qui désigne le nombre des ordonnées $y(1)$, $y(2)$, etc.

Cette formule fournit la regle suivante pour mesurer une aire plane terminée par une courbe quelconque.

Regle déduite de la formule précédente, pour mesurer une surface plane quelconque.

224. *Partagez cette aire en deux par une ligne qui la traverse à-peu-près dans sa plus grande étendue. Divisez cette ligne en un nombre pair de parties égales, et, à chaque point de division, menez une double ordonnée qui se termine de part et d'autre au périmetre de la figure. Ces doubles ordonnées seront en nombre impair, et il faudra les numéroter* (1, 2, 3, etc. .... k), *à compter de la premiere ;* k *est le nombre total impair des doubles ordonnées.*

Cela fait, additionnez 1°. *les doubles ordonnées* 1, k; 2°. les *doubles ordonnées de n° pair*, 2, 4, 6, etc.; 3°. *les doubles ordonnées de n° impair*, 3, 5, etc., *sans y comprendre* 1 et k. *Multipliez la premiere somme par l'unité, la seconde par* 4, *la troisieme par* 2, *ensuite la somme des trois produits par le tiers de la distance constante d'une ordonnée à l'autre, le produit final sera la surface de l'aire proposée.*

Observations sur quelques cas particuliers de cette formule.

225. Il arrivera souvent que la premiere ou la derniere ordonnée, ou l'une et l'autre, seront égales à zéro; il n'en faudra pas moins les faire entrer avec cette valeur, soit dans les n^os,

(*) On suppose, dans la figure, que la courbe tourne sa concavité vers l'axe; l'expression seroit la même si c'étoit la convexité; car dans ce cas $P^{(2)}g$ seroit négatif, et par conséquent la surface du segment seroit $(y(1) + y(3) - 2y(2))\frac{1}{3}h$; il faudroit ensuite soustraire cette surface de celle du trapeze; ce qui donneroit, comme dans le texte, $(y(1) + 4y(2) + y(3))\frac{1}{3}h$.

soit dans les sommes ou produits, et il en sera de même de toute autre ordonnée intermédiaire qui seroit égale à zéro.

Recherche d'une formule pour mesurer un solide engendré par la révolution d'une surface plane quelconque.

226. Qu'on suppose l'aire $AP^{(1)}P^{(2)}$, etc. A, faire une révolution autour de l'axe AX, et représentons le solide qu'elle engendrera par l'aire $Ap^{(1)}p^{(2)}$, etc. A (considérée comme nombre abstrait), de telle sorte que les surfaces des sections faites sur $AP^{(1)}$, $AP^{(2)}$, etc. soient représentées par les ordonnées $Ap^{(1)}$, $Ap^{(2)}$, etc. On conçoit aisément qu'en exprimant la surface de l'aire $Ap^{(1)}p^{(2)}$, etc. A, au moyen des ordonnées $Ap^{(1)}$, $Ap^{(2)}$, etc., par la méthode exposée ci-devant, on aura l'expression du volume du solide engendré par la révolution de $AP^{(1)}P^{(2)}$, etc. A, autour de l'axe AX.

Les ordonnées $Ap^{(1)}$, $Ap^{(2)}$, etc., représentent les surfaces des cercles qui ont pour rayons $AP^{(1)}$, $AP^{(2)}$, etc., ou $y(1)$, $y(2)$, etc. Ces surfaces sont égales à $\frac{1}{2}ny^2(1)$, $\frac{1}{2}ny^2(2)$, $\frac{1}{2}ny^2(3)$, etc., en désignant par n le nombre de fois que le rayon est contenu dans la circonférence. On aura donc $Ap^{(1)} = \frac{ny^2(1)}{2}$, $Ap^{(2)} = \frac{ny^2(2)}{2}$ etc. Substituant ces valeurs au lieu de $y(1)$, $y(2)$, etc., dans la formule générale $(y(1) + 4y(2) + 2y(3) + \text{etc.} \cdots + y(k))\frac{1}{3}h$, elle se change $(y^2(1) + 4y^2(2) + 2y^2(3) + \text{etc.} \cdots + y^2(k))\frac{1}{6}nh$.

Application de cette formule à quelques cas particuliers.

227. Si le solide proposé est un cylindre dont le rayon de la base soit a, et la hauteur L, la ligne $P^{(1)}$, $P^{(2)}$, étant droite, dans ce cas, il suffira de diviser l'axe en deux parties, et la formule se changera en $(a^2 + 4a^2 + a^2)\frac{1}{6}n \cdot \frac{1}{2}L = L \cdot \frac{1}{2}na^2 =$ la hauteur multipliée par la surface de la base, comme on le sait d'ailleurs.

Si le solide est un cône dont le rayon de la base soit a et la hauteur L, cette hauteur étant encore divisée en deux parties, on aura $(o^2 + 4\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2)\frac{1}{6}n \cdot \frac{1}{2}L = \frac{1}{3}L \cdot \frac{1}{2}na^2 =$ la base multipliée par le tiers de la hauteur. Lorsque le cône sera tronqué, nommant a le rayon de la petite section, et b celui de la grande section ou de la base, la formule deviendra

$$(a^2 + 4\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + b^2)\frac{1}{6}n \cdot \frac{1}{2}L = (a^2 + ab + b^2)\frac{nL}{2.3}.$$

Dans le cas du paraboloïde, supposant toujours l'axe divisé en deux, et sa longueur $= 2h$, on aura $y^2(2) = ph$, $y^2(3) = 2ph$, et la formule deviendra $(o + 4ph + 2ph)\frac{1}{6}nh = \frac{1}{2}\left(\frac{n}{2} \cdot 2ph \cdot 2h\right)$ $= \frac{1}{2}(\frac{1}{2}ny^2(3) \cdot 2h) =$ la moitié du cylindre circonscrit.

Dans le cas du demi-ellipsoïde qui renferme celui de la sphere,

Digitized by Google

nommant a le demi-grand axe, b le demi-petit axe, on aura, en prenant pour points de division les deux extrémités et le milieu du demi-grand axe, $y^2(2) : y^2(3) :: \frac{1}{2}a \times \frac{3}{2}a : a^2 :: 3 : 4$; d'où $y^2(2) = \frac{3}{4}y^2(3) = \frac{3}{4}b^2$, et la formule deviendra $(o + 4(\frac{3}{4}b^2) + b^2)\frac{1}{6}n \cdot \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}nb^2 \cdot \frac{2}{3}a =$ les deux tiers du cylindre circonscrit.

Tous les exemples précédents, dont les résultats sont rigoureux, fournissent une preuve de l'exactitude de la formule pour évaluer les solidités. Passons à la recherche des centres de gravité.

Recherche d'une formule pour trouver le centre de gravité d'une surface plane quelconque.

228. Le centre de gravité du segment parabolique $P^{(1)}P^{(2)}P^{(3)}$ est évidemment sur la ligne $gP^{(2)}$; ainsi il est éloigné de $AP^{(1)}$ de la longueur $AA = h$. Le centre de gravité du trapeze rectiligne $AP^{(1)}P^{(3)}A$, est éloigné de la même ligne $AP^{(1)}$ de $\left(\frac{y(1)+2y(3)}{y(1)+y(3)}\right)\frac{2}{3}h$ (199).

Cela posé, la surface du segment parabolique $P^{(1)}P^{(2)}P^{(3)}$ est (223), $(2y(2) - y(1) - y(3))\frac{2}{3}h$, et le moment de cette surface, ou son produit par sa distance à la ligne $AP^{(1)} = (2y(2) - y(1) - y(3))\frac{2}{3}h^2$. Le produit de la surface du trapeze, par la distance de son centre de gravité à la même ligne, sera $(y(1) + y(3)\,h \cdot \left(\frac{y(1)+2y(3)}{y(1)+y(3)}\right)\frac{2}{3}h = (y(1) + 2y(3)\frac{2}{3}h^2$. Ajoutant les deux produits précédents, et divisant leur somme par la somme des surfaces, conformément aux regles données précédemment, on a, $\frac{[(y(1)+2y(3)]\frac{2}{3}h^2 + [2y(2) - y(1) - y(3)]\frac{2}{3}h^2}{[(y(1)+4y(2)+y(3)]\frac{1}{3}h} = \left(\frac{4y(2)+2y(3)}{y(1)+4y(2)+y(3)}\right)h$ pour la distance du centre de gravité du trapeze mixtiligne $AP^{(1)}P^{(2)}P^{(3)}A$ à la ligne $AP^{(1)}$, et le produit de cette distance, par la surface du même trapeze, sera $(4y(2) + 2y(3))\frac{1}{3}h^2$. Pareillement la distance du centre de gravité du trapeze mixtiligne $AP^{(3)}P^{(4)}P^{(5)}A$, à la ligne $AP^{(3)}$, sera $\left(\frac{4y(4)+2y(5)}{y(3)+4y(4)+y(5)}\right)h$, et la distance du même centre, à la ligne $AP^{(1)}$, sera $\left(\frac{4y(4)+2y(5)}{y(3)+4y(4)+y(5)}\right)h + 2h = \left(\frac{2y(3)+12y(4)+4y(5)}{y(3)+4y(4)+y(5)}\right)h$, qui, multipliée par la surface $(y(3) + 4y(4) + y(5))\frac{1}{3}h$ de ce trapeze, donne $(2y(3) + 12y(4) + 4y(5))\frac{1}{3}h^2$. On trouvera, par un procédé semblable, que le produit de la surface du trapeze mixtiligne $AP^{(5)}P^{(6)}P^{(7)}A$ qui suivroit, par la distance de son centre de gravité à la ligne $AP^{(1)}$, seroit égale à $(4y(5) + 20y(6) + 6y(7))\frac{1}{3}h^2$.

Ajoutant ensuite les produits des trapezes mixtilignes, par les distances

Digitized by Google

distances de leurs centres de gravité, à la ligne AP[(a)], et divisant le tout par la somme des surfaces de ces trapezes, on a l'expression $\frac{[4y(2)+2y(3)]\frac{1}{2}h^2+[2y(3)+12y(4)+4y(5)]\frac{1}{2}h^2+[4y(5)+20y(6)+6y(7)]\frac{1}{2}h^2}{[y(1)+4y(2)+2y(3)+4y(4)+2y(5)+4y(6)+y(7)]\frac{1}{2}h}$

$= \left(\frac{[4y(2)+4y(3)+12y(4)+8y(5)+20y(6)+6y(7)]}{y(1)+4y(2)+2y(3)+4y(4)+2y(5)+4y(6)+4y(7)}\right)h =$

$\left(\frac{0.y(1)+1.4y(2)+2.2y(3)+3.4y(4)+4.2y(5)+5.4y(6)+6.y(7)}{y(1)+4y(2)+2y(3)+4y(4)+2y(5)+4y(6)+y(7)}\right)h.$

Les termes du dénominateur de cette fraction sont les mêmes qui entrent dans la mesure de la surface, et les termes du numérateur sont la suite des termes du dénominateur, multipliés par la suite naturelle des nombres 0, 1, 2, 3, etc.; ainsi, pour trouver la distance du centre de gravité d'un plan à la ligne qui le termine, on aura la regle suivante :

Regle déduite de la formule précédente, pour trouver le centre de gravité d'une surface plane quelconque.

229. 1°. *Écrivez dans une premiere colonne la suite d'ordonnées qui entrent dans l'expression de la surface, multipliées chacune par le nombre convenable, indiqué par la formule de l'article* (223), *et faites-en une somme; 2°. écrivez dans une colonne, à côté, la suite naturelle des nombres* 0, 1, 2, 3, *etc.; 3°. multipliez chaque nombre de la premiere colonne par le nombre qui lui correspond dans la seconde; ce qui donnera une troisieme colonne; 4°. multipliez la somme de la troisieme colonne par l'intervalle d'une ordonnée à l'autre, et divisez le produit par la somme de la premiere colonne, le quotient marquera la distance du centre de gravité du plan à la premiere ordonnée.*

On remarquera, en passant, que cette premiere ordonnée ne doit point se trouver dans la troisieme colonne, puisqu'elle a été multipliée par zéro.

Formule pour trouver le centre de gravité d'un solide de révolution engendré par une surface plane quelconque.

230. En employant un raisonnement analogue à celui qui a servi à mesurer le solide de révolution, d'après l'expression de la surface du plan générateur, on verra que, pour ramener la valeur de la distance du centre de gravité de ce plan à celle du centre de gravité du solide de révolution, il faut substituer à chaque ordonnée la surface du cercle qu'elle engendreroit dans sa révolution, c'est-à-dire l'élever au quarré, et la multiplier par $\frac{1}{2}n$; ainsi la distance du centre de gravité du solide de révolution, au plan qui renferme le cercle engendré par la premiere ordonnée, est, en divisant haut et bas par $\frac{1}{2}n$,

$$h\left(\frac{0.y^2(1)+1.4y^2(2)+2.2y^2(3)+3.4y^2(4)+\text{etc.}\ldots\ldots+(k-1)y^2(k)}{y^2(1)+4y^2(2)+2y^2(3)+4y^2(4)+\text{etc.}\ldots\ldots+y^2(k)}\right).$$

Voici quelques applications aux solides dont il est question à l'art. (227).

Digitized by Google

Application de cette formule à quelques cas particuliers.

231. Cette formule, appliquée à un cylindre dont le rayon de la base est a, et la longueur de l'axe L, se change en $\left(\frac{0.a^3+1.4a^3+2.a^3}{a^3+4a^3+a^3}\right)\frac{L}{2}=\frac{L}{2}$ la demi-longueur de l'axe.

Si le solide est un cône dont le rayon de la base soit a, et la longueur de l'axe L, la formule devient

$$\left(\frac{0\cdot 0^2+1\cdot 4\left(\frac{a}{2}\right)^2+2a^2}{0^2+4\cdot\left(\frac{a}{2}\right)^2+a^2}\right)\frac{L}{2}=\frac{3}{4}L,$$

comme on l'a vu (206). Supposant le cône tronqué, et nommant a le rayon de la petite section, b celui de la grande section ou de la base, L la longueur de l'axe, ou la distance des deux sections, la formule devient

$$\left(\frac{0\cdot a^2+1\cdot 4\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+2\cdot b^2}{a^2+4\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+b^2}\right)\frac{1}{2}L=\left(\frac{(a+b)^2+2b^2}{(a+b)^2-ab}\right)\frac{1}{4}L,$$

expression qui revient à celle de l'article ci-dessus cité.

Dans le cas du paraboloïde, h étant la demi-longueur de l'axe, et p le parametre, la formule devient $\left(\frac{0.0^2+1.4ph+2.2ph}{0^2+4ph+2ph}\right)h=\frac{2}{3}\cdot 2h$.

Dans le cas du demi-ellipsoïde qui renferme celui de la sphere, nommant a le demi-grand axe, b le demi-petit axe, la formule devient $\left(\frac{0.0^2+1.4(\frac{1}{4}b^2)+2.b^2}{0^2+4(\frac{1}{4}b^2)+b^2}\right)\frac{1}{2}a=\frac{5}{8}a$, ainsi qu'on l'a vu art. (208).

Toutes ces applications, ainsi que celles de l'art. (227), n'exigent la division de l'axe qu'en deux parties; ce qui donne trois ordonnées, qui est le moindre nombre qu'on puisse avoir. Dans tout autre cas il faudra, si l'on veut avoir beaucoup d'exactitude, faire un nombre de divisions d'autant plus grand que la courbe génératrice sera plus irréguliere.

Formule pour mesurer le volume d'un solide quelconque, régulier ou irrégulier.

232. Si le solide dont on veut mesurer le volume et déterminer le centre de gravité n'est point de révolution, alors les sections équidistantes, faites parallèlement à l'axe, ne seront plus des cercles, mais des figures dont on déterminera la surface par la méthode de l'art. (224). Nommons $s(1)$, $s(2)$, $s(3)$, etc., les surfaces de ces figures numérotées, à compter de la premiere à l'extrémité de l'axe; alors, par le même raisonnement de l'art. (226), on verra que le volume du solide en question est égal à $(s(1)+4s(2)+2s(3)+4s(4)+\text{etc}.....+s(k))\frac{1}{3}h$,

k étant, comme ci-devant, le nombre des sections, et h leur distance.

233. Pareillement, d'après ce qui est dit art. (230), on conçoit que la distance du centre de gravité du solide, au plan qui renferme la section $s(1)$, doit être

$$\left(\frac{0.s(1)+1.4s(2)+2.2s(3)+3.4s(4)+\text{etc.}\ldots\ldots+(k-1)s(k)}{s(1)+4s(2)+2s(3)+4s(4)+\text{etc.}\ldots\ldots+s(k)}\right)h.$$

Formule et méthode pour déterminer le centre de gravité d'un solide quelconque régulier ou irrégulier.

234. En prenant de cette maniere les distances du centre de gravité à trois plans perpendiculaires entre eux, on aura la position de trois autres plans dont l'intersection commune donne le point même où se trouve le centre de gravité.

Lorsqu'on a les sections ou *profils* nécessaires pour déterminer une des distances, il n'est pas nécessaire de prendre sur le corps même les sections ou *profils* nécessaires pour déterminer les deux autres; car on sait très bien que, lorsqu'on a un nombre suffisant de profils d'un corps, paralleles à un plan donné, on peut, par leur moyen, trouver graphiquement les profils du même corps paralleles à un plan quelconque.

Remarque sur les sections ou *profils* des corps.

235. Si le corps irrégulier dont on veut déterminer le centre de gravité est susceptible d'être soulevé, ou remué, et s'il est possible de le suspendre à une corde, ou de le mettre en équilibre sur l'arête d'un prisme, ou sur une pointe quelconque, on déterminera aisément son centre de gravité par le procédé suivant :

Méthode pour déterminer le centre de gravité des corps irréguliers lorsqu'on peut les soulever, les suspendre, etc.

Il faudra, au moyen du fil d'un à-plomb, suspendu à côté du corps, tracer sur la surface de ce corps la ligne de section d'un plan vertical passant par son point de suspension, ou par l'arête du prisme sur lequel il est en équilibre. Ce tracé se fera au moyen de points marqués de distance en distance, dans l'alignement du fil à-plomb et du point de suspension, ou de l'arête du prisme. On déterminera de cette maniere, en mettant le corps en équilibre sur trois différents sens, trois profils qui fourniront six intersections sur la surface du corps, et détermineront les extrémités de trois axes qui se rencontreront en un point commun qui sera le centre de gravité.

De l'équilibre dans les machines.

236. Les réflexions contenues dans les art. (50, 61 et 98), ont suffisamment développé l'idée qu'on doit se faire de ce qu'on appelle *machines* en mécanique. Ce sont en général les instruments qu'emploient les hommes pour appliquer les moteurs

Notions générales sur ce qu'on doit entendre par machines en mécanique

Digitized by Google

d'une maniere plus commode et plus avantageuse à faire équilibre à des résistances, ou à les surmonter.

La machine funiculaire renferme toutes celles où l'action des moteurs et des résistances se transmet sans altération à un point ou à un corps.

237. Les machines qui ne sont que de simple commodité, c'est-à-dire qui n'ajoutent rien à l'énergie du moteur, peuvent se réduire à ce qu'on nomme la machine *funiculaire*, qui consiste en un système de cordes fixées à un point, ou attachées à un corps, et tendues par des moteurs ou des résistances. En effet, abstraction faite de certaines circonstances physiques, telle que la roideur des cordes, etc., l'emploi de cette machine est le même, pour l'effet, que si les moteurs et les résistances étoient immédiatement appliqués au point ou au corps sur lequel ils agissent par l'intermede des cordes.

Nous verrons la maniere dont il faut envisager cette proposition pour la rendre sans exceptions; car il y a des circonstances où la machine funiculaire paroît augmenter l'énergie du moteur : tout ceci sera bientôt développé de maniere à ne laisser aucune équivoque.

Les moteurs qui exercent leur action au moyen et dans la direction de verges inflexibles, rentrent dans le cas de la machine funiculaire.

238. On pourroit comprendre dans les machines de commodité les verges au moyen desquelles on peut transmettre l'action d'un moteur à une certaine distance ; mais comme pousser, au moyen et dans la direction d'une verge inflexible, c'est la même chose, pour l'effet, que tirer dans le sens contraire par le moyen d'une corde, la théorie de la machine funiculaire sera suffisante pour tous les cas où l'action des moteurs et des résistances est transmise sans altération à un point ou à un corps.

Ordre à suivre dans l'exposition de la théorie des machines.

239. Nous avons dit (61 et 98) que tous les autres moyens d'employer des moteurs à vaincre des résistances se réduisoient au levier et au plan incliné. Ce rapprochement se fera aisément quand on aura bien saisi la théorie suivante, où nous examinerons les conditions de l'équilibre dans quatre machines fondamentales déduites immédiatement de ces deux premieres ; savoir, la poulie et le treuil, qui se rapportent au levier ; la vis et le coin, qui se rapportent au plan incliné. Indépendamment de cela, nous reprendrons la théorie du levier et du plan incliné, afin de donner un peu plus d'étendue à ce que nous en avons dit dans les notions préliminaires.

Division générale des machines.

240. Ainsi nous allons traiter successivement de l'équilibre dans la machine funiculaire, le levier, la poulie, le treuil, le plan incliné, la vis, et le coin.

On n'aura point égard, dans cette premiere section, au frottement,

241. Nous n'aurons d'abord aucun égard à certaines circonstances physiques qui influent sur l'équilibre et le mouvement, telles que la roideur des cordes, le frottement, etc., ces

Digitized by Goog

recherches devant faire partie de la cinquieme section. Il nous paroît plus méthodique et plus commode pour l'esprit de considérer d'abord les choses sous l'aspect le plus simple, et de n'augmenter que par gradation la somme des idées à comparer. Il est vrai que la nature suit la marche contraire, car, dès les premiers pas, elle nous présente les objets sous tous les aspects, et ne fait entrer dans notre entendement que des idées complexes; c'est ensuite nous qui, d'après l'impression de nos passions et de nos besoins, les décomposons et les rangeons en différentes classes d'idées abstraites; mais la maniere imparfaite dont se fait cette premiere opération nous fait sentir la nécessité de revenir sur nos pas, de recomposer avec méthode les grouppes que nous avons séparés par circonstance, lorsque nous voulons les disposer pour un corps de doctrine. Les classes d'idées que nous formons, dès l'origine, sont les premieres notions naturelles, plus ou moins étendues, qu'on rencontre chez le commun des hommes, et qui contiennent les germes de toutes les connoissances. L'arrangement et le développement de ces germes, faits avec choix et attention, constituent ce qu'on peut nommer proprement l'*étude*, de laquelle résultent les notions perfectionnées que nous appellons *sciences*.

à la roideur des cordes, etc., et d'autres circonstances physiques qui formeront l'objet de la cinquieme. Motifs et utilité de cette méthode.

De la machine funiculaire.

242. Une corde étant supposée parfaitement flexible et inextensible, et fixée par une de ses extrémités, si on applique un moteur à un point de cette corde, elle se tendra, et sa tension et sa direction pourront représenter la quantité et la direction du moteur par lequel elle est tendue.

La tension et la direction d'une corde représentent celles du moteur qui y est appliqué.

243. Soit A (*fig.* 51) le point de réunion d'un nombre quelconque de cordes tendues par des moteurs M, M′, M″, etc.; et supposons le système libre et en équilibre, il est évident qu'en prenant à volonté l'un de ces moteurs R, on pourra le regarder comme égal et directement opposé à la résultante de tous les autres (105 et 106).

Développement des propriétés fondamentales d'un système de cordes tendues et en équilibre.

244. Il est encore évident que le point A de réunion des directions des moteurs est sollicité de la même maniere que si chacun des moteurs y étoit immédiatement appliqué.

245. Si la machine funiculaire (*fig.* 52) n'est point composée de cordes qui aboutissent au même point, mais qui soient nouées les unes aux autres, en différents faisceaux, la tension d'une quelconque A*m*, A*m*′, etc., des cordes qui aboutissent au point A,

Digitized by Google

sera égale et directement opposée à la résultante de toutes les tensions des cordes aboutissantes aux points m, m', etc. On pourra de plus, sans rien changer à l'état des choses, supposer tous les moteurs aboutissants à un même point m, m', etc., et immédiatement appliqués à ce point; et comme la tension de chacune des cordes Am, Am', etc., est la même à chacun de leurs points, on peut supposer tous les moteurs dont les directions aboutissent à un point m, m', etc., appliqués à un point quelconque de la corde correspondante Am, Am', etc., et par conséquent au point A, pourvu qu'ils y soient placés parallèlement à leur premiere direction. Ainsi le point A, sollicité par les tensions d'un système quelconque de cordes, le sera de la même maniere que si tous les moteurs M, M', M'', M''', etc., étoient immédiatement appliqués à ce point, parallèlement à leur premiere direction.

246. On voit que cette propriété a lieu, soit que les moteurs soient dans le même plan, ou qu'ils soient dans des plans différents; et que puisque, dans le cas de l'équilibre, chacun des moteurs M, M', M'', etc., peut être considéré comme égal et directement opposé à la résultante de tous les autres, ce qui se dit ici du point A peut se dire également d'un point quelconque d'une des cordes auxquelles sont appliqués les moteurs, ou de celles auxquelles les différents faisceaux aboutissent. Ainsi,

Exposition de ces propriétés.

247. *Une machine funiculaire étant composée d'un système quelconque de cordes, liées les unes aux autres, parfaitement flexibles et inextensibles, dont les unes sont tendues par des moteurs, les autres par l'action résultante de la tension des premieres, et le système étant en équilibre, un quelconque des moteurs est égal et directement opposé à la résultante de tous les autres, et un point quelconque d'une des cordes qui composent le système est sollicité de la même maniere que si chacun des moteurs y étoit immédiatement appliqué, parallèlement à sa premiere direction.*

Cas où il y a des points fixes dans le système.

248. S'il y a des points fixes dans le système, les mêmes propriétés auront lieu en substituant à ces points fixes des moteurs équivalents en quantité et direction à l'effort qu'ils éprouvent.

Conséquence de ce qui précede, pour le cas où un corps est sollicité par plusieurs moteurs au moyen d'une machine funiculaire.

249. D'après la propriété qui vient d'être énoncée, si un corps Q (*fig.* 53) est sollicité par un nombre quelconque de moteurs M, M', etc., appliqués à une machine funiculaire, liée au corps Q par la corde AB, l'effet de ces moteurs sera le même que s'ils étoient tous appliqués au point B où la machine funi-

Digitized by Google

culaire est liée au corps dans une direction parallele à celle qu'ils ont dans cette machine.

250. La tension de la corde AB représente la résistance du corps : ainsi on peut dire que l'effet est le même que si tous les moteurs étoient immédiatement appliqués, parallèlement à leur premiere direction, à un point quelconque de la ligne dans la direction de laquelle s'exerce la résistance du corps qu'ils sollicitent au mouvement.

Conformité de la théorie qu'on vient d'exposer, avec l'idée qu'on avoit donnée de la machine funiculaire.

251. Les propositions précédentes servent de développement à la notion que nous avons donnée de la machine funiculaire, où elle n'est considérée que comme un moyen d'employer plus commodément les moteurs que les circonstances empêchent d'appliquer à un point unique, et qui se trouvent disposés de maniere que, sans rien changer à leur énergie, ils produisent le même effet que s'ils étoient tous appliqués à ce point, en conservant leur direction ou leur parallélisme à une ligne donnée, et leur quantité.

Quelles formules doivent donner les conditions de l'équilibre dans la machine funiculaire.

252. Les conditions de l'équilibre, entre plusieurs moteurs appliqués à une machine funiculaire, se déduisent bien aisément des formules de l'art. (150) relatives au mouvement de translation. La considération de celles de l'art. (152), relatives au mouvement de rotation, est inutile ; car nous venons de voir (247) que les moteurs, appliqués à une machine funiculaire en équilibre, agissent de la même maniere que s'ils étoient tous appliqués à un seul point, parallèlement à leurs directions.

Usage de ces formules pour vérifier les conditions de l'équilibre par des projections.

253. Comme il est très ordinaire dans le projet et la composition d'une machine de la dessiner, c'est-à-dire d'en faire les plan, élévation et coupe, il est utile de pouvoir, par des opérations purement graphiques, disposer sur ces projections les forces qu'on veut mettre en équilibre. Voici, dans ce cas, comment les formules de l'art. (152) s'appliqueront à la machine funiculaire.

Soit imaginée dans l'espace une ligne représentant un moteur M en direction et quantité, et projettée en PQ, n° 1, (*fig.* 54), sur le plan YAX, et en PQ, n° 2, sur le plan YAZ, perpendiculaire au premier, les trois axes AY, AX, AZ, étant perpendiculaires entre eux.

Du point P, dans l'espace, menons une parallele à chacun des axes AX, AY, AZ ; et du point Q, toujours dans l'espace, une perpendiculaire sur chacune de ces paralleles ; ces perpendiculaires seront projettées en QR, QS, n° 1, et en QT, n° 2 ; et

Digitized by Google

les lignes PR, PS, n° 1, et PT, n° 2, seront égales aux distances, prises dans l'espace, du point P aux mêmes perpendiculaires.

Cela posé, en conservant la notation de l'art. (150), et considérant dans l'espace les triangles rectangles projettés en QPS, QPR, n° 1, et QPT, n° 2, on voit sur-le-champ que $PS = M\cos.\epsilon$; $PR = M\cos.\gamma$, et $PT = M\cos.\delta$. Nommons Ψ l'angle QPS, n° 1, qui est égal à celui que la projection PQ prolongée feroit avec l'axe AX, et faisons $PQ = \mu$, on aura

$$PS = PQ \times \cos.QPS = \mu\cos.\Psi,$$
$$\text{et } PR = PQ \times \cos.QPR = PQ \times \sin.QPS = \mu\sin.\Psi.$$

Nommons pareillement ρ l'angle QPT, n° 2, qui est égal à celui que la projection PQ prolongée fait avec l'axe AZ, et faisons $PQ = \nu$, on aura

$$PT = PQ \times \cos.QPT = \nu\cos.\rho.$$

Ainsi on a les équations $M\cdot\cos.\epsilon = \mu\cos.\Psi$, $M\cos.\gamma = \mu\sin.\Psi$; $M\cos.\delta = \nu\cos.\rho$. On auroit pareillement, pour les moteurs M',M'', etc., les équations

$$M'\cos.\epsilon' = \mu'\cos.\Psi', \quad M'\cos.\gamma' = \mu'\sin.\Psi',$$
$$M'\cos.'\delta = \nu'\cos.\rho', \quad M''\cos.\epsilon'' = \mu''\cos.\Psi'', \text{ etc.}$$

Substituant ces valeurs dans les formules de l'art. (150), elles deviennent

254. $$\mu\cos.\Psi + \mu'\cos.\Psi' + \mu''\cos.\Psi'' + \text{etc.....} = 0,$$
$$\mu\sin.\Psi + \mu'\sin.\Psi' + \mu''\sin.\Psi'' + \text{etc.....} = 0,$$
$$\nu\cos.\rho + \nu'\cos.\rho' + \nu''\cos.\rho'' + \text{etc.....} = 0.$$

255. Les quantités $\mu\cos.\Psi$, $\mu\sin.\Psi$; $\nu\cos.\rho$, ou les lignes PS, PR, n° 1, PT, n° 2, qu'elles représentent, sont égales aux projections P'Q', P''Q'', n° 1, et $p'q'$, n° 2, des lignes PQ, n° 1, et PQ, n° 2, sur les axes AX, AY, et AZ; ainsi les conditions exprimées par les équations de l'article précédent peuvent s'énoncer ainsi:

Exposition d'une méthode pour faire cette vérification.

256. *Si plusieurs moteurs, appliqués à une machine funiculaire, sont en équilibre, et qu'on ait le plan et l'élévation de la machine, imaginez sur la direction de chacune des cordes, à laquelle est appliqué un moteur, une longueur qui soit proportionnelle à ce moteur. Faites le plan et l'élévation de toutes ces longueurs. Tracez sur le plan deux lignes ou axes perpendiculaires entre eux, et sur l'élévation un troisieme axe perpendiculaire au plan; les plans et les élévations des longueurs qui représentent les*

Digitized by Google

les moteurs, projettées sur les axes dont on vient de parler, doivent former sur chacun de ces axes une somme égale à zéro, en donnant des signes différents aux moteurs qui tirent en sens différent, parallèlement à un même axe.

257. Cette proposition, qui n'est qu'une maniere d'énoncer le théorême de l'art.(112), fournit un moyen simple de combiner graphiquement les moteurs et les résistances appliquées à une machine funiculaire composée de cordes dirigées dans des plans quelconques, et dont on a le plan et l'élévation.

Elle peut servir à combiner graphiquement l'équilibre d'une machine funiculaire.

Si l'on veut employer le calcul, il faut introduire dans les formules précédentes (254) les angles formés par les moteurs, et les surfaces planes sur lesquelles ils sont mis en plan et en élévation. Soit σ l'angle que forme la direction du moteur M avec le plan de la machine, et τ l'angle que forme cette direction avec l'élévation, on verra aisément que $\mu = M \cos.\sigma$, et que $\nu = M \cos.\tau$, et ainsi des autres moteurs.

Application du calcul à déterminer l'équilibre d'un système de corde.

Substituant ces valeurs, les formules de l'art.(254) deviennent

258. $$M\cos.\sigma\cos.\Psi + M'\cos.\sigma'\cos.\Psi' + M''\cos.\sigma''\cos.\Psi'' + \text{etc.} = 0.$$
$$M\cos.\sigma\sin.\Psi + M'\cos.\sigma'\sin.\Psi' + M''\cos.\sigma''\sin.\Psi'' + \text{etc.} = 0.$$
$$M\cos.\tau\cos.\rho + M'\cos.\tau'\sin.\rho' + M''\cos.\tau''\sin.\rho'' + \text{etc.} = 0.$$

Formules pour cet objet.

259. On peut éliminer de ces équations deux des quantités Ψ, σ, τ et ρ, car on voit d'abord que PT (*fig.* 54), qui, dans le triangle PTQ, n° 2, est égale à M cos.τ cos.ρ, considérée, dans l'espace, dans le triangle qui a PQ, n° 1, pour base, et M pour hypothénuse, est égale à M sin.σ; ainsi on a l'équation M sin.σ = M cos.τ cos.ρ, ou sin.σ = cos.τ cos.ρ; on peut donc, aux lignes trigonométriques de la troisieme équation de l'article précédent, substituer sin.σ, sin.σ', sin.σ'', etc.; ensuite le triangle rectangle PTQ, n° 2, donne $PQ = \sqrt{(\overline{PT}^2 + \overline{QT}^2)}$, ou $M\cos.\tau = \sqrt{((M\cos.\tau\cos.\rho)^2 + (M\cos.\sigma\sin.\Psi)^2)}$, qui, après les réductions, et en faisant attention que $\sqrt{(1 - \cos.^2\rho)} = \sin.\rho$, devient $\frac{\cos.\tau}{\cos.\sigma} = \frac{\sin.\Psi}{\sin.\rho}$.

Réduction de ces formules au moindre nombre possible d'indéterminées.

Ces deux équations fournissent, pour τ et ρ, les valeurs suivantes, $\cos.\tau = \sqrt{(\sin.^2\sigma + \sin.^2\Psi\cos.^2\sigma)}$, et $\cos.\rho = \frac{\sin.\sigma}{\sqrt{(\sin.^2\sigma + \sin.^2\Psi\cos.^2\sigma)}}$, d'où on tire $\cos.\tau\cos.\rho = \sin.\sigma$, qui est la premiere des deux équations ci-dessus.

260. En éliminant ainsi τ et ρ des équations de l'art.(258), il ne restera que les quantités M, σ et Ψ, c'est-à-dire la valeur

Digitized by Google

de chaque moteur, l'angle que fait sa direction avec un plan donné, et l'angle que fait la projection de cette direction avec une ligne donnée dans ce plan. Ces deux angles suffisent pour déterminer dans l'espace une parallele à la direction du moteur, et par conséquent sa position, si un point de sa direction est donné; ainsi on peut, au moyen de ces trois équations, déterminer, dans une machine funiculaire en équilibre, la tension et la direction d'une des cordes, lorsque ces éléments sont connus pour les autres, ou, ce qui revient au même (247), trouver la résultante des tensions de toutes les autres cordes.

Elles peuvent servir à déterminer la tension et la direction inconnue d'une des cordes d'une machine funiculaire, ces choses étant connues pour les autres cordes.

En effet, soit M la tension, σ l'angle que fait la corde avec un plan donné, et Ψ l'angle que fait sa projection sur ce plan avec une ligne donnée dans le même plan; nommons $S(m\cos.s\cos.x)$ la somme donnée de tous les produits de la forme $M'\cos.\sigma'\cos.\Psi'$, etc., $S(m\cos.s\cdot\sin.x)$ la somme donnée de tous les produits de la forme $M'\cos.\sigma'\sin.\Psi'$, etc., et $S(m\sin.s)$ la somme donnée de tous les produits de la forme $M'\sin.\sigma'$, etc., les trois équations de l'art. (258) deviendront

$$M\cos.\sigma\cos.\Psi + S(m\cos.s\cos.x) = 0,$$
$$M\cos.\sigma\sin.\Psi + S(m\cos.s\cdot\sin.x) = 0,$$
$$\text{et } M\sin.\sigma + S(m\sin.s) = 0.$$

Faisant, pour abréger,

$$S(m\cos.s\cos.x) = a,\ S(m\cos.s\cdot\sin.x) = b, \text{ et } S(m\sin.s) = c,$$

les trois équations précédentes donneront

$$\text{tang.}\Psi = \frac{b}{a}, \text{ ou } \sin.\Psi = \frac{b}{\sqrt{(a^2+b^2)}},\ \text{tang.}\sigma = \frac{c}{\sqrt{(a^2+b^2)}}, \text{ ou}$$
$$\sin.\sigma = \frac{c}{\sqrt{(a^2+b^2+c^2)}}, \text{ et } M = \sqrt{(a^2+b^2+c^2)}$$

Et en général à déterminer la résultante de plusieurs moteurs dirigés dans des plans quelconques et agissant sur un corps.

261. On peut par le même procédé, un nombre quelconque de moteurs qui agissent sur un corps étant donné, en déterminer un qui leur fasse équilibre relativement au mouvement de translation, et fixer dans l'espace une ligne parallele à sa direction. Nous nous occuperons dans le chapitre suivant de ce qui concerne le mouvement de rotation.

La résultante de tous les moteurs appliqués à une machine funiculaire est plus petite que la somme de ces moteurs.

Si, dans la machine funiculaire, un des moteurs, M par exemple, considéré comme résultante de tous les autres, est supposé parallele à l'axe AX (*fig.* 54), on aura $\cos.\sigma = 1$, $\cos.\Psi = 1$, et la premiere des équations de l'art. (258) deviendra $M = M'\cos.\sigma'\cos.\Psi' + M''\cos.\sigma''\cos.\Psi'' + \text{etc.}$ Comme chacun des facteurs $\cos.\sigma'\cos.\Psi'$, $\cos.\sigma''\cos.\Psi''$, etc., du second membre

est plus petit que l'unité, on a évidemment $M < M' + M'' + \text{etc.}$; ainsi la résultante de tous les moteurs appliqués à une machine funiculaire est plus petite que la somme de tous ces moteurs, en donnant des signes négatifs à tous ceux dont l'action, décomposée parallèlement à celle de cette résultante, tend à tirer du même côté qu'elle.

Cas où les moteurs et les cordes sont dans le même plan.

262. Lorsque tous les moteurs et toutes les cordes qui composent la machine seront dans le même plan, ou dans des plans paralleles (*fig.* 52), les projections sur les axes, énoncées à l'art. (256), seront celles des moteurs eux-mêmes, et se feront sur les deux axes AX et AY; ainsi, en supposant que BR soit la tension d'une des cordes, ou la résultante de toutes les autres tensions, la projection B′R′ sera égale à la somme des projections de M, M′, M″, etc., sur l'axe AX, en donnant les signes convenables; il sera de même de B″R″ à l'égard des projections faites sur l'axe AY.

Méthode pour trouver dans ce cas la tension et la direction inconnues d'une des cordes, ou la résultante d'un nombre quelconque de moteurs agissant dans le même plan.

263. Dans le cas dont on vient de parler, $\sin.\sigma = 0$; $S(m\sin.s) = 0$, art. (260), et $\cos.\sigma = 1$. Ensuite l'angle Ψ redevient l'angle ϵ des formules générales (150); ainsi les équations de l'art. (260) se réduisent à $M\cos.\epsilon + S(m\cos.b) = 0$, $M\sin.\epsilon + S(m\cdot\sin.b) = 0$, les seconds termes de ces équations désignant les sommes connues analogues à celles de l'article cité.

Faisant $S(m\cos.b) = a$, et $S(m\sin.b) = b$, on a $M = \sqrt{(a^2 + b^2)}$, et $\text{tang.}\epsilon = \frac{b}{a}$, ou $\sin.\epsilon = \frac{b}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$; ce qui détermine la résultante des tensions des cordes, l'angle qu'elle fait avec l'axe AX, et en général la quantité et la direction de la résultante d'un nombre quelconque de moteurs agissant dans le même plan.

Cas où toutes les cordes, dirigées dans un même plan, aboutissent de plus à un point unique.

264. En conservant toujours l'hypothese de toutes les actions dans le même plan, si les cordes sont toutes assemblées à un point unique A (*fig.* 51), centre commun des directions des moteurs, et que par ce point on fasse passer les deux axes AX, AY, on verra, en appliquant à ce cas ce qui est dit aux articles (256 et 262), et représentant les tensions par AB, AC, AD, etc., que la somme des perpendiculaires Bb', Ee', etc., menées d'un même côté de l'axe AY, est égale à la somme des perpendiculaires Cc', Dd', etc., menées du côté opposé, et qu'il en est de même des perpendiculaires Bb, Cc, etc., et Ee, Dd, etc., menées de chaque côté de l'axe AX.

265. La direction de la résultante de tous les moteurs peut se trouver sur ce même axe AX; alors, comme $\sin.\epsilon = 0$, et

Digitized by Google

$\cos.\mathcal{C} = 1$, les deux équations de l'article (263) se réduisent à $M + M'\cos.\mathcal{C}' + \text{etc.} = 0$, $M'\sin.\mathcal{C}' + M''\sin.\mathcal{C}'' + \text{etc.} = 0$, les angles $\mathcal{C}'$, $\mathcal{C}''$, etc., étant ceux que forment les moteurs M', M'', etc., avec la direction de leur résultante M.

Cas où le nombre des moteurs est réduit à trois.

266. Le nombre des moteurs étant supposé égal à trois, on a $M = M'\cos.\mathcal{C}' + M''\cos.\mathcal{C}''$, et $M'\sin.\mathcal{C}' = M''\sin.\mathcal{C}''$. Cette derniere équation donne $M' : M'' :: \sin.\mathcal{C}'' : \sin.\mathcal{C}'$, c'est-à-dire que, lorsque les tensions de deux cordes sont en équilibre avec une troisieme, la tension de l'une d'elles est proportionnelle au sinus de l'angle formé par l'autre et par la direction de cette troisieme.

Soient (*fig.* 55) les trois moteurs M, M', M'', agissant sur le point A, et en équilibre. Comme chacun, indifféremment, peut être considéré comme la résultante des deux autres, on aura, en prenant AB, AC, AD, sur leurs directions, pour les représenter, les trois proportions

$$\left.\begin{array}{l} M : M' :: \sin.CAD : \sin.DAB \\ M' : M'' :: \sin.DAB : \sin.CAB \\ M : M'' :: \sin.CAD : \sin.CAB \end{array}\right\} \text{ d'où } M : M' : M'' :: \sin.CAD : \sin.DAB : \sin.CAB,$$

c'est-à-dire que chaque tension ou moteur est proportionnel au sinus de l'angle formé par la direction des deux autres.

Ce qui a lieu lorsque le point de réunion n'est pas un nœud fixe. Circonstances où la machine funiculaire donne de l'avantage au moteur, qui néanmoins ne contredisent pas les notions données précédemment de cette machine.

267. Si la corde AB (*fig.* 56) n'est point attachée au point A par un nœud fixe, mais par un nœud coulant, poulie ou boucle qui puisse glisser le long de la corde CAD, alors, dans le cas de l'équilibre, les tensions des deux portions AC, AD, seront égales, c'est-à-dire qu'on aura $M' = M''$, et, par ce qui vient d'être dit, on aura aussi *angle* BAC = *angle* BAD = $\mathcal{C}'$. L'équation $M = M'\cos.\mathcal{C}' + M''\cos.\mathcal{C}''$ deviendra $M = 2M'\cos.\mathcal{C}'$ (*).

(*) Lorsque la longueur de la corde et la direction du moteur M seront données, on pourra toujours déterminer la valeur de l'angle $\mathcal{C}'$. Pour cela, par chacune des extrémités E et H de la corde (*fig.* 56), menons EZ perpendiculaire, et HY parallele à cette direction, qui se rencontrent en F. Supposons que le point A est celui où la boucle doit s'arrêter pour l'équilibre; prolongeons EA jusqu'en K, AB jusqu'en L, et AH jusqu'en G. On doit avoir, à cause de l'équilibre, angle LAE = angle LAG, et, à cause des paralleles, AL, KF; FHG, ou AHK = LAG; EAL, ou LAG = AKH. Donc AKH = AHK; donc AK = AH; d'où EK = EA + AH = la longueur de la corde.

Nommons cette longueur l, la ligne connue EF, a; on aura, dans le triangle rectangle EFK, $\sin.EKF = \sin.\mathcal{C}' = \frac{a}{l}$. Employant cette valeur dans l'équation $M = 2M'\cos.\mathcal{C}'$, elle devient $M = 2M'\sqrt{\frac{(l^2-a^2)}{l^2}}$; d'où $M' = \frac{M}{2\sqrt{\frac{(l^2-a^2)}{l^2}}}$; équation qui donne la tension de la corde.

Si l'on veut trouver le point A par une construction géométrique, rien n'est plus aisé. Ayant mené la parallele FY à la direction du moteur d'un rayon égal à la longueur de la corde, déterminez sur cette parallele le point d'intersection K, et tracez la ligne EK; au point H

Digitized by Google

On voit par cette équation que lorsque CAD sera un angle très obtus, cos. c' approchera d'être égal à zéro, et que le rapport de M′ à M sera très grand, tellement que si CAD est une ligne droite, il faudra, pour l'équilibre, que M′ soit infiniment grand par rapport à M. Si donc on a (*fig.* 57) une masse P sollicitée, par un moteur aussi grand qu'on voudra, à glisser le long de CB, qu'à cette masse on attache une corde DAR, fixée en R, à un obstacle invincible, on pourra, en diminuant suffisamment l'angle DAR, faire équilibre au mouvement de P avec un moteur M agissant sur le point A, et aussi petit qu'on voudra.

Ceci fournit un moyen d'employer la machine funiculaire à surmonter une grande résistance par le moyen d'un moteur beaucoup moindre, et cependant ne contredit point ce que nous avons dit art. (237 et 251), qui demeure toujours vrai, en considérant, ainsi qu'on doit le faire, l'effort produit au point R comme un troisieme moteur.

Il est encore quelques circonstances où la disposition de la machine funiculaire paroît donner au moteur plus d'énergie pour vaincre une résistance; par exemple si un poids p, suspendu à l'extrémité d'une corde, est sollicité par une puissance q qui fasse, avec la verticale, un angle f, l'angle que fera la corde avec la verticale, en vertu de l'action de cette puissance, étant nommé k, on trouvera aisément qu'il faut, pour l'équilibre, qu'on ait $p \sin.k = q \sin.(f - k)$. Si L est la longueur de la corde, h la quantité dont son extrémité s'écartera de la verticale, on aura $\sin.k = \frac{h}{L}$; et substituant dans l'équation précédente $\frac{ph}{L} = q \sin.(f - k)$, d'où $h = \frac{q}{p} L \sin.(f - k)$. Ainsi la

faites l'angle FHG = FKE, prolongez GH vers EK, le point A de rencontre sera celui demandé.

Cette construction peut servir à déterminer graphiquement la position que prendra une lanterne attachée, au moyen d'un nœud coulant, à une corde fixée par ses deux bouts. Elle est tirée de *la Mécanique* de M. l'abbé Bossut.

Si le nœud A est fixe (*fig.* 58), la corde étant attachée aux points immobiles et donnés de position E et H, on pourra, connoissant la direction et la tension de AB, déterminer les directions et les tensions de AE et AH.

Nommons M, M′, M″, les tensions de AB, AH et AE; c' et c'' les angles BAH et BAE; on aura (266) $M = M' \cos.c' + M'' \cos.c''$, et $M' \sin.c' = M'' \sin.c''$. On tire de la combinaison de ces deux équations $M' = \frac{M \sin.c''}{\sin.(c' + c'')}$, et $M'' = \frac{M \sin.c'}{\sin.(c' + c'')}$. Maintenant, pour déterminer c' et c'', je mene EH, que la direction prolongée de AB rencontre en D; les trois côtés du triangle EAH sont connus, ainsi que l'angle ADH; on trouvera donc, par la trigonométrie, les angles AEH, AHE, et on aura BAH, ou $c' = ADH + AHD$, et $c'' = AED + ADE$.

Pour déterminer géométriquement le point A, ainsi que les tensions de AH et AE, il faudra, des centres H et E, et avec les rayons AH et AE, décrire deux arcs de cercle qui se couperont

Digitized by Google

puissance, la résistance et les angles qu'elles font avec la verticale restant les mêmes, le poids p s'éloignera d'autant plus de la verticale que la corde sera plus grande; et en supposant constante la distance du poids à cette même verticale, la même puissance q fera équilibre à un poids aussi grand qu'on voudra, si on donne à la corde la longueur convenable.

Nous verrons, à leurs articles, quelle influence a sur le tirage des chevaux la longueur des traits avec lesquels ils sont attelés aux voitures, et d'autres observations utiles dans la pratique, qui, ainsi que les précédentes, rentrent dans les principes théoriques que nous avons donnés.

Du polygone funiculaire.

268. Soit AAA″, etc. (*fig.* 61), la projection d'une corde sollicitée à chacun de ses points A, A′, A″, etc., par des moteurs M, M′, M″, etc., elle formera dans l'espace un polygone dont les côtés seront deux à deux, dans un même plan, avec la direction du moteur appliqué à l'angle formé par ces deux côtés. Le premier et le dernier de ces moteurs seront représentés, tant en quantité qu'en direction, par la tension et la direction du côté du polygone auquel il sera appliqué.

Recherche de formules pour trouver les tensions et les directions des côtés du polygone funiculaire, supposés dans des plans quelconques, lorsque les quantités et les directions des moteurs sont données.

269. D'après cela, et dans l'hypothese de l'équilibre, si la projection AA′A″, etc. étoit elle-même une machine funiculaire dont les moteurs fussent égaux, en quantité et direction, aux projections AB, A′B′, A″B″, etc., des moteurs M, M′, M″, etc., elle seroit aussi en équilibre (art. 253 et suivants). Nommons μ, μ', μ'', etc., les projections AB, A′B′, A″, B″, etc., δ', δ'', etc., les angles AA′B′, A′A′B″, etc., formés par les directions des projections des moteurs M′, M″, etc., et les côtés AA′, A′A″, etc., à

au point cherché. Menant par ce point BAD parallele à la direction du moteur donné M, et prenant Ab pour le représenter, on menera bh et be paralleles à AE et AH, et les parties Ae et Ah seront les tensions cherchées : la démonstration de cette construction est trop simple pour l'écrire.

Supposons que les tensions M′ et M″ sont données, c'est-à-dire qu'un poids R (*fig.* 59) étant attaché à un point déterminé A de la corde CAB, supposée non pesante, cette corde passe sur deux poulies C et B, données de position, et tienne suspendus à chacune de ses extrémités deux poids connus P et Q. Pour déterminer géométriquement la position de AB et de AC, tracez à part la verticale da qui représente le poids R, et formez le triangle ade tel que de et ae représentent les poids Q et P. Par le point B, menez BA parallele à ae, et par le point C menez CA parallele à de, le point d'intersection A de ces deux paralleles sera celui qu'on cherche; car, prenant AD pour représenter R, et achevant le parallélogramme AEDF, on voit, par la similitude des triangles ADE, ade, que DE et DF doivent représenter les tensions de AC et AB, et qu'ainsi elles sont, dans cette position, en équilibre avec le poids R.

On peut, au moyen des côtés connus du triangle ADE, calculer les trois angles : menant l'horizontale BG, et prolongeant la verticale AD jusqu'en G, l'angle GBC sera donné, puisque les points B et C le sont; l'angle GBA est aussi connu, puisqu'il est complément de GAB; l'angle CBA = GBA — GBC le sera donc aussi : ainsi on connoîtra dans le triangle CAB

Digitized

l'extrémité desquels elles se trouvent, φ', φ'', etc., les angles AA'A", A'A"A"', etc., T, T', T", etc., les tensions des côtés projettés en AA', A'A", etc., et τ, τ', τ'', etc., les projections des lignes qui représentent ces tensions.

On aura $\tau = \mu$; ensuite $\tau = \mu' \cos.\delta' + \tau' \cos.\varphi'$, et $\mu' \sin.\delta' = \tau' \sin.\varphi'$ art. (266). On tire de là $\tau' = \frac{\mu' \sin.\delta'}{\sin.\varphi'}$, et $\frac{\sin.\varphi'}{\cos.\varphi'} = \text{tang.}\varphi' = \frac{\mu' \sin.\delta'}{\tau - \mu' \cos.\delta'}$. On aura, en appliquant le même raisonnement aux autres côtés du polygone, $\tau'' = \frac{\mu'' \sin.\delta''}{\sin.\varphi''}$, et $\text{tang.}\varphi'' = \frac{\mu'' \sin.\delta''}{\tau' - \mu'' \cos.\delta''}$; $\tau''' = \frac{\mu''' \sin.\delta'''}{\sin.\varphi'''}$, et $\text{tang.}\varphi''' = \frac{\mu''' \sin.\delta'''}{\tau'' - \mu''' \cos.\delta'''}$, etc. On trouveroit des équations semblables pour la projection de la machine funiculaire sur un autre plan.

270. Au moyen de ces équations, si on connoît les quantités et les directions de tous les moteurs, on trouvera les tensions et les directions de tous les côtés du polygone funiculaire : car ayant trouvé, au moyen des équations, $\tau' = \frac{\mu' \sin.\delta'}{\sin.\varphi'}$, et $\text{tang.}\varphi' = \frac{\mu' \sin.\delta'}{\tau - \mu' \cos.\delta'}$, et de leurs analogues, rapportées à la projection sur un autre plan, la tension et la direction du côté projetté en A'A", l'angle $A'A''B'' = \delta''$ sera donné, puisque la quantité et la position de M" sont connues, la quantité μ'' sera aussi connue, par la même raison, on aura donc de quoi déterminer les inconnues τ'', φ'', dans les équations $\tau'' = \frac{\mu'' \sin.\delta''}{\sin.\varphi''}$, $\text{tang.}\varphi'' = \frac{\mu'' \sin.\delta''}{\tau' - \mu'' \cos.\delta''}$, et ainsi de suite.

Cas où les extrémités du polygone funiculaire tiennent à des points fixes.

271. Si chaque extrémité du polygone funiculaire est attachée à un point fixe, les résistances de ces points fixes tiendront lieu de deux moteurs. La tension d'un côté extrême sera

le côté CB et les angles CAB et CBA ; ce qui servira à déterminer par le calcul les côtés AB et AC.

Soit une corde pesante AEB (*fig.* 60) tendue à chacune de ses extrémités par les poids égaux M', M', et ayant ses points A et B dans une même ligne horizontale. Cette corde prendra une courbure qui, lorsque la fleche DE ne sera pas considérable, pourra être considérée comme un arc de parabole. Menant donc les tangentes AC, BC, on aura $DE = \frac{1}{4} DC$. Nommons la longueur totale AEB, l, on aura, à peu de chose près, $AC = AE = \frac{1}{2} l$. Maintenant les tensions aux points A et B, égales à M', peuvent être censées produites par un poids M, agissant à la rencontre C des cordes égales et sans pesanteur CB, CA, supposées fixées en A et B, et ce poids M n'est autre chose que celui de la corde AEB. On a, à cause de l'égalité des angles DCB, DCA ; $M = 2M' \cos.c'$, et $c' = FCB = FCA$. Le triangle rectangle CDA donne $CD = CA \cos.c' = \frac{1}{2} l \cos.c'$; d'où $\cos.c' = \frac{2CD}{l} = \frac{4DE}{l}$. Substituant cette valeur dans l'équation $M = 2M' \cos.c'$, on a $M = M' \frac{8DE}{l}$ et $DE = \frac{lM}{8M'}$; on pourra par-là déterminer la quantité dont une corde baisse dans son milieu lorsqu'on connoîtra la longueur l de cette corde, son poids M, et le poids M' qui sert à la tendre.

la résultante de tous les moteurs qui agissent aux angles du polygone, en y comprenant la tension de l'autre côté extrême; de plus, avec les données de l'article précédent, et connoissant la direction d'un seul côté du polygone, on déterminera de proche en proche, par la méthode exposée dans le même article, les tensions et les directions de tous les autres côtés; la seule différence est qu'au lieu de commencer par un des côtés extrêmes, on commencera par celui des côtés intermédiaires dont on connoîtra la direction.

Cas où tous les côtés du polygone funiculaire sont dans le même plan.

272. Lorsque tous les moteurs agissent dans un plan commun, tous les côtés du polygone funiculaire sont dans ce même plan, qui sera celui où il conviendra de considérer l'action des moteurs. Les équations de l'art.(269) auront toujours lieu, en observant de prendre les quantités μ, μ', etc.; τ, τ', etc.; δ, δ', etc., pour les valeurs mêmes des moteurs appliqués aux angles du polygone, des tensions des côtés, et des angles formés par ces côtés, tant entre eux qu'avec les directions des moteurs.

Formules pour trouver les rapports entre les moteurs appliqués au polygone funiculaire, connoissant les directions respectives des côtés du polygone entre eux, et avec celle des moteurs.

273. On peut, au moyen des équations de l'art. (269), et de toute la théorie qui précede, combiner de différentes manieres les données et les inconnues dans le polygone funiculaire en équilibre, voir les cas où les questions seront déterminées ou indéterminées, et en analyser les différentes propriétés. Voici, par exemple, comment on trouve des équations au moyen desquelles on peut exprimer le rapport entre deux moteurs appliqués à deux angles quelconques du polygone funiculaire, sans y faire entrer la tension des côtés intermédiaires, mais seulement les lignes trigonométriques des angles qu'ils font, soit entre eux, soit avec les directions des moteurs. Supposons tous les moteurs dans le même plan, la tension du côté A'A", considérée comme faisant équilibre à la tension de AA' et à l'action du moteur A'B', ou μ', donne, ainsi qu'on l'a vu, l'équation $\tau' = \frac{\mu' \sin.\delta'}{\sin.\varphi'}$. Cette même tension, considérée comme faisant équilibre à celle de A"A"', et à l'action du moteur A"B", ou μ'', donnera, par une raison absolument semblable, $\tau' = \frac{\mu''.\sin.(B''A''A''')}{\sin.A'A''A'''}$. Mais on a *angle* $B''A''A''' = 360° - (A'A''A'' + A'A''B'') = 360° - (\varphi'' + \delta'')$; donc $\sin.B''A''A''' = -\sin.(\varphi'' + \delta'')$; donc $\tau' = \frac{-\mu''\sin.(\varphi''+\delta'')}{\sin.\varphi''}$. Égalant les deux valeurs de τ', il vient $\frac{\mu'\sin.\delta'}{\sin.\varphi'} + \frac{\mu''\sin.(\varphi''+\delta'')}{\sin.\varphi''} = 0$; d'où $\frac{\mu'}{\mu''} + \frac{\sin.\varphi'}{\sin.\varphi''} \cdot \frac{\sin.(\varphi''+\delta'')}{\sin\delta'} = 0$. On aura, par un calcul pareil, $\frac{\mu''}{\mu'''} + \frac{\sin.\varphi''}{\sin.\varphi'''} \cdot \frac{\sin.(\varphi'''+\delta''')}{\sin.\delta''}$, et ainsi de suite. Ces équations ne renferment

Digitized by Google

ferment point de tensions, et comme le même moteur se trouve toujours dans deux consécutives d'entre elles, on a le moyen de trouver, par des éliminations successives, le rapport entre deux moteurs quelconques.

Usage des formules précédentes pour trouver l'équation de la courbe funiculaire.

274. Cherchons la courbure d'une corde sollicitée à chacun de ses points par des moteurs assujettis à la loi de continuité, et supposons-les d'abord tous dans le même plan.

Pour cela, nous reprendrons l'équation de l'article précédent $\frac{\mu' \sin.\delta'}{\sin.\varphi'} + \frac{\mu'' \sin.(\varphi'' + \delta'')}{\sin.\varphi''} = 0$. Cette équation suppose au côté AA′ une immobilité absolue, car elle exprime 1°. que les points A′ et et A″ n'ont aucun mouvement perpendiculaire aux côtés AA′ et A″A‴; 2°. que le côté A′A″ n'a aucun mouvement dans le sens de sa propre direction. La premiere condition est énoncée par les équations $\tau' = \frac{\mu' \sin.\delta'}{\sin.\varphi'}$ et $\tau' = \frac{-\mu'' \sin.(\varphi'' + \delta'')}{\sin.\varphi''}$; et la seconde, par l'égalité indiquée entre les seconds membres de ces deux équations, au moyen de laquelle on exprime que le côté A′A″ est également sollicité, dans le sens de sa direction, par l'action de tous les moteurs qui agissent tant d'un côté que de l'autre; il ne s'agit plus que d'y introduire les caracteres qui désignent que le polygone funiculaire est une courbe. Pour cela, je la mets sous cette forme $\frac{\mu' \sin.\delta'}{\sin.\varphi'} + \frac{\mu''(\sin.\varphi'' \cos.\delta'' + \sin.\delta'' \cos.\varphi'')}{\sin.\varphi''} = 0$; (car on sait, par la trigonométrie, que $\sin.(\varphi'' + \delta'') = \sin.\varphi'' \cos.\delta'' + \sin.\delta'' \cos.\varphi''$). Mais le polygone étant une courbe, ses côtés deviennent des éléments d'arcs, l'angle φ'', formé par deux éléments consécutifs, est infiniment près de 180°, et on a $\cos.\varphi'' = -1$. Cette considération change l'équation en

$$\frac{\mu' \sin.\delta'}{\sin.\varphi'} - \frac{\mu'' \sin.\delta''}{\sin.\varphi''} + \mu'' \cos.\delta'' = 0.$$

Ensuite, à cause de la loi de continuité,

$$\mu'' = \mu' \pm d\mu', \quad \delta'' = \delta' \pm d\delta', \quad \varphi'' = \varphi' \pm d\varphi',$$

et par conséquent

$$\frac{\mu'' \sin.\delta''}{\sin.\varphi''} = \frac{\mu' \sin.\delta'}{\sin.\varphi'} \pm d\left(\frac{\mu' \sin.\delta'}{\sin.\varphi'}\right), \quad \mu'' \cos.\delta'' = \mu' \cos.\delta' \pm d(\mu' \cos.\delta').$$

Substituant ces valeurs, on a $d\left(\frac{\mu' \sin.\delta'}{\sin.\varphi'}\right) + \mu' \cos.\delta' = 0$. La différentielle $d(\mu' \cos.\delta')$ s'évanouit comme infiniment petite. Il n'en est pas de même de la différentielle $d\left(\frac{\mu' \sin.\delta'}{\sin.\varphi'}\right)$, car

Digitized by Google

sin. φ' étant infiniment petit, $\frac{\mu' \sin.\delta'}{\sin.\varphi'} = \infty$, et par conséquent $d\left(\frac{\mu' \sin.\delta'}{\sin.\varphi'}\right)$ est une quantité finie (*).

Équation générale de la courbe funiculaire plane.

275. Soient VMZ (*fig.* 62) la courbe funiculaire rapportée aux axes AX et AY, QMR la direction du moteur agissant au point M, MT une tangente à la courbe; AP (x), PM (y), les deux co-ordonnées du point M. Nommons l'arc BM, s; l'angle RQA, ϵ; et l'angle MTP, γ; l'angle RMT sera celui que nous avons nommé δ' dans le polygone funiculaire. On a, dans le triangle MTQ, l'angle externe RMT = MTQ + MQT, ou $\delta' = \gamma + \epsilon$; ainsi $\sin.\delta' = \sin.\gamma \cos.\epsilon + \sin.\epsilon \cos.\gamma$, et $\cos.\delta' = \sin.\gamma \sin.\epsilon - \cos.\gamma \cos.\epsilon$; ensuite, par la propriété générale des courbes, $\sin.\gamma = \frac{dy}{ds}$, $\cos.\gamma = \frac{dx}{ds}$; et nommant r le rayon osculateur au point M, $\sin.\varphi' = \frac{ds}{r}$. Substituant toutes ces valeurs dans l'équation $d\left(\frac{\mu' \sin.\delta'}{\sin.\varphi'}\right) + \mu' \cos.\delta' = 0$; et mettant M pour μ', elle devient

$$d\left[\frac{(dy \cos.\epsilon + dx \sin.\epsilon)\,\mathrm{M}r}{ds^2}\right] + \frac{(dy \sin.\epsilon - dx \cos.\epsilon)\,\mathrm{M}}{ds} = 0.$$

Cette équation différentielle étant du troisieme ordre, la triple intégration fournira trois constantes qui se détermineront par les conditions que la courbe doit passer par deux points donnés, et avoir une longueur déterminée.

Cas où les moteurs sont perpendiculaires à la courbe, qui renferme celui où cette courbe est un cercle.

276. Si tous les moteurs sont perpendiculaires à la courbe, on aura $\sin.\epsilon = \frac{dx}{ds}$, $\cos.\epsilon = \frac{dy}{ds}$. Substituant ces valeurs, l'équation se réduit à $d\left[\frac{(dy^2 + dx^2)\,\mathrm{M}r}{ds^2}\right] = 0$; ou, à cause de $dy^2 + dx^2 = ds^2$, à $d\frac{\mathrm{M}r}{ds} = 0$, qui, en faisant ds constant, devient $d(\mathrm{M}r) = 0$, ou $\mathrm{M}r = \mathrm{A}$; ainsi, dans l'hypothese dont il s'agit, les moteurs sont réciproquement proportionnels aux rayons de courbure. Si on y joint la condition de l'égalité des moteurs, alors le rayon de courbure est constant, c'est-à-dire que la courbe est un cercle.

Cas où la corde est pesante et uniformément grosse.

277. Supposons que la courbe funiculaire soit une corde pesante et uniformément grosse, M sera constant et égal à la gravité, et agira sur une masse ds par laquelle il faudra le multiplier lorsque ds sera supposé variable. (*Voyez* la note de l'art. 158). La pesanteur étant de plus supposée agir parallèlement à l'axe AY, on aura $\sin.\epsilon = 1$, $\cos.\epsilon = 0$, et l'équation générale se

(*) Si nous résolvons ces difficultés de la métaphysique du calcul, en employant la théorie de l'*infini*, c'est parceque les solutions tirées de la théorie *des limites* seroient trop longues. Cela ne fait rien à la rigueur des raisonnements, la premiere théorie n'étant qu'une maniere abrégée d'énoncer la seconde. (*Voyez* le calcul intégral de M. Cousin.)

Digitized by Google

réduira, en divisant par Mds, à $d\left(\frac{rdx}{ds}\right)+dy=0$. La premiere intégrale est $\frac{rdx}{ds}=A-y$. Supposons ds constant, on aura, par la propriété générale des courbes, $r=\frac{dyds}{ddx}$. Donc $\frac{ddx}{dx}-\frac{dy}{A-y}=0$; l'intégrale est, log. dx+log. $(A-y)$=log. Bds, ou $dx(A-y)=Bds$. Quarrant les deux membres, on a $dx^2(A-y)^2=B^2ds^2=B^2dx^2+B^2dy^2$, (à cause de $ds^2=dy^2+dx^2$); d'où $\frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt{[(A-y)^2-B^2]}}{\pm B}$.

278. $\frac{dy}{dx}$ exprime la tangente de l'angle que la courbe fait avec l'axe AX des abscisses; pour connoître le point où elle est parallele à cet axe, c'est-à-dire (*fig.* 63) le point E le plus bas de la courbe où la tangente est horizontale, il faut faire $\frac{dy}{dx}=0$; ce qui donnera $y=A-B=DE$. Pour rapporter la courbe à cet axe, nommons EL, x', et LN, y'; on aura, en comparant ces nouvelles co-ordonnées avec les premieres, $y=A-B-x'$ et $x=AD-y'$. Substituant ces valeurs, il vient $\frac{\sqrt{[(x'+B)^2-B^2]}}{\pm B}=\frac{dx'}{dy'}$; et par conséquent $dy'=\frac{\pm Bdx'}{\sqrt{[(x'+B)^2-B^2]}}=\frac{\pm Bdx'}{\sqrt{(x'^2+2Bx')}}$. Intégrant cette équation, on a

Equation finie de la chaînette.

$$y'=\pm B\log.\left\{B+x'+\sqrt{(x'^2+2Bx')}\right\}+\log.C.$$

Pour déterminer la constante log. C, nous supposerons $y'=0$; ce qui donne $x'=0$, et log. $C=\mp B$ log. B, d'où on tire l'intégrale complete

$$y'=\pm B\log.\left\{\frac{B+x'+\sqrt{(x'^2+2Bx')}}{B}\right\},$$

équation finie de la courbe, qui fait connoître que l'axe vertical, passant par le point où la tangente est horizontale, est un diametre, puisqu'à chaque ordonnée y' répondent deux abscisses égales.

279. L'équation différentielle $dy'=\frac{Bdx'}{\sqrt{(x'x'+2Bx')}}$ donne $\sqrt{(dx'^2+dy'^2)}=\frac{(x'+B)dx'}{\sqrt{(2Bx'+x'x')}}$, dont l'intégrale est $EN=\sqrt{(2Bx'+x'x')}=s$. On tire de cette équation $x'=-B+\sqrt{(B^2+s^2)}$.

Rectification de la chaînette.

280. Lorsqu'on voudra construire la chaînette, on sera censé connoître les points B et F de suspension (*fig.* 63) et la longueur BEF de la corde (275); il faudra déterminer la position et la longueur de DE, c'est-à-dire AD et Em, ou CD et En, AC, AB et CF étant donnés, et connoître la valeur de la constante B. Pour cela on rapportera l'équation finie de l'art. (278) au point A, en y substituant pour x', AB + Em $-y$, et pour y', AC $-$ AD $\mp x$; on substituera aussi la valeur de x' dans

Construction de cette courbe.

Digitized by Google

l'équation $s = \sqrt{(2Bx' + x'x')}$. Alors, dans l'équation de la courbe, on fera $x = 0$, et $y =$ AB; ensuite $x =$ AC, et $y =$ CF; et dans l'équation $s = \sqrt{(2Bx' + x'x')}$, on fera $x =$ AC et $s =$ BEF; on aura par ce moyen trois équations qui ne contiendront que les inconnues B, AD et Em, avec des quantités connues : les inconnues pourront donc se déterminer.

Si les points B et F sont de niveau (*fig.* 64), on aura AD $= \frac{1}{2}$ AC, et *arc* EB $=$ *arc* EF $= \frac{1}{2}$ BEF. Dans ce cas, en conservant l'origine au point E, on fera $s = \frac{1}{2}$ BEF dans l'équation $x' = -B \pm \sqrt{(B^2 + s^2)}$; la valeur de x' qui en résultera sera substituée dans l'équation de la courbe, en y faisant en même temps $y' = \frac{1}{2}$ AC, au moyen de quoi elle ne renfermera plus d'autre inconnue que B. Remarquons, en finissant, que les déterminations dont on vient de parler ne pourront se faire que par approximation, à cause que l'équation de la courbe est transcendante.

Recherche des équations de la courbe funiculaire à double courbure.

281. Nous avons supposé que les moteurs qui agissent à chaque point de la machine funiculaire étoient dirigés dans un même plan, et par conséquent que cette courbe étoit plane. On peut, au moyen des principes développés art. (253 et suiv.), trouver l'équation de la courbe funiculaire à double courbure, dont chaque point est sollicité par des moteurs dirigés dans des plans différents, en supposant toujours que chaque espece de variation est assujettie à la loi de continuité. Pour cela, en nommant x, y et z les coordonnées de cette courbe, la supposant projetée sur le plan de x, y, qui seroit le plan XAY (*fig.* 54), et conservant la notation des articles dessus cités, pour avoir l'équation de cette projection, il faut, dans l'équation

$$d\left[\frac{(dy\cos.\,\epsilon + dx\sin.\,\epsilon)\,Mr}{ds^2}\right] + \frac{(dy\sin.\,\epsilon - dx\cos.\,\epsilon)\,M}{ds} = 0,$$

substituer à M sa projection M cos. σ; à ϵ, qui exprime dans ce cas le même angle que dans la premiere des équations de l'article (150), sa projection Ψ; et nommant s' la projection de s, etc., r' le rayon de courbure, on aura, pour l'équation demandée,

$$dy\left[\frac{(dx\cos.\,\Psi + dx\sin.\,\Psi)\,M\cos.\,\sigma\,r'}{ds'\,ds'}\right] + \frac{(dy\sin.\,\Psi - dx\cos.\,\Psi)\,M\cos.\,\sigma}{ds'} = 0.$$

Ensuite nommant dans le plan des y, z, où l'axe des z fait la fonction de celui des x dans le plan des x, y; nommant, dis-je, M cos. τ, ρ, r'', et s'' ce qu'on a nommé M cos. σ, Ψ, r' et s' dans

l'équation précédente, on a, pour l'équation de la projection sur le plan des y, z,

$$d\left[\frac{(dy\cos.\rho + dz\sin.\rho)\,M\cos.\tau r''}{dz''dz''}\right] + \frac{(dy\sin.\rho - dz\cos.\rho)\,M\cos.\tau}{dz''} = 0.$$

On peut, d'après ce qui a été dit art.(259), éliminer de cette seconde équation les quantités τ et ρ; car on y a vu que $\cos.\tau = \sqrt{(\sin.^2\sigma + \sin.^2 + \cos.^2\sigma)}$, et $\cos.\rho = \frac{\sin.\sigma}{\sqrt{(\sin.^2\sigma + \sin.^2\Upsilon}}$; ainsi, pour déterminer la courbe dans l'espace, il suffira d'avoir la loi de M, Υ et σ.

Du levier.

Recherche des équations au moyen desquelles trois des six choses à connoître dans un levier simple, de dimensions données; savoir, la pression du point d'appui, sa direction, le moteur, la résistance, et leurs directions étant connues, on peut déterminer les trois autres.

282. Soit CAB (*fig.* 65) un levier dont les dimensions sont données, M′ et M″ le moteur et la résistance qui se font équilibre à ses extrémités, et dont le point de concours est en D; menons du point d'appui A les perpendiculaires AP, AP′, sur les directions BD, CD, on aura, par la propriété du levier (54), $M' \times AP = M'' \times AP'$. Mais dans les triangles rectangles ABP, ACP′, on a 1 : sin.ABP :: AB : AP, et 1 : sin.ACP′ :: AC : AP′; d'où $AP = AB \times \sin.ABP$, et $AP' = AC \times \sin.ACP'$; ainsi l'équation précédente se change en $M' \times AB \times \sin.ABP = M'' \times AC \times \sin.ACP'$.

Après cela, on peut considérer la charge du point d'appui A, ou la réaction qu'il exerce contre l'action simultanée de M′ et de M″, comme un troisieme moteur M qui fait équilibre à M′ et M″, et dont par conséquent la direction concourt en D (52). Menant par le point A un axe AX, auquel on rapporte les directions de M, M′ et M″, qui font avec cet axe des angles $\epsilon, \epsilon', \epsilon''$, cette derniere considération donnera (263) les équations

$$M\cos.\epsilon = M'\cos.\epsilon' + M''\cos.\epsilon'',$$
$$\text{et } M\sin.\epsilon + M'\sin.\epsilon' + M''\sin.\epsilon'' = 0.$$

On donnera dans cette seconde équation des signes contraires aux moteurs ou résistances qui sollicitent le point A en sens contraire perpendiculairement à l'axe AX.

283. Faisons $AC = a$, $AB = b$, *angle* $CAX = f$, *angle* $BAX = k$, on aura *angle* $ABP = 180° - (k + \epsilon')$, et angle $ACP' = 180° - (f + \epsilon'')$, et par conséquent $\sin.ABP = \sin.(k + \epsilon')$, et $\sin.ACP' = \sin.(f + \epsilon'')$; ainsi les trois équations données tant par la propriété du levier que par l'équilibre entre la charge

Digitized by Google

ou la réaction du point d'appui, et l'action simultanée du moteur et de la résistance, seront

$$284\cdots\cdots M'b\sin.(k+\mathfrak{C}') = M''a\sin.(f+\mathfrak{C}'')\cdots\cdots(A),$$
$$M\cos.\mathfrak{C} = M'\cos.\mathfrak{C}' + M''\cos.\mathfrak{C}''\cdots\cdots\cdots(B),$$
$$M\sin.\mathfrak{C} + M'\sin.\mathfrak{C}' + M''\sin.\mathfrak{C}'' = 0\cdots\cdots(C).$$

285. Ces trois équations renferment, outre les données a, b, k et f, six quantités M, M', M'', $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}'$, $\mathfrak{C}''$, dont trois étant connues serviront à faire connoître les trois autres. Ainsi,

Lorsque, dans un levier de dimensions données, on connoîtra trois des six choses suivantes ; savoir, le moteur, la résistance, et leurs directions, la charge du point d'appui, et la direction dans laquelle elle s'exerce, on pourra toujours, pour le cas de l'équilibre, déterminer les trois autres.

Cas où le problême est indéterminé, et par quelle raison il le devient.

286. Il y a cependant un cas où le problême reste indéterminé : c'est lorsqu'on ne connoît que les trois directions ; car alors les équations (A) et (C) deviennent identiquement les mêmes, et ne peuvent plus être comptées que pour une. Pour s'en rendre raison, qu'on suppose que les directions sont rapportées à la ligne AD ; ce qui est permis, puisque sa direction est une des données, l'équation (C) deviendra, à cause de $\sin.\mathfrak{C} = 0$, $\frac{M'}{M''} = \frac{\sin.\mathfrak{C}''}{\sin.\mathfrak{C}'} = A$, puisque $\sin.\mathfrak{C}'$ et $\sin.\mathfrak{C}''$ sont connus par hypothese. D'un autre côté l'équation (A), ou son équivalente $M' \times AP = M'' \times AP'$, donne $\frac{M'}{M''} = \frac{AP'}{AP}$; mais $\frac{AP'}{AP} = \frac{\sin.CDA}{\sin.BDA} = \frac{\sin.\mathfrak{C}''}{\sin.\mathfrak{C}'} = A$. Donc l'équation (A) donne, ainsi que l'équation (C), $\frac{\sin.\mathfrak{C}''}{\sin.\mathfrak{C}'} = A$, c'est-à-dire que ces équations énoncent toutes deux que le rapport de ces sinus est égal à une quantité donnée A ; elles ne doivent donc être comptées que pour une.

On peut expliquer d'une autre maniere l'indétermination du problême : dans le cas dont il s'agit, par un point quelconque m'' de la direction AD, menez $m''m'$ parallele à CD, les rapports des lignes Dm'', Dm', et $m'm''$, exprimeront, dans le cas de l'équilibre, les rapports de M, M' et M'' ; or, la connoissance des directions de M, M' et M'', donne celle des trois angles du triangle Dm'', et on sait, par la trigonométrie, que la connoissance des trois angles d'un triangle ne peut point donner la valeur absolue des côtés, mais seulement le rapport de ces côtés.

Theorie du levier mobile, dans tous les

287. Supposons que le levier soit mobile dans tous les sens autour de son point d'appui, et soit sollicité par un nombre

quelconque de moteurs et de résistances dirigées dans des plans quelconques. Imaginons ensuite trois plans perpendiculaires entre eux, dont le point commun d'intersection se trouve au point d'appui; nommons axe des z la ligne d'intersection de deux de ces plans; axe des y, la ligne d'intersection du troisieme plan avec l'un des deux premiers; et axe des x, la ligne d'intersection de ce même troisieme plan avec l'autre des deux premiers. Nommons encore plan des (x, y), celui qui est compris entre l'axe des x et l'axe des y; plan des (x, z), celui compris entre l'axe des x et celui des z; et plan des (y, z), celui compris entre l'axe des y et l'axe des z. Nommons enfin z la perpendiculaire menée d'un point de l'espace sur le plan des (x, y); y celle menée du même point sur l'axe des (x, z); et x celle donnée, toujours du même point, sur le plan des (y, z). Il sera nécessaire de fixer ces dénominations dans la mémoire, parcequ'elles sont propres à soulager l'esprit lorsqu'on considere des points et des formes dans l'espace, et que nous les emploierons toujours dans de semblables circonstances (*).

sens, autour de son point d'appui, et sollicité par un nombre quelconque de moteurs et de résistances, dirigés dans des plans quelconques.

Soient M, M′, M″, etc., les moteurs et les résistances en équilibre autour du point d'appui, ϵ, ϵ', ϵ'', etc.; γ, γ', γ'', etc.; δ, δ', δ'', etc., les angles que font leurs directions avec des parallèles à l'axe des x, celui des y, et celui des z; r, r', r'', etc.; q, q', q'', etc.; p, p', p'', etc., les perpendiculaires communes à ces mêmes directions et à l'axe des x, des y et des z.

288. Cela posé, on aura (152), pour les conditions de l'équilibre autour du point d'appui, et en supposant égales les masses ou molécules auxquelles les moteurs et les résistances sont appliqués, les trois équations

$$\begin{aligned} \mathrm{M}r \sin.\epsilon + \mathrm{M}'r' \sin.\epsilon' + \text{etc.} &= 0, \\ \mathrm{M}q \sin.\gamma + \mathrm{M}'q' \sin.\gamma' + \text{etc.} &= 0, \\ \mathrm{M}p \sin.\delta + \mathrm{M}'q' \sin.\delta' + \text{etc.} &= 0. \end{aligned}$$

Prenons sur la direction de M une longueur pour le représenter; par une des extrémités de cette longueur, menons une parallele à l'axe des x, et par l'autre une perpendiculaire sur cette parallele, laquelle perpendiculaire sera parallele au plan des (y, z). L'angle formé par la direction de M, et par la parallele à l'axe des x, sera égal à ϵ, et la perpendiculaire sur cette parallele

(*) Jusqu'à présent nous avons donné des figures pour représenter les *plans* et les *élévations* des lignes considérées dans l'espace; mais nous pensons que les commençants, après avoir étudié ce qui précede, pourront le plus souvent se passer de ce secours.

Digitized by Google

aura pour valeur M sin.$\mathcal{C}$. Mais cette perpendiculaire est égale à la projection de M sur le plan des (y, z); donc M sin.$\mathcal{C}$ est la valeur de cette projection. Ensuite r, qui est la distance de la direction de M à l'axe des x, sera par conséquent la distance de sa projection sur le plan des (y, z) au point de rencontre de l'axe des y et de celui des z, ou au point commun d'intersection des trois plans. On pourra faire le même raisonnement sur chacun des termes des trois équations ci-dessus; ainsi les conditions de l'équilibre, dans le cas dont il s'agit, pourront s'exprimer ainsi, en employant le terme *moment* dans le sens expliqué art. (119) (*).

Conditions générales de l'équilibre dans le cas où le levier est mobile dans tous les sens autour de son point d'appui, et sollicité par un nombre quelconque de moteurs et de résistances, dirigés dans des plans quelconques.

289. *Si un levier de forme quelconque, et mobile en tous sens autour de son point d'appui, est sollicité par des moteurs et des résistances en équilibre, faites passer par le point d'appui trois plans perpendiculaires entre eux, et imaginez les lignes, qui représentent dans l'espace les directions et les quantités de chaque moteur ou résistance, projetées sur chacun de ces plans, la somme des moments de ces projections* (considérées comme des moteurs), *rapportée au point d'appui, doit être, dans chaque plan, égale à zéro.*

290. L'égalité à zéro, des moments pris dans un des plans, désigne qu'il y a équilibre autour de l'axe perpendiculaire à ce plan; ce qui, ayant lieu pour les trois axes, produit, comme on sait (154), un équilibre absolu de rotation autour de leur point commun de rencontre.

Disposition la plus commode des formules pour trouver les conditions de l'équilibre du levier dans les hypotheses précédentes.

291. Soit σ l'angle que fait le moteur ou résistance M avec le plan des (x, y), sa projection sur ce plan sera M cos.σ. Nommons Ψ l'angle de cette projection avec l'axe des x, on trouvera, ayant égard aux valeurs déterminées ci-devant, art. (259), que sa projection sur le plan des (y, z) est M$\sqrt{(\sin.^2\sigma + \sin.^2\Psi \cos.^2\sigma)}$, et que sa projection sur le plan des (x, z) est M $\sqrt{(\sin.^2\sigma + \cos.^2\Psi \cos.^2\sigma)}$. Ces valeurs étant substituées aux quantités M sin.$\mathcal{C}$, M sin.γ, M sin.$\mathcal{S}$, les équations pour l'équibre de rotation ne renfermeront plus que les lettres M, p, q, r, σ et Ψ, et leurs analogues accentuées. Ces équations se trouveront ainsi

(*) On a dit dans cet article que le mot *moment* n'a pas toujours été pris avec l'acception qu'on lui donne communément à présent. En effet, Galilée et Wallis entendoient par moment d'un poids, ou d'une puissance appliquée à une machine, l'effort, l'action, l'énergie, l'*impetus* de cette puissance, pour mouvoir la machine, de maniere qu'il y ait équilibre entre deux puissances lorsque leurs moments pour mouvoir la machine en sens contraire sont égaux, et ils font voir que le moment est toujours proportionnel à la puissance multipliée par la vîtesse virtuelle dépendante de la maniere dont la puissance agit. (Mécan. de la Grange.)

réduites

Digitized by Google

réduites à une forme semblable à celles données aux équations relatives au mouvement progressif, art. (258).

On pourroit encore, si l'on vouloit, éliminer p, q et r, et y substituer les co-ordonnées x, y et z, rapportées à la molécule sur laquelle agit le moteur M. Nous omettons ce calcul, qui n'a aucune difficulté.

292. D'après ce qu'on vient de voir, lorsqu'un nombre quelconque de moteurs donnés, de quantité et de position, tendront à faire tourner un corps autour d'un point fixe, il ne sera pas difficile de trouver une résistance qui fasse équilibre au mouvement de rotation qu'ils tendent à lui imprimer. Pour remplir cette condition, il faut satisfaire à trois équations, et, en désignant par A, B, C, les sommes connues des produits analogues à celles affectées du signe S, à l'art. (260), et M', p', q', r', Ψ' et σ', étant les inconnues, ces trois équations sont

$$M'r'\sqrt{(\sin.^2\sigma' + \sin.^2\Psi' \cos.^2\sigma')} + A = 0,$$
$$M'q'\sqrt{(\sin.^2\sigma' + \cos.^2\sigma' \cos.^2\Psi')} + B = 0,$$
$$\text{et } M'p' \cos.\sigma + C = 0.$$

On voit que ces équations renferment six indéterminées, M', p', q', r', Ψ', σ'; on peut donc s'en donner trois à volonté, à moins qu'elles ne soient données par l'état de la question.

Maniere de calculer la charge du point d'appui toujours dans les mêmes hypotheses.

293. La résistance qui fait équilibre au mouvement de rotation étant déterminée, en considérant la réaction du point d'appui, contre l'effort qu'il éprouve, comme une autre résistance qui fait équilibre au mouvement de translation, on trouvera la charge du point d'appui au moyen des équations relatives au mouvement de translation. Ces équations, d'après ce qu'on a vu (260), se réduiront à cette forme, M étant la charge du point d'appui,

$$M \cos.\sigma \cos.\Psi + M' \cos.\sigma' \cos.\Psi' + a' = 0,$$
$$M \cos.\sigma \sin.\Psi + M' \cos.\sigma' \sin.\Psi' + b' = 0,$$
$$M \sin.\sigma + M' \sin.\sigma' + c' = 0.$$

On voit que la valeur de la résistance M', qui fait équilibre au mouvement de rotation, doit être employée dans le calcul de la charge M du point d'appui; mais (abstraction faite du frottement) cette derniere quantité n'entre point dans les équations qui déterminent la premiere, et il en est de même de tous les moteurs ou résistances qui passent par le point d'appui; car leur énergie, pour faire tourner, est évidemment nulle.

Digitized by Google

On peut toujours déterminer deux résistances appliquées à deux points donnés qui fassent équilibre au mouvem. de translation et de rotat. d'un corps, nombre d'équations et d'indéterminées des problèmes.

294. Concluons généralement que, lorsqu'un corps sera soumis à l'action d'un nombre quelconque de moteurs, dont l'action combinée tend à lui donner un mouvement de translation et de rotation, on pourra toujours déterminer deux résistances appliquées à deux points donnés de ce corps, dont l'effort combiné fera équilibre tant au mouvement de translation qu'à celui de rotation. Il y aura six équations pour satisfaire à cette double condition, et les indéterminées qu'elles renferment étant au nombre de neuf, on en pourra prendre trois à volonté, à moins qu'elles ne soient données d'avance par l'état de la question.

Cas où les moteurs et les résistances appliquées au levier sont dirigées dans le même plan.

295. Les moteurs et les résistances étant supposés dirigés tous dans le même plan, celui des (x, y), par exemple, les trois équations de l'art. (292) se réduisent à l'unique $M'p' + C = 0$, parceque $\cos.\sigma = 1$, et que r', q', et leurs analogues, deviennent, dans les deux premieres équations, ou impossibles, ou multipliés par des facteurs nuls; C exprime dans cette équation la somme des produits des moteurs par la distance de leur direction au point de rotation. Les deux équations de l'art. 93 se réduisent (en faisant attention que Ψ, Ψ', etc., y redeviennent égaux à $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$, etc.) à

$$M\cos.\mathcal{C} + M'\cos.\mathcal{C}' + a' = 0, \quad M\sin.\mathcal{C} + M'\sin.\mathcal{C}' + b' = 0.$$

Déterminations arbitraires dans ce cas.

Lorsqu'un levier sera sollicité par un nombre quelconque de moteurs dirigés dans le même plan, l'équation $M'p' + C = 0$ déterminera la résistance qui doit leur faire équilibre, et on pourra se donner d'avance, ou la quantité M' de cette résistance, ou sa distance p' au point d'appui. Les deux autres équations détermineront la charge du point d'appui : les art. (284, 285 et 286), sont des corollaires de celui-ci.

Méthode pour trouver la distance à un point donné dans un plan de la résultante d'un nombre quelconque de moteurs agissant dans ce plan.

296. On a vu, art. (263), comment on trouvoit la quantité et la direction de la résultante d'un nombre quelconque de moteurs agissant dans le même plan. Soit M' cette résultante, l'équation $p' = \frac{C}{M'}$ donnera sa distance à l'origine des x et y, qui est égale à la somme des moments des moteurs, divisée par la résultante, et déterminera par conséquent la position de cette résultante. On peut la tracer géométriquement, en décrivant d'un rayon $= \frac{C}{M'}$, et de l'origine des x et y comme centre, un cercle auquel on menera une tangente qui fasse, avec l'axe des x, un angle $\mathcal{C}'$ égal à celui déterminé par les formules de l'article (263). On peut encore porter sur l'axe des x, à partir de

l'origine, une longueur $= \frac{C}{M' \sin. C'}$; et sur l'axe des y, à partir du même point, une longueur $= \frac{C}{M' \cos. C'}$; ce seront les points d'intersection de la résultante cherchée avec ces deux axes. Rien n'est plus aisé que de s'en assurer.

Cas où les moteurs se trouvent dirigés dans des plans parallèles.

297. Tout ce qu'on vient de dire des moteurs agissant dans le même plan peut s'appliquer au cas où ils agiroient dans des plans paralleles, en rapportant à un axe perpendiculaire à tous ces plans les distances que nous avons rapportées à l'origine des x et y.

Du levier pesant.

298. Disons un mot du levier pesant, et, pour plus de simplicité, supposons-le droit et de grosseur uniforme (*fig.* 66). Soit a la longueur du levier ; les distances prises sur AC et AB pourront tenir lieu des perpendiculaires menées du point d'appui sur les directions des moteurs et des résistances en équilibre, puisqu'elles sont proportionnelles à ces perpendiculaires. Nommons AB, x; AC sera égal à $a - x$. Soit π le poids de l'unité de longueur du levier, M et M' le moteur et la résistance, évalués en livres ou unités de poids, la pesanteur du levier fera l'effet d'une résistance égale à son poids, et placée à son centre de gravité, ou au milieu de sa longueur, sa grosseur étant uniforme. Cela posé, les conditions de l'équilibre seront $Mx = M'(a - x) + \pi a(\frac{1}{2}a - x)$; d'où l'on tire $x = \frac{aM' + \frac{1}{2}\pi a^2}{M + M' + \pi a}$.

Conditions de l'équilibre du levier pesant dans différentes hypotheses.

Supposons maintenant que le point A est donné ainsi que le point B, et qu'on cherche la valeur de AC pour que M' fasse équilibre à M, ces quantités étant connues. Nommons AB, b; BC, y; l'équation précédente d'équilibre se changera en $Mb = M'(y - b) + \pi y(\frac{1}{2}y - b)$; d'où on tire

$$y = \frac{\pi b - M' \pm \sqrt{[(M' - \pi b)^2 + (2bM + 2bM')\pi]}}{\pi}.$$

La valeur positive d'y résout la question actuelle, et la valeur négative donne la distance CB (*fig.* 67) dans un levier du second ou troisieme genre, en supposant AC sans pesanteur, et les puissances M et M' agissant dans le même sens pour surmonter la pesanteur de BC, ainsi que cela est indiqué par la poulie de renvoi ponctuée.

Cas où la pesanteur seule d'une des branches du levier fait équilibre au moteur.

Le poids seul de AC (*fig.* 66) fera équilibre à M à une distance $\frac{y = \pi b \pm \sqrt{(\pi^2 b^2 + 2\pi bM)}}{\pi}$ qu'on trouve en faisant $M' = 0$ dans l'équation précédente.

Faisons dans le levier (*fig.* 67), supposé pesant dans toute sa

Digitized by Google

longueur, AC $= b$, et AB $= y$, les conditions de l'équilibre seront exprimées par l'équation $My = M'b + \frac{1}{2}\pi y^2$; d'où on tire $y = \frac{M}{\pi} \pm \sqrt{\left(\frac{M^2 - 2M'b}{\pi}\right)}$.

Dimensions du levier pesant, du second genre, qui donnent le plus grand avantage au moteur.

Cette équation donne aussi $M = \frac{M'b + \frac{1}{2}\pi y^2}{y}$, où l'on voit que $y = 0$, et $y = \infty$, donnent tous deux $M = \infty$; ainsi M est susceptible d'un *minimum* qu'on trouve en faisant $d\left(\frac{M'b + \frac{1}{2}\pi y^2}{y}\right) = 0$; ce qui donne $y = \sqrt{\frac{M'b}{\frac{1}{2}\pi}}$. Ainsi, lorsqu'on voudra soulever une masse P (*fig.* 68) avec un levier pesant AB, il y aura une certaine longueur à donner à ce levier, afin que le moteur qu'on y applique soit le moindre possible. Il n'en est pas de même du levier (*fig.* 66); car plus AC sera long, plus M devra être considérable, et réciproquement.

Observations sur les différentes especes de moteurs et de résistances en équilibre dans le levier.

299. Nous finirons ce chapitre par une observation sur la nature des moteurs et des résistances en équilibre dans le levier. Il est d'abord certain, d'après ce qui a été dit art. (40), qu'une *force* ne peut jamais être en équilibre avec une *puissance;* ensuite, lorsque les masses en équilibre seront sollicitées par deux forces ou deux puissances, il faudra que les produits de ces masses, par les vîtesses ou les forces motrices, soient en raison inverse des distances de leurs directions au point d'appui. Si les masses sont égales, il ne faudra prendre que le rapport des vîtesses ou des forces motrices, et si les vîtesses ou les forces motrices sont égales, il ne faudra prendre que le rapport des masses; cela est une conséquence immédiate de la théorie exposée précédemment. Mais si les masses en équilibre sont sollicitées en même temps par des forces et des puissances, comme l'effet d'une puissance, dans le premier instant, est infiniment plus petit que celui d'une force, il suffira pour l'équilibre, dans ce premier instant, que le produit des vîtesses par les masses soit en raison inverse des distances des directions au point d'appui; mais, après cela, les quantités de mouvement dues aux forces étant anéanties, l'équilibre dépendra de l'action des puissances, et il se conservera ou se rompra, selon que les produits des masses par les forces motrices seront ou ne seront pas en raison inverse des distances des directions au point d'appui.

Nous traiterons, dans la section suivante, du levier en mouvement; et, dans la cinquieme section, nous le considérerons avec les différentes circonstances physiques qui influent tant sur son repos que sur son mouvement.

Digitized by Google

De la poulie.

Division générale de la poulie en fixe et mobile.

300. La poulie est une machine trop connue pour qu'il soit nécessaire d'en faire ici la description ; elle est généralement considérée sous deux points de vue relativement à la maniere de l'employer ; savoir, comme poulie fixe ou poulie de renvoi, et comme poulie mobile. Les combinaisons de ces deux especes de poulies forment différentes machines composées, connues sous le nom de *moufles*, *palans*, *caliornes*, etc.

De la poulie fixe.

301. La poulie fixe est celle dont le centre C (*fig.* 69, ou la chappe CA (*fig.* 70), sont fixes. Dans l'un et l'autre cas, quel que soit le nombre de moteurs et de résistances en équilibre, la tension de la corde qui s'enroule dans la portion DE de la gorge de la poulie doit être la même aux points D et E ; ensuite la charge du centre C, ou la réaction qu'il exerce contre l'effort combiné des moteurs et des résistances, doit être égale en quantité à la résultante des tensions en D et E ; et comme ces tensions sont égales, la direction de la réaction du centre C doit tendre au point de concours des tangentes en D et E, et partager en deux parties égales l'angle que forment ces tangentes (267). Dans le cas de la (*fig.* 70), la chappe, pouvant tourner autour des points A et C, se mettra d'elle-même, pour l'équilibre, dans la direction de la résultante des tensions en E et D.

Conditions de l'équilibre dans la poulie fixe.

302. Faisons l'angle formé par les tangentes en D et E égal à $2\varepsilon'$; nommons M' la tension de la corde aux mêmes points, et M la charge du point d'appui, on aura (267) l'équation $M = 2M' \cos.\varepsilon'$. Par le centre C (*fig.* 71), menons CT au point T de réunion des tangentes en D et E, les rayons CD, CE, et la corde ou sous-tendente DE. On voit aisément que l'angle $CDF = CTD = \varepsilon'$, et que $FD = CD \times \cos.\varepsilon'$; d'où

$2 \cos.\varepsilon' = \frac{2FD}{CD} = \frac{DE}{CD}$. Ainsi $M = M' \times \frac{DE}{CD}$, ou $M : M' :: DE : CD$.

Nous n'entrons dans aucun détail sur la combinaison des moteurs et des résistances, de l'action desquels résulte la tension M' en D et E ; ce seroit une répétition inutile de propositions et de calculs auxquels nous avons donné précédemment le plus grand développement, et nous ne considérerons que l'action immédiate de cette tension, de quelque maniere qu'elle soit produite.

De la poulie mobile.

303. Lorsque la poulie est mobile (*fig.* 72), M' étant le moteur, et M la résistance, il est évident que, dans le cas de l'équi-

Digitized by Google

libre, M représente ce que nous avons appellé la *charge de l'axe* ou *du centre* dans la poulie fixe, et qu'en appellant toujours $\mathcal{C}'$ le demi-angle formé par les cordes, ou l'angle formé par la direction du moteur et celle de la résistance, il existe entre M et M' la même équation $M = 2M' \cos.\mathcal{C}'$; d'où $M' = \frac{1}{2\cos.\mathcal{C}'} M$. Les trois articles précédents fournissent les conclusions suivantes:

Conditions de l'équilibre dans les poulies fixe et mobile

304. 1°. *Le moteur et la résistance en équilibre, à l'aide d'une poulie fixe, doivent être égaux, et l'un ou l'autre sont à la charge de l'axe de la poulie, comme le rayon est au double cosinus de la moitié de l'angle formé par leurs directions* (*).

2°. *Dans la poulie mobile, le moteur et la résistance, supposés en équilibre, sont entre eux comme le rayon est au double cosinus de l'angle que forment leurs directions, ou du demi-angle formé par les deux parties de la corde qui embrasse la poulie.*

La poulie fixe ne fait rien gagner au moteur, et le plus grand avantage que lui donne la poulie mobile a lieu quand les cordes sont paralleles.

305. On voit que la poulie fixe ne fait rien gagner au moteur, mais peut faciliter son action en fournissant le moyen de changer sans lui faire perdre l'avantage qu'il peut avoir sur la résistance, abstraction faite du frottement; car la charge de l'axe variant, cette espece d'obstacle augmente ou diminue, comme nous le verrons par la suite.

Dans la poulie mobile, le moteur a de l'avantage sur la résistance lorsque leurs directions font un angle plus petit que 60°, ou que les deux parties de la corde qui embrasse la poulie font un angle plus petit que 120°, cas où ils sont égaux, puisque $2\cos.60° = 1$; et l'équation $M' = \frac{1}{2\cos.\mathcal{C}'} M$ nous fait voir que le plus grand avantage a lieu lorsque $\cos.\mathcal{C}' = 1$, ou lorsque les cordes sont paralleles, auquel cas $M' = \frac{1}{2} M$; ainsi le plus petit moteur qu'on puisse opposer à une résistance, au moyen de la poulie, est égal à la moitié de cette résistance.

Conditions de l'équilibre dans différentes combinaisons d'un nombre quelconque de poulies fixes et mobiles, et maniere la plus avantageuse de faire ces combinaisons.

306. Soit une poulie fixe en A (*fig.* 73), et un systême de poulies mobiles 1, 2, 3, etc., à chacune desquelles est enroulée une corde attachée par un bout aux points fixes B, C, D, etc., et, par l'autre bout, à la chappe de la poulie précédente. Supposons un moteur M tirant par-dessus la poulie A, ou appliqué immédiatement en *t* dans la direction *t* 1. Nommons R la résistance appliquée à la chappe de la derniere poulie; M, M', M'', etc.,

(*) J'ai préféré ce rapport à celui du sinus du demi-angle et au sinus de l'angle entier, vû que, pour le calcul, le premier n'exige que la recherche d'un *log. cos.*, au lieu que le second exige celle de deux *log. sin.*

les tensions des cordons $t1$, $t'2$, $t''3$, etc.; ϵ, ϵ', ϵ'', etc., les angles qu'ils forment entre eux, nous aurons (302 et 303) $M' = 2M\cos.\epsilon$, $M'' = 2M'\cos.\epsilon'$, $M''' = 2M''\cos.\epsilon''$, etc.; et enfin $R = 2M^{(n)}\cos.\epsilon^{(n)}$, n étant le nombre des poulies mobiles. Substituant les valeurs de M', M'', etc., dans les seconds membres de la seconde, troisieme, etc. équations, on a

$$M'' = 2\cdot 2M\cos.\epsilon\cos.\epsilon',\quad M''' = 2\cdot 2\cdot 2\cdot M\cos.\epsilon\cdot\cos.\epsilon'\cos.\epsilon'',\text{ etc.}$$
$$\text{et enfin } R = (2^n\cos.\epsilon\cdot\cos.\epsilon'\cos.\epsilon''\cdot\cdots\cdots\cdot\cos.\epsilon^{(n)})M,$$

(n entre deux parentheses marquant le n° de l'accentuation). Ainsi, dans ce système de poulies, le moteur est à la résistance comme le rayon est au produit de tous les cosinus des angles que font entre elles les cordes A1, A2, etc., multiplié par 2, élevé à une puissance dont l'exposant est égal au nombre des poulies mobiles.

Pour donner au moteur tout l'avantage dont cet équipage le rend susceptible, il faut rendre paralleles les directions de toutes les cordes; dans ce cas on aura $\cos.\epsilon = 1$, $\cos.\epsilon' = 1$, etc., et $R = 2^nM$; ainsi le moteur sera à la résistance, comme l'unité est à 2, élevé à une puissance dont l'exposant est égal au nombre des poulies mobiles. Cet avantage est grand, abstraction faite du frottement, car, avec trois poulies seulement, un moteur feroit équilibre à une résistance huit fois plus grande.

307. La *fig.* 75 présente un autre assemblage de poulies fixes A, B, C, D, etc., et de poulies mobiles a, b, c, d, etc., toutes embrassées par la même corde, fixée par une de ses extrémités à un arrêt S, et tirée à l'autre par un moteur M : le centre de chacune des poulies a, b, c, etc., est également sollicité par des résistances M', M', M''', etc. Nommons 2ϵ, $2\epsilon'$, $2\epsilon''$, etc., les angles formés par les directions des deux parties de corde qui embrassent chaque poulie, la tension de toutes ces parties étant égale à M, on a les équations $M' = 2M\cos.\epsilon$, $M'' = 2M\cos.\epsilon'$, $M''' = 2M\cos.\epsilon''$, etc., qui donnent

1°. $M' : M :: \cos.\epsilon : \frac{1}{2}$, $M'' : M :: \cos.\epsilon' : \frac{1}{2}$, $M''' : M :: \cos.\epsilon'' : \frac{1}{2}$;

2°. $M' : M'' : M'' + \text{etc.} :: \cos.\epsilon : \cos.\epsilon' : \cos.\epsilon''$, etc.;

3°. $M' + M'' + M''' + \text{etc.} = 2M(\cos.\epsilon + \cos.\epsilon' + \cos.\epsilon'' + \text{etc.})$;

d'où on tire

$$M' + M'' + M''' + \text{etc.} : M :: (\cos.\epsilon + \cos.\epsilon' + \cos.\epsilon'' + \text{etc.}) : \tfrac{1}{2}.$$

Ainsi 1°. *chaque résistance appliquée à une des poulies mobiles*

Digitized by Google

est au moteur, comme le cosinus de la moitié de l'angle formé par les portions de corde qui embrassent cette poulie est au demi-rayon.

2°. *Les résistances sont, entre elles, comme les cosinus des moitiés d'angles dont on vient de parler.*

3°. *La somme des résistances est au moteur, comme la somme des cosinus des mêmes moitiés d'angles est au demi-rayon.*

Des moufles.

308. Une des manieres les plus commodes et les plus avantageuses de disposer les poulies, est d'en former ce qu'on appelle *une moufle*. On appelle ainsi un assemblage de plusieurs poulies disposées d'une maniere quelconque sur une même chappe. Les *fig.* (76, 77, 78, 79, et 80), offrent les modeles des principales manieres de former ces assemblages; celui de la *fig.* (79) est très en usage; les moufles supérieures sont supposées fixées à un crochet ou arrêt immobile, et les moufles inférieures sont mobiles.

Conditions de l'équilibre dans les moufles.

309. Pour trouver les conditions de l'équilibre dans la poulie mouflée, il faut réunir la masse de la moufle mobile à celle que le moteur a à mouvoir, et supposer que la résistance agit uniformément sur la somme de ces deux masses. Cela posé, nommons M le moteur (*fig.* 76 et 77), m la masse qu'il anime, la tension de la corde qui embrasse les poulies A, a, B, b, etc., sera par-tout égale à Mm. Nommons ϵ, ϵ', ϵ'', etc., les angles que font les portions de cordes allant d'une poulie A de la moufle fixe à la poulie voisine a de la moufle mobile, avec la direction de la résistance R qui sera la ligne verticale, lorsqu'on aura la pesanteur pour résistance à vaincre. On pourra considérer la masse à mouvoir et celle de la moufle, dont nous nommerons la somme p, comme un corps sollicité dans un sens par la résistance R, et contrebalancé dans l'autre par un nombre de moteurs M égal au nombre des cordes qui aboutissent à la moufle inférieure, appliqués à des masses m, et dont les directions font, avec celle de R, des angles ϵ, ϵ', ϵ'', etc. On aura donc (150) pour les conditions de l'équilibre, parallèlement à la direction de R, $Rp = Mm(\cos.\epsilon + \cos.\epsilon' + \cos.\epsilon'' + \text{etc.})$ Les deux autres équations de l'article cité sont inutiles, parcequ'elles expriment les conditions de l'équilibre perpendiculairement à la direction de R; ce qui est une recherche inutile à l'objet que nous avons en vue.

310. Si M et R sont la pesanteur, alors l'équation deviendra $p = m(\cos.\epsilon + \cos.\epsilon' + \text{etc.})$, ϵ, ϵ', etc., étant les angles formés par

Digitized by Google

par la verticale et par les parties de cordes qui vont d'une poulie à l'autre. Ainsi,

Dans la poulie mouflée, le poids moteur est aux poids réunis de la moufle mobile et de la masse à mouvoir, comme le rayon est à la somme des cosinus des angles formés par la verticale et les directions des cordons qui aboutissent de la moufle fixe à la moufle mobile.

311. Lorsque les cordons sont paralleles, $\cos.\mathcal{C} = \cos.\mathcal{C}' = \cos.\mathcal{C}'' = \text{etc.} = 1$; et en supposant de plus que c'est la pesanteur qui agit, on a $m : p :: 1 :$ au nombre des cordes paralleles, c'est-à-dire que

Cas où les cordes sont paralleles dans les moufles.

Lorsque les portions de cordes qui embrassent les poulies de la moufle sont paralleles, le poids moteur est aux poids réunis de la moufle et de la masse à mouvoir, comme l'unité est au nombre des cordes paralleles.

Si on veut exprimer ce rapport par celui de l'unité, au nombre des poulies de la moufle mobile, il faut observer que, lorsque l'extrémité fixe N du cordon est attachée à la moufle fixe, comme dans la *figure* 77, le nombre des cordons est double de celui des poulies de la moufle fixe, et que, lorsque cette extrémité est attachée à la moufle mobile, comme dans la *fig.* 76, le nombre des cordons est égal au double de celui des poulies de la moufle mobile plus un. Ainsi n étant le nombre des poulies de la moufle mobile, on a, dans le cas où l'extrémité de la corde est attachée à la moufle fixe, $m : p :: 1 : 2n$, et, dans le cas où il ne l'est pas, $m : p :: 1 : 2n + 1$; il y a donc plus d'avantage à fixer la corde à la moufle mobile.

Variations du rapport entre le moteur et la résistance, selon que la corde est attachée à la moufle fixe et à la moufle mobile.

312. Tout ce qu'on vient de dire de la moufle horizontale s'applique aux moufles verticales (*fig.* 78, 79 et 80), et à toute autre combinaison de poulies qu'on pourroit imaginer. Pour rendre les cordons paralleles dans la moufle représentée *fig.* 78, il faut que les diametres des poulies croissent en progression arithmétique, dont la différence soit égale au diametre de la plus petite poulie. Les poulies de chaque moufle de la *fig.* 79 sont égales en diametre et enfilées par le même axe; les cordes n'y sont pas exactement paralleles, mais l'angle qu'elles font entre elles fait perdre fort peu de chose au moteur; car les variations du cosinus, ou ses différences avec le rayon, croissent lentement lorsque les lignes commencent à s'écarter du parallélisme.

Des moufles verticales. Proportion des poulies pour rendre dans l'une d'elles les cordes paralleles.

313. Nous n'emploierons pas un temps inutile à analyser quelques détails dont les questions que nous venons de traiter

Digitized by Google

sur la poulie pourroient fournir l'idée. Telle est la recherche des angles que font entre eux les cordons de la *fig.* 73 lorsque la direction du premier et celle de la résistance sont données, la charge des axes, tant dans ce cas que dans celui des *figures* 74, 75, 76, etc.; la supposition que les poulies (*fig.* 73 et 74) sont pesantes, le cas où l'on multiplieroit le nombre des moufles, etc. etc. Il est bien aisé de traiter toutes ces questions d'après les principes que nous avons développés très amplement; et comme l'abondance de matieres que nous avons à traiter rend la précision nécessaire, nous ne nous attacherons qu'à celles qui sont utiles, afin de pouvoir leur donner le développement et la clarté nécessaire.

Maniere de rapporter à la ligne horizontale les angles rapportés précédemment à la verticale.

314. Dans toutes les circonstances où nous avons employé les quantités angulaires ϵ, ϵ', etc., pour les calculs relatifs à la poulie mobile, on pourra, lorsque tout le système mobile sera librement soumis à l'action de la pesanteur, substituer à cos.ϵ, cos.ϵ', etc., les sinus des angles que font, avec l'horizon, les directions des portions de cordes que embrassent les poulies, puisque ces angles seront les compléments des angles ϵ, ϵ', etc.

Nous traiterons par la suite de la poulie, eu égard au frottement, à la roideur des cordes, etc.

Du tour, treuil, cabestan, etc.

Description et usage du tour

315. Le treuil, cabestan, etc., sont des machines qui peuvent être désignées génériquement par la dénomination de *tour*; elles ne different entre elles que par la maniere dont elles sont employées; car leur mécanisme est foncièrement le même. Ce mécanisme consiste en un cylindre de bois ou de métal aux extrémités, et dans l'axe duquel sont deux tourillons destinés à tourner dans une fente, trou ou crapaudine. Ce cylindre porte une roue ou des *barres* qui le traversent perpendiculairement à son axe, ou une roue et des barres tout ensemble, ou des manivelles dans le prolongement des tourillons, et le moteur est appliqué à l'extrémité du rayon de la roue ou de la longueur des *barres*, ou enfin aux manivelles. Une corde fixée à un point de la surface du cylindre, par une de ses extrémités, est attachée par l'autre à la masse qu'on veut mouvoir; l'action du moteur qui fait tourner la roue ou les *barres* autour de l'axe, faisant en même temps enrouler la corde autour du cylindre, force la masse à mouvoir de se déplacer et de s'approcher de la machine. Les *fig.* (81, 82, 83, 84, 85, 86) présentent les modeles

Digitized by Google

des principales manieres d'employer le tour ; les quatre premieres, dans lesquelles l'axe du cylindre est horizontal, se nomment plus particulièrement *treuil;* et les deux autres, dans lesquelles l'axe est vertical, se nomment *cabestan.*

Maniere d'envisager le tour pour en donner la théorie.

316. D'après cela, on comprendra aisément comment il faut considérer la théorie mathématique de l'équilibre dans le tour, en faisant d'abord abstraction du frottement, etc. Cet équilibre se réduit à celui d'un cylindre Q (*fig.* 87, où l'on voit, n° 1, le profil parallele à l'axe, et, n° 2, celui perpendiculaire à l'axe), libre de tourner autour de l'axe CC‴, et sollicité par des moteurs et résistances M, R, P, P′, dirigés dans des plans perpendiculaires à l'axe CC‴, et appliqués, savoir, le moteur M, à l'extrémité de la ligne ou verge inflexible C′D, n° 1; la résistance R, à l'extrémité du rayon C″E, n° 1, tangentiellement au cylindre; et les deux autres résistances P et P′, aux extrémités C, C‴, n° 1, du tourillon, et aux points F, F′, n° 2, de sa circonférence. Les résistances P et P′ représentent les charges de chaque tourillon, produites par l'action simultanée de M et de R, ou les réactions qu'exercent contre cette pression les fentes, trous ou crapaudines qui portent ces tourillons. Ainsi les directions de P et P′ doivent être perpendiculaires à la circonférence du tourillon, et tendre au centre C, n° 2.

Théorie du tour contenant les conditions de l'équilibre, la direction et la quantité de la charge ou pression de chaque point d'appui.

317. Menons les deux axes CX, CY, perpendiculaires entre eux, l'axe CX étant parallele à la direction EH de la résistance, et l'axe CC‴ du cylindre étant censé élevé au point C, perpendiculairement sur le plan YCX; menons encore DG, CL, CK, EH, paralleles aux directions de M, P, P′ et R.

Nommons p la perpendiculaire menée du centre C sur la direction de M, p' celle menée sur la direction de R, qui est égale au rayon CE du cylindre; q, q', q'', les distances CC′, CC″, CC‴; ϵ, ϵ', ϵ'', les angles formés par l'axe CX ou par la direction de la résistance R qui lui est parallele avec les directions de M, P et P′.

Cela posé, les équations relatives à l'équilibre pour le mouvement de translation sont (253 et 262), en faisant attention que P et P′ doivent avoir des signes contraires à ceux de M et de R,

pour l'axe CX, $R + M\cos.\epsilon = P\cos.\epsilon' + P'\cos.\epsilon'' \ldots\ldots [1]$;

pour l'axe CY, $M\sin.\epsilon = P\sin.\epsilon' + P'\sin.\epsilon'' \ldots\ldots [2]$.

Il n'y en a pas pour le mouvement parallele à l'axe CC‴, puisque les plans dans lesquels se trouvent les directions des moteurs et des résistances lui sont perpendiculaires.

Digitized by Go

Les équations relatives à l'équilibre pour le mouvement de rotation sont (152, 292), en donnant les signes convenables,

autour de l'axe CC''', $Mp = Rp' \ldots\ldots [3]$;
autour de l'axe CX, $M \sin.\mathcal{C}q = P' \sin.\mathcal{C}''q'' \ldots\ldots [4]$;
autour de l'axe CY, $M \cos.\mathcal{C}q + Rq' = P' \cos.\mathcal{C}''q'' \ldots\ldots [5]$.

On peut, aux équations [4] et [5], en substituer deux autres qui renferment P et $\mathcal{C}'$; il faut, pour cela, supposer que la rotation autour de CX et CY, au lieu d'avoir pour centre l'extrémité C de l'axe CC''', se fait autour de l'extrémité C''', qui sera alors censée appliquée au point C de réunion des axes CX, CY, et on aura

pour l'axe CX, $M \sin.\mathcal{C}(q'' - q) = P \sin.\mathcal{C}'q'' \ldots\ldots [6]$;
pour l'axe CY, $M \cos.\mathcal{C}(q'' - q) + R(q'' - q') = P \cos.\mathcal{C}'q'' \ldots [7]$.

Ces deux dernieres équations ne sont que pour la commodité du calcul, et pour faciliter le dégagement des indéterminées P' et $\mathcal{C}''$.

L'équation [4] donne $P' \sin.\mathcal{C}'' = \frac{M \sin.\mathcal{C}q}{q''}$, et l'équation [5] donne $P' \cos.\mathcal{C}'' = \frac{M \cos.\mathcal{C}q + Rq'}{q''}$. Substituant ces valeurs dans les équations [1] et [2], il vient

$$P \cos.\mathcal{C}' = R + M \cos.\mathcal{C} - \frac{M \cos.\mathcal{C}q + Rq'}{q''},$$
$$\text{ou } P \cos.\mathcal{C}' = \frac{R(q'' - q') + M \cos.\mathcal{C}(q'' - q)}{q''} \ldots\ldots [8].$$

$$P \sin.\mathcal{C}' = M \sin.\mathcal{C} - \frac{M \sin.\mathcal{C}q}{q''},$$
$$\text{ou } P \sin.\mathcal{C}' = \frac{M \sin.\mathcal{C}(q'' - q)}{q''} \ldots\ldots [9].$$

Les équations [6] et [7] donnent $P \sin.\mathcal{C}' = \frac{M \sin.\mathcal{C}(q'' - q)}{q''}$, et $P \cos.\mathcal{C}' = \frac{M \cos.\mathcal{C}(q'' - q) + R(q'' - q')}{q''}$. Substituant ces valeurs dans les équations [1] et [2], il vient

$$P' \cos.\mathcal{C}'' = R + M \cos.\mathcal{C} - \frac{M \cos.\mathcal{C}(q'' - q) + R(q'' - q')}{q''},$$
$$\text{ou } P' \cos.\mathcal{C}'' = \frac{Rq' - M \cos.\mathcal{C}q}{q''} \ldots\ldots [10].$$

$$P' \sin.\mathcal{C}'' = M \sin.\mathcal{C} - \frac{M \sin.\mathcal{C}(q'' - q)}{q''},$$
$$\text{ou } P' \sin.\mathcal{C}'' = \frac{M \sin.\mathcal{C}q}{q''} \ldots\ldots [11].$$

Les équations [8] et [9] donnent, d'après la formule générale

Digitized by Google

d'élimination de l'art. (263), toutes réductions faites, et observant que $\sin.^2\mathcal{C} + \cos.^2\mathcal{C} = 1$,

$$P = \frac{\sqrt{[M^2(q''-q)^2 + 2MR\cos.\mathcal{C}(q''-q')(q''-q) + R^2(q''-q')^2]}}{q''} \ldots\ldots [12],$$

$$\sin.\mathcal{C}' = \frac{M\sin.\mathcal{C}(q''-q)}{\sqrt{[M^2(q''-q)^2 + 2MR\cos.\mathcal{C}(q''-q')(q''-q) + R^2(q''-q')^2]}} \ldots\ldots [13];$$

et les équations [10] et [11] donnent pareillement

$$P' = \frac{\sqrt{[M^2qq + 2MR\cos.\mathcal{C}qq' + R^2q'q']}}{q''} \ldots\ldots [14],$$

$$\sin.\mathcal{C}'' = \frac{M\sin.\mathcal{C}q}{\sqrt{[M^2qq + 2MR\cos.\mathcal{C}qq' + R^2q'q']}} \ldots\ldots [15].$$

318. Les calculs de l'article précédent nous fournissent les conséquences suivantes :

Différentes propriétés déduites de la théorie précédente.

1°. *Le moteur et la résistance, étant supposés en équilibre dans le tour, sont l'un à l'autre, comme le rayon du cylindre est à la distance perpendiculaire de l'axe du cylindre à la direction du moteur; ce qu'on peut encore énoncer, en disant que la somme de leurs moments, rapportée à l'axe, est égale à zéro;*

car l'équation [3] donne $M : R :: p' : p$.

2°. *La somme des charges des tourillons, ou des pressions des points d'appui, décomposées parallèlement à la direction de la résistance, ou prises dans le sens vertical, lorsque la résistance est verticale, est égale à la somme de la résistance et du produit du moteur par le cosinus de l'angle que font leurs directions.*

Ajoutez ensemble les équations [8], [10], qui expriment les charges ou pressions dont il s'agit, vous aurez $P\cos.\mathcal{C}' + P'\cos.\mathcal{C}'' = R + M\cos.\mathcal{C}$. Observons que lorsque R est verticale, $\cos.\mathcal{C}$ est égal au sinus de l'angle de M avec l'horizon.

3°. *La somme des charges des tourillons, ou des pressions des points d'appui, décomposées perpendiculairement à la direction de la résistance, ou prises dans le sens horizontal, lorsque la résistance est verticale, est égale au moteur multiplié par le sinus de l'angle que fait sa direction avec celle de la résistance.*

Ajoutez ensemble les équations [9], [11], qui expriment les charges ou pressions dont il s'agit, vous aurez $P\sin.\mathcal{C}' + P'\sin.\mathcal{C}'' = M\sin.\mathcal{C}$. Observons que lorsque R est verticale, $\sin.\mathcal{C}$ est égal au cosinus de l'angle que M fait avec l'horizon.

4°. *Les pressions des points d'appui ne sont dans un même plan que lorsque le moteur et la résistance sont dans un même plan perpendiculaire à l'axe du cylindre, ou lorsque leurs directions sont paralleles.*

Digitized by Google

Lorsque le moteur et la résistance sont dans le même plan, on a $q = q'$, et les équations [13], [15], donnent, pour sin. ε' et sin. ε'', la même valeur $\frac{M \sin.\varepsilon}{\sqrt{(M^2 + 2MR\cos.\varepsilon + R^2)}}$: lorsqu'ils sont dirigés parallèlement, on a $\varepsilon = 0$; ce qui donne par conséquent sin. $\varepsilon' = 0$, et sin. $\varepsilon'' = 0$; ainsi, dans ce cas, les directions des pressions des points d'appui sont paralleles à celles du moteur et de la résistance.

5°. *Lorsque le moteur et la résistance ont des directions paralleles, leur somme est égale à la somme des pressions des points d'appui, et la pression d'un de ces points d'appui se trouve en multipliant le moteur et la résistance, chacun par sa distance à l'autre point d'appui* (cette distance étant mesurée sur l'axe), *et divisant la somme des produits par la longueur de l'axe.*

Si on fait $\varepsilon = 0$ dans les équations [12] et [14], on aura cos. $\varepsilon = 1$; la quantité, sous le radical, sera un quarré parfait; il en résultera les valeurs $P = \frac{M(q''-q) + R(q''-q')}{q''}$ et $P' = \frac{Mq + Rq'}{q''}$, et la somme de ces deux équations donnera $P + P' = M + R$.

Méthode pour trouver les conditions de l'équilibre, la direction et la quantité de la charge des points d'appui, quelles que soient les directions et les quantités des moteurs et résistances appliquées au tour.

319. Il peut se faire qu'il y ait plusieurs moteurs et plusieurs résistances, dirigées dans des plans perpendiculaires à l'axe, et qui le coupent en différents points, tant entre les points d'appui qu'au dehors. Quel qu'en soit le nombre et la direction dans ces plans, les conditions de l'équilibre autour de l'axe seront toujours, comme dans l'article précédent, n° 1, que la somme des moments soit égale à zéro.

Ensuite, pour trouver les pressions des points d'appui et les plans dans lesquels s'exercent ces pressions, il ne s'agira que de former les numérateurs des seconds termes des équations [8], [9], [10], [11], de l'article précédent, des produits de tous les moteurs ou résistances, par des facteurs analogues à ceux qui s'y trouvent pour M; savoir, par les sinus ou cosinus des angles qu'ils font avec les axes CX, CY, et par leurs distances à l'un des points d'appui, laissant toujours la longueur de l'axe pour dénominateur; et nommant a, b, a', b', les seconds termes de chacune de ces équations, on aura, conformément à ce qu'on a vu, art. (263), $P = \sqrt{(a^2 + b^2)}$, sin. $\varepsilon' = \frac{b}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$, $P' = \sqrt{(a'a' + b'b')}$, sin. $\varepsilon'' = \frac{b'}{\sqrt{(a'a' + b'b')}}$.

Cas où on a égard à la pesanteur du tour.

D'après cela, il est aisé de faire entrer en considération la pesanteur de la roue, du cylindre, etc., quand on aura déterminé le point par où passe la résultante de leurs poids, ou le centre de gravité de l'équipage.

Digitized by Google

320. La corde qui s'enroule autour du cylindre, et qui transmet à la résistance l'action du moteur, doit être le plus souvent d'un diametre assez grand pour supporter un effort considérable ; et comme cet effort se fait dans l'axe de la corde, il faut ajouter le demi-diametre de la corde au rayon du cylindre. Lorsque ensuite, après un certain nombre de révolutions, le cylindre étant couvert par la corde, on est obligé de l'enrouler sur elle-même, il faut ajouter deux rayons de la corde au rayon du cylindre, et ainsi de suite. On voit que le moteur perd de son effet à chaque fois que la corde, en s'enroulant, revient sur sur elle-même, ou recouvre les tours qu'elle avoit déjà faits.

Comment on doit avoir égard au diametre de la corde et à la quantité de son *enroulage* autour du cylindre.

Nous traiterons en leur lieu des différentes machines composées qui se rapportent au tour : la fin de ce chapitre sera employée à dire un mot des roues dentées, des engrenages, et du cric.

321. La *fig.* de ce qu'on nomme, en mécanique, *roue dentée*, est trop connue pour en faire la description. Les *fig.* (88, 89, 90, 91 et 92), présentent les modeles de deux especes d'engrenage très usités. Dans les trois premieres figures, la petite roue dentée, qui est au centre de chaque grande roue, se nomme *pignon*, et les dents de ce pignon se nomment ses *ailes*. Lorsque les roues dentées sont employées en grand, leurs dents prennent souvent le nom d'*alluchons*. Dans la *fig.* 91, les dents de la grande roue sont perpendiculaires à son plan. Ce qui tient lieu de pignon, et qu'on appelle *lanterne*, est un assemblage de plusieurs *barres* qu'on nomme *fuseaux*, plantées dans la circonférence de deux plaques rondes paralleles; cette machine fournit le moyen de produire un mouvement de rotation perpendiculairement au plan de la grande roue dans lequel le moteur est censé agir. La *fig.* 92 présente le modele d'un engrenage au moyen duquel on produit un mouvement de rotation dans un plan oblique à celui de la roue à laquelle est appliqué le moteur. Toutes ces dispositions d'engrenage sont susceptibles d'une infinité de combinaisons : nous en verrons des exemples à mesure que la partie descriptive de cet ouvrage nous en fournira l'occasion.

Des roues dentées, pignons, engrenages de différentes sortes, etc.

322. L'analogie qui existe entre le tour et les roues dentées est facile à saisir; on voit que la grande roue fait l'office de celle qui est adaptée au cylindre du tour; que le pignon tient lieu de ce cylindre. Les dents et les ailes ne sont qu'un moyen de commodité pour communiquer le mouvement à d'autres roues et à d'autres pignons avant de le transmettre à la résistance, et

Analogie entre le tour et les roues dentées

Digitized by Google

augmenter par-là l'avantage du moteur, ainsi qu'on va le voir.

Recherche des conditions de l'équilibre dans les roues dentées.

323. Soit M le moteur qui est censé agir tangentiellement à la premiere roue. Nommons R, R′, R″, etc., les rayons des roues; r, r', r'', etc., ceux de leurs pignons; m, m', m'', etc., les efforts produits à l'extrémité du rayon de chaque pignon, ou de celui de chacune des roues qui les suivent. Supposons qu'il y ait quatre roues et quatre pignons, on aura, dans le cas de l'équilibre (318, n° 1), $MR = mr$, $mR' = m'r'$, $m'R'' = m''r''$, $m''R''' = m'''r'''$; d'où l'on tire, en éliminant successivement m, m', etc., $MRR' = m'rr'$, $MRR'R'' = m''rr'r''$, $MRR'R''R''' = m'''rr'r''r'''$; il en seroit de même d'un plus grand nombre de roues et de pignons; ainsi le moteur est à l'effort qui s'exerce à l'extrémité du rayon d'un pignon quelconque, dans le rapport inverse du produit des rayons de toutes les roues, depuis la premiere jusqu'à celle inclusivement qui porte le pignon en question, au produit des rayons de tous les pignons que portent ces roues; d'où l'on conclut que

Exposition de ces conditions.

324. *Lorsqu'un moteur fait équilibre à une résistance au moyen de roues dentées et de pignons, le moteur, supposé appliqué tangentiellement à l'extrémité du rayon de la premiere roue, est à la résistance, supposée appliquée de la même maniere au dernier pignon, comme le produit des rayons des pignons est au produit des rayons des roues* (*).

Rapports entre les nombres des tours des roues dentées qui s'engrenent au moyen de pignons.

325. Le nombre de tours que fera la seconde roue sera au nombre de tours que fera dans le même temps la premiere ou le pignon qu'elle porte à son centre, en raison inverse du nombre de dents que porte cette seconde roue, et du nombre d'ailes du pignon de la premiere. Il en sera de même de la troisieme à l'égard de la seconde, etc. Soit k le nombre de tours du premier pignon dans un temps donné, n le nombre de ses ailes, N′ le nombre des dents de la roue qui suit, n' le nombre des ailes de son pignon, k' le nombre de ses tours faits pendant que le premier pignon en fait un nombre k; soient encore N″, n'', k'', les nombres analogues pour la troisieme roue, etc., on aura, par ce qui vient d'être dit, $k : k' :: N' : n$, ou $kn = k'N'$, on aura pareillement $k'n' = k''N''$, $k''n''' = k'''N'''$, etc.; éliminant succes-

(*) Nous n'avons aucun égard, dans ce moment, tant à la forme des ailes des pignons, qu'à celle des dents des roues, et nous supposons que l'effort se fait à l'extrémité des unes et des autres; nous nous occuperons, quand il en sera temps, des recherches relatives à ces objets.

sivement

sivement k', k'', etc., il vient $knn' = k''N'N''$, $knn'n'' = k'''N'N''N'''$, etc. Ainsi

Expression générale du rapport entre le nombre de tours du premier pignon et le nombre de tours de la derniere roue.

326. *Dans un assemblage de roues dentées et de pignons qui s'engrenent mutuellement, le nombre de tours que fait le premier pignon est au nombre de tours que fait, dans le même temps, la derniere roue, comme le produit des nombres de dents de toutes les roues est à celui des nombres d'ailes de tous les pignons.*

Il est bien évident que si le premier pignon est au centre d'une roue dentée, et si la derniere roue porte un pignon, le nombre des dents de la premiere roue, et celui des ailes du dernier pignon, ne doivent point entrer en compte, puisqu'ils sont étrangers à l'engrenage du pignon et de la roue dont on veut comparer les tours.

Trouver le nombre de roues et de pignons intermédiaires lorsque le rapport précédent est donné. Indétermination du problême.

327. L'équation $knn'n''\ldots n^{(i)} = k^{(i)}NN'N''\ldots N^{(i)}$ (dans laquelle (i) ne désigne point une puissance, mais le n° de l'accentuation relative au nombre i des roues mises en action par le premier pignon) donne $\frac{k}{k^{(i)}} = \frac{NN'N''\ldots N^{(i)}}{nn'n''\ldots n^{(i)}}$. On voit que lorsque le rapport $\frac{k}{k^{(i)}}$ du nombre de tours du premier pignon, à celui des tours de la derniere roue, est donné et égal à un nombre connu a, le nombre des roues et des pignons intermédiaires n'est assujetti qu'à la condition de satisfaire à l'équation $NN'N''$, etc. $= ann'n''$, etc., N, N', etc., et n, n', etc., étant des nombres entiers. Le problême est donc indéterminé, et se résout par les méthodes connues pour ces especes de questions.

Description et théorie du cric.

328. Une des applications les plus simples et les plus utiles qu'on ait faites du tour et des engrenages, est la machine qu'on nomme *cric*, et qui sert à soulever, au moyen de la force d'un seul homme, des fardeaux considérables. La *figure* 93 présente, n° 1, l'élévation extérieure d'un cric, où l'on voit la manivelle et l'encliquetage, dont l'utilité est d'empêcher la manivelle de tourner en sens contraire lorsque, le fardeau portant sur la barre de fer dentée, la force de l'homme n'est point appliquée à la manivelle. On leve le cliquet lorsqu'on veut tourner en sens contraire, afin de faire rentrer la barre de fer dans le chassis qui la renferme. Les n°s 2 et 3 font voir deux especes de mécanismes intérieurs pour le cric : dans le premier, c'est un simple pignon placé dans l'axe de la manivelle qui s'engrene dans les dents de la barre verticale ; dans le second, le pignon de la manivelle s'engrene dans une roue dentée portant elle-même un second pignon qui s'engrene dans les dents de la barre verticale.

Digitized by Google

La premiere espece de cric donne moins d'avantage au moteur que la seconde, mais, d'un autre côté, elle est plus solide. Il faut, autant qu'on le peut, simplifier les engrenages dans les machines destinées à soulever, et sur-tout à transporter des fardeaux.

329. On voit aisément, d'après ce qui est dit art.(324), que, dans le cric profilé, n° 2, le moteur est à la résistance, comme le rayon du pignon est à celui de la manivelle, et que dans le cric profilé, n° 3, le moteur est à la résistance, comme le produit des rayons des pignons est à celui du rayon de la roue dentée par le rayon de la manivelle.

Du plan incliné.

Détermination des conditions de l'équilibre d'un corps posé sur un plan, quelles que soient la direction, la quantité et le nombre des moteurs qui agissent sur lui.

330. Lorsqu'un corps, posé sur un plan inébranlable, est sollicité par l'action d'un nombre quelconque de moteurs, on peut considérer leur effort combiné comme équivalent à celui de deux moteurs dont l'un tendroit à faire mouvoir le corps parallèlement, et l'autre perpendiculairement au plan en question (110). Nommons M, M′, M″, etc., les moteurs qui agissent sur le corps ; σ, σ', σ'', etc., les angles que font leurs directions avec le plan sur lequel le corps est posé ; Ψ, Ψ', Ψ'', etc., les angles que font les projections de leurs directions avec une ligne donnée de position dans ce plan ; et p, p', p'', etc., les distances perpendiculaires de ces projections à un point pris sur cette ligne, où le plan est rencontré par un axe qui lui est perpendiculaire, on aura (258 et 292) les trois équations suivantes, dont les deux premieres expriment les conditions de l'équilibre de translation parallèlement au plan, et la troisieme, les conditions de l'équilibre de rotation autour de l'axe dont on vient de parler,

$$M\cos.\sigma\cos.\Psi + M'\cos.\sigma'\cos.\Psi' + M''\cos.\sigma''\cos.\Psi'' + \text{etc.} = 0,$$
$$M\cos.\sigma\sin.\Psi + M'\cos.\sigma'\sin.\Psi' + M''\cos.\sigma''\sin.\Psi'' + \text{etc.} = 0,$$
$$Mp\cos.\sigma + M'p'\cos.\sigma' + M''p''\text{cosin.}\sigma'' + \text{etc.} = 0,$$

en donnant des signes aux différents termes de ces équations, conformément à tout ce que nous avons dit dans les différents articles où est discutée la théorie de laquelle elles sont déduites.

Si le corps est sollicité en sens contraire par deux moteurs M et M′, dont les directions soient dans le même plan, on pourra

Digitized

supposer Ψ et $\Psi' = 0$; dans ce cas, on aura cos. Ψ et cos. $\Psi' = 1$, p et $p' = 0$; ce qui donnera M cos. $\sigma = M'$ cos. σ', ainsi qu'on l'a vu art. (72).

331. La seule condition de l'équilibre de translation, perpendiculairement au plan sur lequel est posé le corps, est que la somme des composantes qui le sollicitent dans cette direction, c'est-à-dire la somme des termes M sin. σ + M' sin. σ' + M'' sin. σ'' + etc., soit négative, en prenant positivement les moteurs qui tendent à éloigner du plan, et négativement ceux qui tendent à en approcher.

332. Le mouvement de rotation autour d'axes parallèles au plan, peut être produit ou par les moteurs paralleles au plan, ou par ceux qui lui sont perpendiculaires, ou enfin par l'action réunie de tous ces différents moteurs. Ne considérons d'abord que les moteurs perpendiculaires au plan; le mouvement de rotation qu'ils tendent à produire sera nécessairement nul si, tout ce qu'on vient de dire dans les deux articles précédents ayant lieu, le corps est en contact avec le plan par une surface telle que toutes les sections qu'on pourroit faire au corps, perpendiculairement au plan sur lequel il est posé, passent toujours par cette surface; ou autrement, si les projections orthogonales de tous les points du corps sur le plan se trouvent dans la surface de contact.

Le corps ne peut pas toucher le plan de la maniere dont on vient de parler; il peut ne le toucher que par une ligne, par quelques points, ou même par un seul : dans tous ces cas si, par le point, ou par un des points de contact, on mene une ligne dans le plan sur lequel le corps est posé, et une perpendiculaire à cette ligne dans le même plan, conservant pour les moteurs, pour les valeurs angulaires relatives à la premiere ligne, et pour les angles formés par les directions des moteurs et le plan, les dénominations de l'art. 330; nommant r, r', r'', etc., les perpendiculaires communes à la direction des moteurs et à la premiere ligne; q, q', q'', etc., les perpendiculaires communes à la direction des moteurs et à la seconde ligne, on aura pour les conditions de l'équilibre de rotation, parallèlement au plan sur lequel le corps est posé, les équations (292).

$$Mr\sqrt{(\sin.^2\sigma + \sin.^2\Psi\cos.^2\sigma)} + M'r'\sqrt{(\sin.^2\sigma' + \sin.^2\Psi\cos.^2\sigma')} + \text{etc.} = 0.$$

$$Mq\sqrt{(\sin.^2\sigma + \cos.^2\sigma\cos.^2\Psi)} + M'q'\sqrt{(\sin.^2\sigma' + \cos.^2\sigma'\cos.^2\Psi)} + \text{etc.} = 0.$$

333. Ainsi voilà, outre la condition de l'art. (331), cinq équa-

Récapitulation des conditions précédentes d'équilibre, et des circonstances qui rendent applicables les équations qui les renferment.

tions pour exprimer une partie des équations de l'équilibre d'un corps posé sur un plan, qui, en désignant par le premier terme affecté du signe S, la somme de tous les termes, sont

$$S[M\cos.\sigma\cos.\Psi]=0, S[M\operatorname{cosin.}\sigma\sin.\Psi]=0, S[Mp\cos.\sigma]=0,$$
$$S\left[Mr\sqrt{(\sin.^2\sigma+\cos.^2\sigma\sin.^2\Psi)}\right]=0,$$
$$S\left[Mq\sqrt{(\sin.^2\sigma+\cos.^2\sigma\cos.^2\Psi)}\right]=0.$$

Lorsqu'on n'aura à considérer que les trois premieres, le point par où passent les deux lignes ou axes auxquels se rapportent les angles Ψ et les perpendiculaires pourra se trouver placé en un endroit quelconque du plan; mais si on considere les deux dernieres équations, alors, ou il n'y a qu'un point de contact, ou il y en aura deux, ou enfin il y en aura un nombre quelconque : dans le premier cas, les axes doivent passer par le point de contact; dans le second, ils doivent passer par un point pris sur la ligne qui joint les deux points de contact; dans le troisieme enfin, ils doivent passer par un point tel qu'en joignant par des lignes au moins trois des points de contact, il se trouve renfermé dans le polygone formé par ces lignes. Il est inutile que nous nous arrêtions à considérer les moteurs qui agissent parallèlement au plan; nous y reviendrons dans la suite (1012 et 1013).

Valeur de la pression totale qu'éprouve le plan de la part du corps qui y est posé.

334. Lorsqu'un corps, placé sur un plan, remplira les conditions de l'article précédent, il est bien évident que la pression perpendiculaire qu'il exercera sur ce plan sera égale à la somme des efforts que font les moteurs pour le faire mouvoir dans cette direction, c'est-à-dire (331), à $-S[M\sin.\sigma]$; et si le plan est mobile dans une direction perpendiculaire à sa surface, il suffira, pour l'équilibre, qu'il oppose un effort égal à cette somme.

On ne connoît encore aucun moyen de déterminer la pression particuliere de chaque point de contact d'un corps posé sur un plan.

335. La valeur précédente est celle de la pression totale qu'éprouve le plan quant à la détermination de la partie de cette pression totale que supportent chacun des points de contact : c'est une question qui n'a point encore été résolue lorsqu'il y a plus de deux points. Il paroît que sa solution ne peut être déduite d'aucun principe connu en mécanique, et qu'on seroit réduit, pour obtenir autant d'équations que d'inconnues, à faire des hypotheses. (Voyez le 8e volume des *Opuscules mathématiques* de M. d'Alembert).

336. Il ne seroit pas difficile de trouver les conditions de la stabilité d'un corps porté par deux ou plusieurs plans, comme sont les pierres ou *voussoirs* qui composent les voûtes. Ce dernier objet de recherche étant destiné à être traité en particulier dans cet ouvrage, nous ne nous y arrêterons pas davantage pour

le présent. Nous finirons ce chapitre par l'application directe du principe des vîtesses virtuelles à une question d'équilibre.

Deux corps pesants étant liés ensemble par une corde qui passe sur une poulie, et l'un d'eux assujetti à se mouvoir sur une courbe donnée, trouver une autre courbe telle que, le second corps y étant placé à un point quelconque, les deux corps soient toujours en équilibre.

337. Soit la courbe donnée BNK (*fig.* 94), et un corps N placé sur cette courbe, attaché à une corde passant sur la poulie H, très petite, et ayant à son autre extrémité un corps M placé sur la courbe AMZ, et proposons-nous de trouver la nature de la courbe AMZ pour que les deux corps abandonnés à la pesanteur soient toujours en équilibre sur les deux courbes.

Faisons passer par la poulie H l'axe vertical HX ; nommons les abscisses positives HQ, x; les abscisses positives HP, x'; QN et PM étant des ordonnées horizontales. Faisons la longueur constante de la corde NHM $= a$, NH $= z$, et HM $= z'$.

Solution aisée de ce problème par le principe des vîtesses virtuelles.

Si le corps N est supposé parcourir, en descendant, un arc élémentaire de la courbe BNK, il fera parcourir en montant, au corps M, un arc élémentaire de la courbe AMZ, et l'un et l'autre de ces arcs représentera la vîtesse virtuelle du corps qui le parcourra (139). Maintenant il est bien évident que les décompositions de ces vîtesses, parallèlement à la direction HX du moteur, sont, pour la premiere, $+ dx$; et pour la seconde, $- dx'$, celle-ci ayant le signe négatif, parceque x', qui dépend du mouvement de M et N, et par conséquent de x, diminue quand x augmente, leurs produits par les masses seront $N\,dx$ et $- M\,dx'$; égalant leur somme à zéro, et prenant avec un signe contraire la composante qui agit dans un sens contraire à la direction du moteur, on a l'équation $N\,dx + M\,dx' = 0$, dont l'intégrale est $Nx + Mx' = A$.

La distance du centre de gravité des deux corps, à une horizontale placée au-dessus, est toujours un *maximum*.

Cette équation fait voir que, quelque position que prennent les corps N et M, la distance de leur centre de gravité au point H, comptée sur l'axe HX, sera toujours la même, c'est-à-dire que ce centre de gravité se trouvera toujours dans une horizontale CE donnée de position. En effet, cette distance est égale à $\frac{Nx + Mx'}{N + M}$ (162), ou à $\frac{A}{N + M}$, et par conséquent constante. Cette propriété, jointe à l'équation $z' = a - z$ que donne l'égalité entre la longueur totale de la corde et ses deux parties z et z', fournit un moyen bien simple de construire la courbe AMZ d'après la courbe BNK.

Usage de cette propriété pour construire avec facilité la courbe cherchée.

Le point A où doit commencer la courbe AMZ étant déterminé, cherchez la position de la ligne CE où se trouve le centre de gravité des deux corps lorsque le corps M est au point A ; faisant HD $= b$, on aura $\frac{Nx + Mx'}{N + M} = b$, ou $\frac{A}{N + M} = b$; ce qui donne

Digitized by Google

$A = b(N + M)$, et $x' = \frac{N(b-x)+Mb}{M}$. Au moyen de cette équation, et la courbe donnée BNB étant construite, on connoîtra aisément la valeur de l'abscisse HP ou x', correspondante à l'abscisse HQ ou x; on menera ensuite au point P la perpendiculaire indéfinie PT; et, d'une ouverture de compas égale à la longueur totale de la corde, moins la longueur HN, on décrira du centre H un arc de cercle qui coupera la perpendiculaire PT en un point M de la courbe cherchée.

Solution du problême précédent par le principe d'Huyghens : ce principe dérive de celui des vîtesses virtuelles.

338. Le principe des vîtesses virtuelles a donné fort aisément et fort directement la solution de ce problême; on auroit pu la tirer d'un autre principe très connu, qui est que, lorsque plusieurs corps graves, agissant les uns sur les autres, sont en équilibre, leur centre de gravité commun est le plus bas possible. D'après cette propriété, il est évident que les corps M et N devant être en équilibre dans toutes les positions sur les courbes AZ, BK, on doit constamment avoir $\frac{Nx+Mx'}{N+M} = maximum$, ou $Ndx + Mdx' = 0$, comme on l'a trouvé précédemment.

Le principe dont on vient de parler est celui d'Huyghens, il est fort commode dans bien des cas, mais il n'est qu'une branche de celui des vîtesses virtuelles. (Voyez la *Mécanique* de M. de la Grange, pag. 37).

De la vis.

Description et génération de la vis à filets triangulaires et quarrés.

339. La forme de la vis est universellement connue : voici sa génération.

Soient (*fig.* 95, n° 1) les deux cercles concentriques COC'Q, et BO'B'Q', représentant le plan de la vis; imaginons qu'un des points du cercle extérieur, le point C, par exemple, soit mu tout autour de la circonférence à laquelle il appartient, sur la surface cylindrique à laquelle elle sert de base, en s'élevant graduellement au-dessus du plan de cette circonférence, de maniere que si, lorsqu'il est revenu perpendiculairement au-dessus du point C de départ, la hauteur perpendiculaire à laquelle il s'est élevé est h, on ait $\frac{h}{n}$ pour la hauteur à laquelle il étoit après avoir parcouru la n^e partie de la circonférence, la courbe que décrira le point C sur la surface cylindrique, qui a COC'Q pour base, se nomme une *hélice* (*); on en voit, n° 2, la projection en élévation.

(*) On la nomme aussi *spire*, et le mot *hélice* a été quelquefois employé comme synonyme de *spirale*; la signification que nous lui donnons ici est plus étymologique. (Voyez le *Dictionnaire d'architecture* de M. d'Aviler, au mot *Hélice*).

Digitized by Google

Prenons ensuite sur le cercle intérieur BO'B'Q' un point dont la distance à un des points de l'hélice précédente, mesurée parallèlement à l'axe de la surface cylindrique, et dans un plan passant par cet axe, soit égale à $\frac{1}{n}h$, et faisons décrire à ce point une seconde hélice, projetée, n° 3, sur le surface cylindrique qui auroit BO'B'Q' pour base, qui soit telle qu'après une révolution le point générateur soit élevé de la quantité h au-dessus de la base. Il est évident que les deux points dont on vient de parler, continuant de la même maniere à décrire des hélices, chacun sur la surface cylindrique à laquelle il appartient, la distance d'un point quelconque d'une de ces courbes au point correspondant de l'autre, mesurée parallèlement à l'axe et dans un plan passant par cet axe, sera toujours $=\frac{1}{n}h$.

Le cylindre, qui a pour base le cercle intérieur, forme ce qu'on appelle *le corps de la vis;* on voit dans les élévations, n° 5, les projections BB', B"B"', etc., des demi-hélices tracées sur le corps de la vis. Les projections cc', $c''c'''$, etc., sont celles des demi-hélices tracées par le point C; la surface courbe qui joint les hélices du corps de la vis avec les hélices extérieures, est telle que ses éléments, pris dans la coupe par l'axe, sont des lignes droites qui, dans le n° 5, forment les parties triangulaires qu'on voit de chaque côté; le solide renfermé entre cette surface et le corps de la vis, pris dans l'espace d'une révolution entiere, s'appelle *filet de la vis*; ainsi les parties visibles, dans la projection n° 5, représentent des demi-filets; la distance h, ou le chemin que fait, parallèlement à l'axe, le point générateur pendant une révolution, s'appelle *pas de la vis*, ou *hauteur du pas de la vis.*

Le n° 4 représente l'élévation d'une vis à filets quarrés : sa génération doit se comprendre aisément après ce que nous venons de dire; le profil de la saillie des filets est un parallélogramme, et la hauteur du pas de la vis est égale à l'épaisseur du filet, plus le vuide qu'il y a d'un filet à l'autre, car c'est-là le chemin que fait parallèlement à l'axe le point générateur pendant une révolution entiere.

Ce que c'est que l'écrou d'une vis.

La vis est ordinairement accompagnée d'une autre piece qu'on nomme *écrou* (n°s 6 et 7). L'écrou est un morceau de bois ou de métal, dont la forme extérieure peut varier, mais qui est percé d'un trou dont le parois a, en creux, exactement la même forme que la vis a en relief. Par ce moyen, en tournant la vis perpendiculairement à l'axe, on l'insinue dans l'écrou, où, à chaque tour, elle s'enfonce d'une quantité égale à la hauteur

Digitized by Google

du pas de vis. Nous verrons bientôt comment la vis s'emploie comme moteur sans être adaptée à un écrou.

Usage de la vis : l'avantage du moteur est le même, soit que la vis ou l'écrou soient mobiles.

340. On se sert de la vis, comme des autres machines, pour contre-balancer des résistances, mouvoir des masses, élever des poids, etc.; elle est d'un grand secours dans les arts pour comprimer des corps, en serrer fortement ensemble deux, ou un plus grand nombre; dans tous ces usages, il est ordinaire d'adapter à une des extrémités de la vis, qu'on appelle *la tête*, une barre ou levier, au moyen duquel on la tourne dans son écrou supposé immobile. Il arrive souvent que c'est la vis qui est fixe, et l'écrou est mobile; alors cet écrou porte la barre ou levier dont nous avons parlé; l'avantage, toutes choses égales d'ailleurs, est le même pour le moteur, et cet avantage peut être très considérable. Quand nous en serons à parler du frottement, nous verrons l'utilité qu'on en retire dans l'usage de la vis (*).

Recherche des conditions de l'équilibre dans la vis.

341. On peut trouver les conditions de l'équilibre dans la vis, en la considérant comme une machine qui participe du levier et du plan incliné; mais le principe des vîtesses virtuelles donne ces conditions trop simplement et trop directement pour négliger d'en faire l'application.

Soit (*fig.* 97, n°s 1 et 2) une vis dont la tête, n° 1, ou l'écrou, n° 2, est armé d'une barre ou levier perpendiculaire à l'axe, et qu'on emploie à surmonter une résistance telle que seroit un ressort à plier, n° 1, ou un corps à comprimer, n° 2. Supposons que le moteur est appliqué à l'extrémité de la barre ou levier; que sa direction perpendiculaire à ce levier se trouve encore dans un plan perpendiculaire à l'axe de la vis, et que l'effort de la résistance se fait dans l'axe de cette vis. Nous donnons à la question cet état de simplicité, parceque, quelles que soient les directions et les quantités des moteurs et des résistances, il est si aisé de l'y ramener, d'après les principes que nous avons développés ci-devant, qu'en la compliquant davantage ce seroit s'engager dans des longueurs superflues. Nommons M le moteur,

(*) On se sert, dans l'astronomie et la géométrie-pratique, dans la physique et dans plusieurs arts, de la vis comme *micrometre* ou instrument propre à évaluer de très petites mesures; la *fig.* 96 représente un micrometre de compas à verge. On voit que la tête de la vis porte un index dont l'extrémité décrit un cercle pendant que la vis fait une révolution; le cercle que décrit l'extrémité de l'index est divisé en parties égales, et chacune de ces parties indique une partie proportionnelle de la hauteur du pas de la vis. Ainsi, en supposant la hauteur du pas de vis de $\frac{1}{4}$ de ligne, et la division du cercle qui a l'index pour rayon en 25 parties, lorsque l'index aura marché d'une division, l'écrou et les corps qui lui sont attachés auront marché de $\frac{1}{100}$ de ligne, longueur qui sera ainsi rendue sensible, et qu'il seroit peut-être impossible d'évaluer directement. Un micrometre dont le pas de vis seroit de $\frac{1}{4}$ de ligne adapté à une lunette

teur, P la résistance, h le pas de la vis, L la longueur du levier, mesurée depuis l'axe de la vis; n le nombre de fois que la circonférence contient le rayon.

Si, lorsque le moteur et la résistance sont en équilibre, on suppose que le moteur soit un instant prépondérant, il parcourra pendant cet instant une portion infiniment petite de la circonférence qui a L ou son bras de levier pour rayon, et qui sera $\frac{1}{\omega} n\mathrm{L}$, ω étant un nombre infini. Or, d'après la génération de la vis, la résistance parcourra, parallèlement à l'axe, une partie proportionnelle de la hauteur du pas de vis, ou $\frac{1}{\omega} h$; ainsi $\frac{1}{\omega} n\mathrm{L}$, et $\frac{1}{\omega} h$, seront les vîtesses virtuelles, la derniere qui est dirigée en sens contraire de la résistance, puisque le moteur est supposé prépondérant, devant être prise négativement. On aura donc (139) $\frac{1}{\omega} n\mathrm{LM} = \frac{1}{\omega} h\mathrm{P}$, ou $n\mathrm{LM} = h\mathrm{P}$, et $\mathrm{M} : \mathrm{P} :: h : n\mathrm{L}$; ce qui fournit le théorême suivant.

Énonciation de ces conditions.

342. *Un moteur dirigé dans un plan perpendiculaire à l'axe d'une vis, et appliqué perpendiculairement à l'extrémité d'une barre ou levier placé dans ce plan, et adapté à la vis ou à l'écrou, suivant que l'un ou l'autre est mobile, est à la résistance agissant dans le sens de l'axe de la vis, dans le cas de l'équilibre, comme la hauteur du pas de la vis est à la circonférence qui a pour rayon la longueur du levier, mesurée depuis l'axe de la vis.*

On voit par-là quel avantage prodigieux la vis donne au moteur; en supposant le pas d'une ligne, et la distance du moteur à l'axe d'un pied, le moteur, abstraction faite du frottement, ne seroit que la 905e partie de la résistance.

De la vis sans fin, ou vis d'Archimede.

343. On emploie quelquefois la vis sans écrou, au moyen d'un mécanisme qui, dans les diverses modifications qu'on peut lui faire subir, revient toujours, au fond, à celui représenté par la *figure* 98. Les filets d'une vis immobile dans le sens de son axe, mais qui a la liberté de tourner perpendiculairement à cet axe, s'engrenent dans les dents d'une roue placée au-dessous,

de 6 pieds de foyer, mesureroit (en le supposant parfait) un angle de moins d'une seconde dans $\frac{1}{4}$ de tour environ; mais on ne doit pas physiquement compter sur cette précision. Il faut, pour que le micrometre soit juste, que la division de la vis soit bien faite, et que l'écrou soit parfaitement juste. Indépendamment de cela il est ordinaire, dans l'usage, de comprimer l'écrou contre la vis, par un ressort ou un poids, afin qu'il n'y ait point de ballottement ou de temps perdu.

La vis s'emploie aussi souvent pour faire avec justesse, mais sans les mesurer, de petits mouvements qu'on feroit trop forts ou trop foibles, en appliquant immédiatement la main sur le corps à mouvoir. Telles sont celles qu'on adapte aux genoux et aux pieds des instruments de mathématiques, aux réticules des lunettes qu'on veut centrer exactement, etc.

Digitized by Google

et qui ne peut également avoir d'autre mouvement que celui de rotation autour de son centre. Cette roue porte ou un pignon propre à faire mouvoir une autre roue ou un cylindre autour duquel s'enroule une corde qui tient la masse à mouvoir, ou tel autre équipage relatif à l'objet qu'on a en vue.

La vis ainsi employée s'appelle *vis sans fin*, ou *vis d'Archimede;* les dents de la roue inférieure doivent être espacées, relativement à la hauteur du pas de la vis, de maniere à s'engrener avec justesse dans les filets; et les faces de ces dents, qui se trouvent dans le sens de l'épaisseur de la roue, doivent être inclinées pour être à-peu-près paralleles à l'arc d'hélice avec lequel elles se trouvent en contact lors de l'engrenage.

Dans quelques instruments de mathématiques, d'astronomie ou de physique, on a des vis pareilles destinées à faire faire de très petits mouvements circulaires à des cercles ou à des secteurs de cercle; on les nomme alors *vis tangentes*. La *figure* 99, n°s 1 et 2, représente une de ces vis appliquée à la douille d'un pied d'instrument.

Conditions de l'équilibre dans la vis sans fin, 1°. dans le cas d'une seule roue.

344. M étant le moteur appliqué au levier ou à la manivelle (*fig.* 98), h le pas de la vis, L la longueur du levier, R le rayon de la roue, r le rayon du pignon ou du cylindre qui y est adapté, et P la résistance; d'après l'art. (342) l'effort produit à l'extrémité du rayon de la roue et dans le plan de cette force, supposé parallele à l'axe de la vis, sera $= \frac{n\,LM}{h}$; considérant cet effort comme un moteur appliqué à l'extrémité de R, on aura (324) $\frac{n\,LMR}{h} = Pr$, ou $M : P :: rh : n\,LR$; ainsi le moteur est à la résistance, comme le produit du pas de vis, par le rayon du pignon, est au produit de la circonférence qui a pour rayon la distance du moteur à l'axe de la vis, par le rayon de la roue.

2°. Dans le cas d'un nombre quelconque de roues et de pignons.

345. En supposant un plus grand nombre de roues et de pignons, on trouveroit fort aisément que le moteur seroit à l'effort produit à l'extrémité du rayon du dernier pignon, comme le produit du pas de vis, par celui des rayons de tous les pignons, est au produit de la circonférence que le moteur peut décrire autour de l'axe de la vis, par celui des rayons de toutes les roues.

Du coin.

Du coin, de ses usages, et de son utilité; instruments, procédés dans les arts, et objets observés dans la nature, qui se rapportent à cette machine.

346. Nous avons donné, art. (76) une idée du coin, que nous avons considéré comme un assemblage mobile de deux plans inclinés; cette machine, une des plus simples, est en même

Digitized by Google

temps une de celles dont nos besoins nous rappellent le plus souvent la nécessité : on la voit à chaque instant employée à mille usages sous mille formes différentes. Tous les outils tranchants et instruments pointus, tels que le coin à fendre du bois, les couteaux, rasoirs, haches, rabots, clous, pieux, pilotis, etc., se rapportent à cette machine : les moyens qu'on emploie en bien des occasions, et sur-tout dans la fabrique des meules, pour diviser des blocs de pierre, en insinuant dans des fentes des morceaux de bois qu'on fait gonfler en les arrosant; ceux dont on s'est servi quelquefois pour soulever des blocs de pierre en mouillant les cordes seches qui les soutenoient, en sont encore des dépendances. La Nature n'a pas oublié, dans le mécanisme de l'économie animale, un instrument aussi utile : le bec des oiseaux, les cornes, les dents et les griffes des animaux, peuvent être regardés comme des coins, et l'on sait quelle utilité ils en retirent pour leur existence offensive, défensive et alimentaire.

Difficultés dans la théorie du coin, venant de notre ignorance de la nature des corps; marche à suivre pour exposer cette théorie.

347. La théorie du coin, considérée relativement à la nature des corps qu'il a à diviser, tient à des connoissances de physique sur lesquelles nous ne sommes pas encore bien avancés; savoir, la force d'adhésion et la ténacité des différentes matieres, la plus ou moins grande flexibilité des fibres de différents bois, etc. Il est indispensable de faire, dans chaque cas de cette espece, des expériences propres à faire connoître la loi particuliere de résistance des corps qu'on veut diviser. Nous ne ferons ici aucune hypothese particuliere sur cette loi; nous supposerons qu'un coin est en contact par chacun de ses côtés avec deux corps qu'il tend à écarter, et qui opposent à cet effort une résistance dont nous évaluerons la quantité, en ne disant rien de la nature de la cause qui la produit. Nous supposerons encore, pour plus de facilité, dans tout ce chapitre, que les moteurs et les résistances sont dirigés dans des plans paralleles à ceux des figures, et que les signes qui les représentent expriment leurs produits par les masses qu'ils animent.

Conditions de l'équilibre dans le coin ayant à contrebalancer deux résistances perpendiculaires à ses côtés.

348. Soit un coin ACB (*fig.* 100) sollicité par un moteur dont la direction est perpendiculaire à la tête CB, et tendant à diviser en deux parties le corps Q appuyé sur le plan inébranlable XX'. Si, par les points de contact C, C', on mene les perpendiculaires CK, C'K', aux côtés AB, AC, du coin, ces perpendiculaires exprimeront les directions des efforts qu'opposent à l'action du coin les parties du corps Q qu'il tend à séparer. Nommons M le moteur perpendiculaire à la tête du coin, R et R' les résistances perpendiculaires aux côtés AB et AC; prolongeons KC, K'C',

jusqu'à leur point de rencontre en I, duquel nous menerons la perpendiculaire ID sur CB. Les lignes ID, IK, I'K', représentant les directions du moteur et des résistances, on a (266) la proportion M : R : R' : : sin.KIK' : sin.K'ID : sin.KID. Mais les angles KIK',K'ID, KID, sont supplément de CAB, ACB, ABC, et les sinus de ces derniers, égaux à ceux des premiers, sont proportionnels aux côtés qui leur sont opposés. Donc

$$M : R : R' : : \sin.CAB : \sin.ACB : \sin.ABC,$$

ou $M : R : R' : : CB : AB : AC$;

proportion qui donne la suivante:

$$M : R + R' : : CB : AB + AC.$$

Ainsi l'*action exercée par un coin, perpendiculairement à la tête de ce coin, pour diviser un corps, est, dans le cas de l'équilibre, à la somme des résistances qu'il éprouve, perpendiculairement à ses côtés, comme la tête du coin est à la somme des deux côtés.*

Valeur de l'effort que fait, perpendiculairement à chacun de ses côtés, un coin qui tend à séparer deux corps.

349. Au lieu d'un corps unique, supposons deux corps Q, Q' (*fig.* 101) placés sur un plan inébranlable XX', qu'une portion de coin CBII' tend à séparer en s'appuyant sur les lignes ou plans de contact IO, I'O', qui, prolongées, se rencontrent en A, M étant le moteur dirigé perpendiculairement à CB qui anime la portion de coin, menant ID et I'D' perpendiculaires sur CB, d'après ce qui précede, l'effort exercé perpendiculairement par l'action de la portion de coin contre IO, est égal à $\frac{M \sin.I'CD'}{\sin.(CI'D' + BID)}$, en faisant attention que $CI'D' + BID = CAB$; et celui exercé de la même maniere contre $I'O' = \frac{M \sin.IBD}{\sin.(BID + CI'D')}$.

Conditions de l'équilibre lorsqu'un coin tend à séparer deux corps qui ne peuvent avoir qu'un mouvement de rotation.

Faisons XX' parallele à CB, et supposons que les corps Q, Q', sont animés par des moteurs *m*, *m'*, perpendiculaires à XX', ou paralleles à M et poussant dans le même sens que ce dernier; il est évident que l'action de *m* et *m'* ne s'opposera nullement aux efforts qui se font sur IO et I'O', car la seule fonction de ces moteurs est de presser les corps Q, Q', contre le plan XX'.

Cela posé, le corps Q sera sollicité par l'action combinée de deux moteurs; savoir, $\frac{M \sin.I'CD}{\sin.(CI'D' + BID)}$, agissant perpendiculairement à IO et *m*, dont la direction est perpendiculaire à XX'. Supposons que ce corps ne puisse avoir d'autre mouvement qu'un mouvement de rotation autour du point X, parallele au plan de la figure; nommons *p* la distance de ce point à la direc-

Digitized by Google

tion de l'effort perpendiculaire à IO, et p' sa distance à la direction de m, on aura, pour les conditions de l'équilibre de rotation autour de R (152), $p \frac{\text{M sin. I'CD'}}{\text{sin.(BID + CI'D')}} = p'm$.

Faisant le même raisonnement pour le corps Q', et nommant p'' et p''' ce que nous avons nommé p et p' pour le corps Q, on aura, pour les conditions de l'équilibre de rotation autour du point X', l'équation $p'' \frac{\text{M sin. IBD}}{\text{sin.(BID + CI'D')}} = m'p'''$.

350. Nommons ϵ, ϵ', les angles formés par les lignes IB, I'C', et la direction du moteur, on aura $\text{I'CD'} = 90° - \epsilon'$, $\text{IBD} = 90° - \epsilon$; l'effort fait contre OI deviendra $\frac{\text{M cos.}\epsilon'}{\text{sin.}(\epsilon + \epsilon')}$; et celui contre O'I', $\frac{\text{M cos.}\epsilon}{\text{sin.}(\epsilon + \epsilon')}$. Ensuite les conditions de l'équilibre de rotation autour de X et X' seront exprimées par les équations

$$\frac{\text{M}p \text{ cos.}\epsilon'}{\text{sin.}(\epsilon + \epsilon')} = mp', \text{ et } \frac{\text{M}p'' \text{cos.}\epsilon}{\text{sin.}(\epsilon + \epsilon')} = m'p'''.$$

Si $\epsilon = \epsilon'$, on aura $\frac{\text{M}p \text{ cos.}\epsilon}{\text{sin.}2\epsilon} = mp'$, et $\frac{\text{M}p'' \text{cos.}\epsilon}{\text{sin.}2\epsilon} = m'p'''$; mais on sait, par la trigonométrie, que $\text{sin.}2\epsilon = 2 \text{ sin.}\epsilon \text{ cos.}\epsilon$; d'où $\frac{2 \text{ cos.}\epsilon}{\text{sin.}2\epsilon} = \frac{1}{\text{sin.}\epsilon}$; ainsi ces équations deviennent

$$\frac{\frac{1}{2}\text{M}p}{\text{sin.}\epsilon} = mp', \text{ et } \frac{\frac{1}{2}\text{M}p''}{\text{sin.}\epsilon} = m'p'''.$$

Conditions de l'équilibre lorsqu'un coin tend à séparer deux corps qui peuvent glisser sur leur base.

351. Le corps Q' étant supposé immobile, supposons que Q soit retenu sur le plan XX' par une puissance f dont la direction soit perpendiculaire à celle de M, cette puissance aura, dans le cas de l'équilibre, à contre-balancer l'effort perpendiculaire sur $\text{IO} = \frac{\text{M cos.}\epsilon'}{\text{sin.}(\epsilon + \epsilon')}$, décomposé parallèlement à X'X, ou multiplié par cos.ϵ; ce qui donnera l'équation $\text{f} = \frac{\text{M cos.}\epsilon \text{ cos.}\epsilon'}{\text{sin.}(\epsilon + \epsilon')}$.

Dans le cas où $\epsilon = \epsilon'$, on a $\text{f} = \frac{\text{M cos.}^2\epsilon}{\text{sin.}2\epsilon} = \frac{\frac{1}{2}\text{M cos.}\epsilon}{\text{sin.}\epsilon}$, en substituant $\frac{1}{\text{sin.}\epsilon}$ à $\frac{2 \text{ cos.}\epsilon}{\text{sin.}2\epsilon}$, d'après ce qu'on a vu dans l'article précédent.

Recherche des conditions de l'équilibre entre deux portions de coin animées par des moteurs quelconques, et s'appuyant l'une contre l'autre.

352. Cherchons à présent les conditions de l'équilibre entre deux portions de coin OII'O', O'I'I''O'' (*fig.* 102), animés par des moteurs M, M', et soutenus sur les lignes ou plans IO, I''O'', par les corps immobiles Q, Q'.

Nommons ϵ, ϵ', les angles que font les lignes IO, I'O', avec la direction du moteur M qui anime le corps OII'O'; ϵ'', ϵ''', les angles que font les lignes I'O', I''O'', avec la direction de M'; γ, γ', les angles que font les lignes IO, I''O'', avec une ligne ou

Digitized by Google

axe ZZ' donnée de position ; et δ, δ', les angles que font les directions des moteurs M, M', avec le même axe ZZ'.

Cela posé, pour que tout le système soit en équilibre, il faut que les actions des moteurs, décomposées perpendiculairement aux lignes IO, I'O', I"O", soient détruites. Celles qui s'exercent contre les lignes IO, I"O", le sont, puisque les corps Q, Q', sont inébranlables par hypothese. Il reste donc à détruire les efforts qui se font sur la ligne I'O', et pour cela, il faut établir que la pression perpendiculaire à cette ligne, produite par le corps IOO'I', est égale et directement opposée à celle produite perpendiculairement à la même ligne par le corps I'O'O"I".

Reprenant les valeurs de l'art. (350), on a pour la pression de OII'O', perpendiculaire à O'I', $\frac{M\cos.\epsilon}{\sin.(\epsilon+\epsilon')}$; et conséquemment pour celle de O'I'I"O", perpendiculaire à la même ligne, $\frac{M'\cos.\epsilon'''}{\sin.(\epsilon''+\epsilon''')}$. Égalant ces deux valeurs, il vient

$$\frac{M}{M'} = \frac{\sin.(\epsilon+\epsilon')}{\sin.(\epsilon''+\epsilon''')} \cdot \frac{\cos.\epsilon'''}{\cos.\epsilon}.$$

Observons que $\epsilon''' = \gamma' - \delta'$, et que $\epsilon = \gamma - \delta$; ensuite on a, d'après les formules connues de la trigonométrie,

$$\cos.(\gamma' - \delta') = \cos.\gamma' \cos.\delta' + \sin.\gamma' \sin.\delta',$$
$$\text{et } \cos.(\gamma - \delta) = \cos.\gamma \cos.\delta + \sin.\gamma \sin.\delta.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation précédente, elle devient

Equation qui exprime ces conditions.

353. . . . . $\frac{M}{M'} = \frac{\sin.(\epsilon+\epsilon')}{\sin.(\epsilon''+\epsilon''')} \cdot \frac{\cos.\gamma'\cos.\delta' + \sin.\gamma'\sin.\delta'}{\cos.\gamma\cos.\delta + \sin.\gamma\sin.\delta}$.

Réflexions sur cette équation

354. Cette équation exprime que les pressions perpendiculaires à O'I' sont égales de part et d'autre ; mais elle n'énonce pas qu'elles sont directement opposées. Cette derniere condition tient ou à la forme des corps, ou à d'autres circonstances dont nous parlerons quand il en sera temps, mais auxquelles il sera peu nécessaire d'avoir égard quand nous aurons occasion d'appliquer l'équation précédente.

Application de cette équation au cas où les portions de coin sont soumises à la pesanteur.

355. L'axe ZZ' étant supposé vertical, et M, M', égaux aux poids de chaque portion de coin, on aura $\delta = 0$, $\delta' = 0$, $\sin.\delta = 0$, $\sin.\delta' = 0$, $\cos.\delta = 1$, $\cos.\delta' = 1$; et l'équation de l'art. (353) deviendra

$$\frac{M}{M'} = \frac{\sin.(\epsilon+\epsilon')}{\sin.(\epsilon''+\epsilon''')} \cdot \frac{\cos.\gamma'}{\cos.\gamma} = \frac{\sin.(\epsilon+\epsilon')}{\sin.(\epsilon''+\epsilon''')} \cdot \frac{\cos.\epsilon'''}{\cos.\epsilon},$$

puisque ϵ et γ, ainsi que ϵ''' et γ', expriment indifféremment les angles formés par IO et I'O' avec la verticale.

356. Qu'on fasse de plus $\gamma = \gamma'$, et l'équation se réduira à $\frac{M}{M'} = \frac{\sin.(\zeta + \zeta')}{\sin.(\zeta'' + \zeta''')}$. L'angle $\zeta + \zeta'$ est celui formé par les lignes IO et I'O'; nommant a l'angle formé par IO et la verticale ZZ' (*fig.* 103), et ϵ l'angle formé par I'O' et la même verticale, on a $\zeta + \zeta' = a + \epsilon$; ensuite l'angle formé par O"I" et ZZ', étant aussi égal à a, d'après l'hypothese de $\gamma = \gamma'$, ou, ce qui est la même chose, de $\zeta = \zeta'''$, l'angle $\zeta'' + \zeta'''$ formé par les lignes O'I' et O"I" sera $a - \epsilon$, et le rapport des moteurs, ou celui des masses, puisque M et M' sont des poids, deviendra

$$\frac{M}{M'} = \frac{\sin.(a + \epsilon)}{\sin.(a - \epsilon)} = \frac{\text{tang.}\, a + \text{tang.}\, \epsilon}{\text{tang.}\, a - \text{tang.}\, \epsilon},$$

d'après les formules connues de trigonométrie.

On tire de cette derniere équation $\text{tang.}\, \epsilon = \frac{M - M'}{M + M'} \text{tang.}\, a$. Faisons $M + M'$, ou le poids total de IOO"I" $= A$, l'équation deviendra

$$\text{tang.}\, \epsilon = \frac{\frac{1}{2}A - M'}{\frac{1}{2}A} \text{tang.}\, a;$$ d'où l'on tire $\frac{1}{2}A - M' = \frac{1}{2}A \frac{\text{tang.}\, \epsilon}{\text{tang.}\, a}$.

Propriété générale de l'équilibre d'un nombre quelconque de portions de coin soumises à la pesanteur, et s'appuyant les unes contre les autres.

Supposons que l'axe ou plan vertical ZZ' divise IOO"I" en deux parties égales, le profil ABO"I" sera égal $\frac{1}{2}A$, et par conséquent ABO'I' $= \frac{1}{2}A - M'$. Faisons varier ABO'I' d'une quantité O'I'*oi* $= -\Delta M'$, tang.ϵ variera dans le même temps de $+\Delta$ tang.ϵ, et l'équation précédente deviendra

$$\frac{1}{2}A - (M' - \Delta M') = \frac{\frac{1}{2}A}{\text{tang.}\, a} (\text{tang.}\, \epsilon + \Delta \text{tang.}\, \epsilon).$$

Retranchant la premiere de la seconde, on a, pour le rapport des différences finies, $\Delta M' = \frac{1}{2}A \frac{\Delta \text{tang.}\, \epsilon}{\text{tang.}\, a}$.

$\Delta M'$ peut représenter une portion quelconque I'O'*oi* de IOO"I", et est, comme on voit, proportionnel à la différence des tangentes des angles formés par O'I' et *oi*, avec une verticale donnée de position (*); d'où on conclut que si une masse IOO"I", posée sur deux plans IO, I"O", également inclinés à

(*) Nous l'avons supposée diviser la masse en deux parties égales; mais il est évident que, quelque part qu'elle soit, les différences des tangentes seront toujours les mêmes.

On peut, de l'équation $\Delta M' = \frac{1}{2}A \frac{\Delta \text{tang.}\, \epsilon}{\text{tang.}\, a}$, donnée immédiatement, et sans l'équation dont elle est tirée, en conclure qu'il y aura équilibre entre les masses $\Delta M'$; car on verra bien aisément que, leur poids étant représenté par les portions correspondantes de la tangente horizontale de l'angle formé par I"O" et la verticale, les pressions réciproques de deux masses voisines seront représentées chacune par la sécante de l'angle que fait avec la verticale le plan qui les sépare, et seront par conséquent égales.

Digitized by Go

l'horizon, est coupée en plusieurs parties par des plans perpendiculaires au profil IOO″I″, de maniere que les portions interceptées par deux quelconques de ces plans soient proportionnelles à la différence des tangentes des angles que ces plans font avec une verticale donnée de position, toutes ces masses partielles seront en équilibre.

357. Observons que la propriété précédente ne cesseroit pas d'avoir lieu, quoique IO et I″O″ ne fussent pas également inclinés à l'horizon ; car leur inclinaison étant constante par rapport à ε, ΔM n'en seroit pas moins proportionnel à tang. ε, ce qui sert de fondement à la propriété dont on vient de parler.

De l'équilibre des voûtes.

Importance et difficultés de l'art de la construction des voûtes, sa perfection chez les modernes.

358. L'art de la construction des voûtes est une des parties les plus importantes et les plus difficiles de l'architecture hydraulique ; elle impose, dans bien des circonstances, la double tâche de combiner les belles formes et la décoration de l'architecture ordinaire, avec la solidité qu'exigent des monuments dont la durée intéresse la sûreté publique, et dont la beauté doit être une preuve parlante et durable des lumieres d'une nation et de son amour actif pour les arts. Le génie, la science et le goût, doivent donc se prêter des secours mutuels dans les ouvrages de cette espece. En conservant les belles proportions que nous avons reçues des anciens, et pour lesquelles ils semblent avoir épuisé toutes les combinaisons que le goût peut adopter, nous nous sommes montré leurs maîtres dans tout ce qui tient à la science de la construction, et cette supériorité ne brille nulle part autant que dans les grands ponts exécutés depuis le commencement de ce siecle : on y voit un genre de décoration dont l'ordonnance, tantôt majestueuse, tantôt élégante, fait connoître par-là qu'elle est susceptible de tous les caracteres ; on y admire une hardiesse dont les anciens et les modernes ne nous offrent aucun modele ; nos progrès à cet égard ont même été si rapides, que nous semblons avoir enfreint cette loi de continuité qui, dans le monde physique et intellectuel, lie les ténebres à la lumiere par une suite infinie de nuances intermédiaires.

Principe qui doit servir de base à la comparaison entre les anciens et nous, en matiere de construction.

L'histoire des grands ouvrages exécutés par les anciens semble un peu contredire la supériorité que nous nous attribuons ici sur eux : nous ferons quelques réflexions sur cet objet lorsque la partie descriptive et historique de cet ouvrage nous fournira l'occasion

l'occasion d'y revenir, et nous établirons des principes pour rapporter à une échelle commune la beauté et la hardiesse de différents monuments, ainsi que le degré de mérite que comportent leurs constructions. Il faut, en attendant, s'imposer la loi de ne rien conclure du parallele entre les anciens et nous avant d'être sûr qu'on a fait une juste compensation de la quantité des moyens d'exécution et de la maniere de les employer; car, quoique la science et le génie ne puissent se passer ici ni de bras ni d'argent, ce seroit induire en erreur que de mesurer les uns par les autres chez différents peuples et dans différents siecles.

L'art de la construction des ponts formera une section particuliere de cet ouvrage; questions intéressantes qui y seront traitées.

La construction des ponts formera une section particuliere de la partie descriptive de cet ouvrage, à laquelle nous nous efforcerons de donner toute l'étendue et la clarté qu'exige l'importance de la matiere. Nous chercherons, après avoir assigné le terme auquel l'industrie humaine est parvenue dans les choses exécutées, à déterminer, autant qu'il nous sera possible, l'espace qui sépare ce terme des limites que la Nature a assignées au génie. Ces limites existent; elles se trouvent dans les qualités physiques des matériaux qu'on est obligé d'employer: telles sont la dureté de la pierre, sa propriété de résister plus ou moins à l'humidité, au froid, etc.; ainsi l'expérience aidée du calcul, peut, jusqu'à un certain point, nous faire connoître combien ce qui existe est éloigné de ce qui est possible. Nous espérons donner sur cet objet des choses nouvelles et dignes d'être connues, auxquelles la théorie de la statique des voûtes doit nécessairement servir d'introduction.

Voici en deux mots l'idée de la composition d'une voûte, suffisante pour l'intelligence de ce chapitre, qui n'exige pas encore la connoissance de tous les détails qu'on donnera lorsqu'il en sera temps.

Description sommaire des parties dont une voûte en berceau est composée.

359. Soit NTN′ (*fig.* 104) le profil d'un coin pesant appuyé, par une partie de ses côtés NT, N′T, sur les corps immobiles CNRQE, AN′R′Q′D. Supposons qu'on retranche une partie TAOC de ce coin, de maniere que la section AOC ait une courbure réguliere perpendiculaire aux points C et A, aux côtés NT, N′T du coin; coupons ensuite la portion de coin ACNN′ par un nombre quelconque de plans perpendiculaires à la courbe AOC, l'assemblage des solides OS, O′S′, O″S″, etc., formés par de pareilles sections, composera ce qu'on appelle une *voûte en berceau,* ou *arche* quand il s'agit d'un pont de pierre, dont les masses CNRQE, AN′R′Q′D, seront les pied-droits.

Digitized by Google

Ces pieds-droits prennent le nom de *culée* lorsqu'ils forment la maçonnerie qui contre-bute les arches extrêmes d'un pont; et celui de *piles*, quand ils composent le soutien intermédiaire de deux arches voisines.

Les solides OS, O'S', O"S", etc., se nomment *voussoirs;* et le voussoir supérieur OS, placé à l'endroit où la tangente est horizontale, se nomme *clef;* les surfaces par lesquelles les voussoirs s'appuient les uns contre les autres sont les *joints de lits;* la surface inférieure AOC de la voûte s'appelle la *douelle*, ou l'*intrados;* et l'intersection de cette surface, avec les *joints de lits*, forme les *joints de douelle;* l'extrémité S, S', S", etc., des voussoirs, opposée à la *douelle* ou *intrados*, s'appelle l'*extrados*. Ceux des voussoirs qui sont apparents aux extrémités de la voûte se nomment *voussoirs de tête;* leur surface apparente est le *plan des têtes,* et l'intersection de ce plan, avec les joints de lit, forme les *joints de tête*. Les points C et A, où la surface de la douelle rencontre les pied-droits, sont les *naissances de la voûte;* les joints de lits CN, AN', se nomment plus particulièrement *joints des naissances;* les voussoirs qui y sont contigus, *voussoirs des naissances;* et les pierres sur lesquelles sont immédiatement posés ces voussoirs, *coussinets*. Les parties comprises entre le sommet et les naissances se nomment les *reins*.

La ligne AC est l'ouverture de la voûte: elle est ordinairement horizontale dans les ponts. La verticale BO, menée au milieu de AC, est la *montée de la voûte:* son extrémité, aboutissant au milieu de la clef, se nomme *sommet de la voûte*.

Il arrive souvent que la tangente aux naissances A et C est verticale, comme dans la *fig.* 105: cette forme n'exige pas de nouvelles dénominations autres que celles de deux joints jr, $j'r'$, dont nous verrons dans la suite la maniere de déterminer la position, qui se nomment *joints de rupture*. La propriété de ces joints est de séparer la partie de la voûte qui est adhérente aux pied-droits, de celle qui ne fait point corps avec eux; en sorte que, si les pied-droits s'écartoient, toute la masse $jrr'j'$ comprise entre ces joints tomberoit. Ils peuvent fort bien représenter les parties NC, N'A (*fig.* 104) des côtés NT, N'T, du coin NTN'.

Divisions de ce chapitre.

360. Toutes ces définitions établies, nos recherches sur l'équilibre des voûtes porteront sur trois objets principaux. Le premier sera la masse et les dimensions des pied-droits nécessaires pour résister à l'action que les voûtes exercent contre eux, qu'on nomme *poussée;* le second est la forme de la voûte elle-même pour que les voussoirs soient en équilibre, en supposant les pied-

Digitized by Google

droits immobiles; et le troisieme, les conditions nécessaires pour que la dureté de la pierre dont les voussoirs sont composés soit en équilibre avec la pression qu'ils éprouvent. Commençons par la forme et les dimensions des pied-droits.

De la poussée des voûtes contre les pied-droits ou culées.

361. La partie de la voûte comprise entre les joints de rupture devant naturellement, dans l'état d'équilibre, être considérée comme une portion de coin qui tend à écarter ces points, si on nomme A la masse représentée par le profil $jrj'r'$ (*fig.* 105); B la masse d'un des pied-droits ou d'une des culées supposées égales et semblables, y compris la portion de la voûte qui y est adhérente ou qui se trouve au-dessous du joint de rupture; δ la distance du point Q à une perpendiculaire menée sur le milieu de jr, par où l'on peut, sans erreur sensible, supposer que passe la résultante des efforts qui se font sur chaque point de cette ligne; δ' la distance de la verticale passant par son centre de gravité au même point Q; a l'angle formé par le joint de rupture et la verticale; f la puissance qui s'oppose au mouvement de translation que la poussée tend à produire dans le sens horizontal; φ la pesanteur; on aura (350), pour exprimer que le pied-droit ne peut pas être renversé en tournant sur le point Q, l'équation

Formule dans l'hypothese que le pied-droit peut être renversé.

$$\frac{\frac{1}{2}A\delta}{\sin.A} = B\delta', \text{ ou } \frac{\frac{1}{2}A}{B} = \frac{\delta'}{\delta}\sin.a \cdots\cdots [1].$$

Le pied-droit, culée ou pile, sera au-dessus de l'équilibre lorsqu'on aura $\frac{\frac{1}{2}A}{B} < \frac{\delta'}{\delta}\sin.a$; ce qui comprend le cas où δ seroit négatif, c'est-à-dire tomberoit du même côté que δ' par rapport à une verticale menée par le point Q.

On aura pareillement, pour exprimer que le pied-droit, culée ou pile, ne peut pas avoir de mouvement de translation, ou être repoussé en glissant sur la base EQ (351), l'équation

Formule dans l'hypoth. que le pied-droit peut être repoussé.

$$fB = \frac{\frac{1}{2}\varphi A\cos.a}{\sin.a}, \text{ ou } \frac{\frac{1}{2}A}{B} = \frac{f}{\varphi}\cdot\frac{\sin.a}{\cos.a} \cdots\cdots [2].$$

362. Nous verrons, quand nous en serons à la pratique de la construction des voûtes, comment il faut se servir de ces équations; nous observerons seulement que l'équation [1] renferme toutes celles qu'on a données jusqu'à présent pour la poussée des voûtes contre les pied-droits, parcequ'on a supposé que ces pied-droits ne pouvoient avoir d'autre mouvement que celui de tourner autour des points Q et Q': cette hypothese a lieu dans bien des cas; mais lorsque la largeur de la base du pied-droit est

La premiere de ces formules renferme toutes celles données jusqu'à présent; néanmoins la seconde hypothese est celle qui a lieu le plus souvent dans les grandes voûtes.

Digitized by Google

grande par rapport à sa hauteur, comme cela a lieu pour les culées des grands ponts, alors l'équation [2] est la seule qui ait lieu ; car, dans ce cas, δ étant négatif, l'effort qui tend à renverser favorise la stabilité au lieu de lui nuire, et la poussée ne peut avoir d'autre effet que de faire glisser la culée sur sa base ou plate-forme, ou bien de faire glisser sur une assise (*) la portion de la culée qui se trouve au-dessus de cette assise. On a des exemples de ce dernier effet, qui est un de ceux contre lesquels il faut prendre le plus de précaution dans la construction des grands ponts.

Passons à l'équilibre des voussoirs, les pied-droits étant supposés immobiles.

De l'équilibre des voussoirs entre eux.

363. Nous supposerons d'abord que les voussoirs OS, O′S′, O″S″, etc., sont soumis à la seule action de la pesanteur, et parfaitement polis, de maniere qu'il n'y ait aucun frottement ni adhésion sur les joints de lit. Cet état approche assez de celui où les grandes voûtes sont à l'instant du décintrement, où les ciments et mortiers étant encore frais, les globules de sable, interposés entre les voussoirs, font l'office de petits rouleaux, dont l'effet est de diminuer beaucoup le frottement qu'occasionneroit l'aspérité des surfaces.

Nommons A le profil de la portion de la voûte comprise entre les joints de rupture, l la longueur comprise entre les plans des têtes, a l'angle que fait chacun des joints de rupture avec la verticale, ϵ l'angle que fait avec la verticale un joint quelconque de la voûte, et m le profil de la portion de voûte comprise entre un joint de rupture et le joint qui fait l'angle ϵ avec la verticale ; on pourra, dans l'état d'équilibre, considérer la voûte comme composée des deux seuls voussoirs m et $A - m$, séparés par un joint qui fait un angle ϵ avec la verticale.

Équations qui renferment les conditions de cet équilibre.

364. Cette premiere considération fournit, d'après ce qui a été dit art. (356), l'équation $l\mathrm{A}\ \mathrm{tang.}\,\epsilon = (l\mathrm{A} - 2lm)\ \mathrm{tang.}\,a$, qui, divisée par l, donne

$$\mathrm{A}\ \mathrm{tang.}\,\epsilon = (\mathrm{A} - 2m)\ \mathrm{tang.}\,a \cdots\cdots [1].$$

Ensuite on a vu, art. cité, que, Δm et $\Delta\ \mathrm{tang.}\,\epsilon$ exprimant les variations finies simultanées de m et de ϵ, c'est-à-dire Δm étant le profil d'un voussoir quelconque, que nous nommerons m', et

(*) On nomme *assises* chacune des rangées horizontales de pierres, liées ensemble par une couche de mortier ou ciment, et mises successivement l'une au-dessus de l'autre. On voit ces assises dans l'élévation des culées (*fig.* 104 et 105).

A tang. ϵ la différence des tangentes des angles formés par la verticale et chacun de ses joints de lits, que nous nommerons ϵ', on avoit l'équation

$$2m' \text{ tang. } a = A\epsilon' \cdots\cdots [2].$$

Les deux équations précédentes renferment seulement la condition de l'égalité de pression entre les voussoirs, ou plutôt entre des portions de coin juxtaposées l'une contre l'autre, sans avoir égard à la courbure de la douelle, c'est-à dire sans exprimer que cette courbure est perpendiculaire aux joints de lits; il faut donc énoncer cette derniere condition, afin que les masses ou portions de coin dont il a déjà été question deviennent des *voussoirs*, et que leur assemblage forme une *voûte*.

Pour cela, il faut énoncer que l'angle ϵ est celui formé par la verticale et une normale à la courbure de la douelle; prenant pour axe des abscisses x, la verticale qui passe par le sommet, et pour axe des ordonnées y, l'horizontale passant par le même point, on aura, par la propriété générale des courbes, $dy : dx :: 1 : \text{tang. } \epsilon = \frac{dx}{dy}$. Introduisant cette valeur de tangente ϵ dans l'équation [1], il vient

$$A\frac{dx}{dy} = (A - 2m) \text{ tang. } a \cdots\cdots [3],$$

qui exprime que les voussoirs sont en équilibre, et que leurs joints de lits sont perpendiculaires à la douelle.

Recherche d'une équation qui donne l'épaisseur de la voûte, ou la longueur du joint de lit à chaque point d'une voûte en équilibre.

Les équations précédentes fournissent les moyens de déterminer tout ce qui est nécessaire à la construction de la voûte, soit qu'on se donne d'avance la courbure de la douelle, soit qu'on se donne la loi que doivent suivre les masses des voussoirs; mais, pour en faciliter l'application, il sera utile d'avoir une équation qui exprime immédiatement un des éléments essentiels de l'*épure* (*), c'est-à dire la longueur des joints de lits.

Pour avoir cette équation, soit $dcbf$ (*fig.* 106), l'élément du profil de la voûte, ou un voussoir infiniment petit; dc et fb deux joints infiniment près, dont les prolongements bT, cT, sont deux rayons de courbure de la douelle. La ligne ST étant une verticale, l'angle fTS sera, comme dans les équations pré-

(*) On nomme *épure*, dans la coupe des pierres, la projection et le développement graphique, tant en masse qu'en détail, de tous les solides qui entrent dans la composition d'une voûte.

Digitized by Google

cédentes, $= \epsilon$, et l'angle $f\mathrm{T}d = d\epsilon$; de plus, si on nomme s l'arc de la douelle compris depuis le sommet jusqu'au point b, le petit arc cb sera ds.

Faisons $fb = z$, si, du rayon Tf, on décrit l'arc de cercle fg, le trapeze $fbcq$ pourra être pris pour le quadrilatere $fbcd$. Menons bh parallele à cg, on aura surface $bhgc = zds$; on a d'un autre côté $1 : \sin.hbf :: hb : hf$, ou, parceque $hbf = g\mathrm{T}f$, $1 : \sin.d\epsilon :: z : hf = zd\epsilon$, l'arc infiniment petit étant égal à son sinus. La surface du triangle hbf est donc $\frac{1}{2}z^2 d\epsilon$; l'ajoutant à celle du parallélogramme $hbcg$, on a $dcbf = zds + \frac{1}{2}z^2 d\epsilon$, premiere expression de la différentielle du profil de la voûte, ou de dm.

L'équation $2m'$ tang.$a = \mathrm{A}\epsilon'$ fournit une seconde expression de cette différentielle; car, en y supposant m' infiniment petit, on a $m' = dm$ et $\epsilon' = d$ tang.ϵ, et par conséquent $dm = \frac{\mathrm{A}\,d\,\text{tang.}\,\epsilon}{2\,\text{tang.}\,a}$. Égalant ces deux valeurs de dm, il vient $zds + \frac{1}{2}z^2 d\epsilon = \frac{\frac{1}{2}\mathrm{A}\,d\,\text{tang.}\,\epsilon}{\text{tang.}\,a}$; d'où on tire $z = -\frac{ds}{d\epsilon} \pm \sqrt{\left(\frac{\mathrm{A}\,d\,\text{tang.}\,\epsilon}{\text{tang.}\,a\,d\epsilon} + \frac{ds^2}{d\epsilon^2}\right)}$.

Observons maintenant que $\frac{ds}{d\epsilon}$ est la valeur du rayon de courbure bT, que nous nommerons r; que d tang.$\epsilon = \frac{d\epsilon}{\cos.^2\epsilon}$, et l'équation précédente se changera en

$$z = -r \pm \sqrt{\left(\frac{\mathrm{A}}{\text{tang.}\,a\cos.^2\epsilon} + r^2\right)} \cdots\cdots [4],$$

où l'on peut éliminer ϵ au moyen de la valeur connue $\cos.\epsilon = \frac{dy}{ds}$.

Les équations précédentes renferment tout ce qui est nécessaire pour l'*épure*, l'*appareil* et le *toisé* d'une voûte dont les voussoirs sont en équilibre.

365. Cette derniere équation, jointe aux trois précédentes [1], [2] et [3], ne laisse rien à desirer de tout ce qui est nécessaire pour l'*épure*, l'*appareil* et le *toisé* d'une voûte composée de voussoirs pesants en équilibre, indépendamment du frottement. On peut par leur moyen, 1°. étant donnée la loi suivant laquelle varie le profil de la voûte, c'est-à-dire l'expression variable de m ou de m', trouver la courbe de l'*intrados*, la longueur et l'inclinaison des joints de lits; 2°. la courbe de l'*intrados* étant donnée, trouver le profil de chaque voussoir, l'inclinaison et la longueur de ses joints de lits; 3°. la loi de longueur des joints de lits étant donnée, déterminer le profil des voussoirs et la courbe de l'*intrados*.

Différentes applications de ces équations.

366. Supposons que tous les joints de lits sont égaux, ou que la voûte est *extradossée*, et nommons h leur longueur constante, on aura, d'après l'équation [4], $h = -r \pm \sqrt{\left(\frac{\mathrm{A}}{\text{tang.}\,a\cos.^2\epsilon} + r^2\right)}$,

Digitized

qui, en substituant pour cos.$^2 s$ sa valeur $\frac{dy^2}{ds^2}$, donnera le rapport des co-ordonnées de la douelle. Mais pour avoir un résultat plus simple, observons que, dans le cas dont il s'agit, le profil $\frac{1}{2}A - m$ d'une portion de la voûte, comprise depuis le sommet jusqu'à un joint quelconque répondant à l'ordonnée y, sera égal au produit de h par l'arc d'une courbe qui passeroit par le milieu de tous les éléments de ce profil, et que nous nommerons s; ainsi on aura $\frac{1}{2}A - m = hs$, ou $A - 2m = 2hs$. Substituant cette valeur dans l'équation [3], elle devient $A\frac{dx}{dy} = 2hs$ tang. a; d'où $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{1}{2}A}{hs \text{ tang. } a}$.

Lorsque la longueur h sera petite relativement aux dimensions de la voûte, l'arc s pourra sensiblement être considéré comme égal à l'arc de la douelle, et alors cette équation sera celle de la chaînette ordinaire ou de la courbe que forme une corde infiniment grosse suspendue par ses extrémités; car nous avons vu (278) que cette courbe avoit pour équation $\frac{dy}{dx} = \frac{B}{\sqrt{(xx + 2Bx)}}$, et ensuite (279) que la valeur de l'arc S, mesuré depuis le sommet ou origine, étoit $\sqrt{(xx + 2Bx)}$; cette valeur substituée donne $\frac{dy}{dx} = \frac{B}{S}$ qui est de la même forme que l'équation trouvée ci-dessus.

On a fait voir de plus, à l'article ci-dessus cité, que l'équation finie de la courbe étoit $y = \pm B \log. \frac{B + x + \sqrt{(xx + 2Bx}}{B}$, qui, en faisant $B = \frac{\frac{1}{2}A}{h \text{ tang. } a}$, donne la courbure de la douelle dans le cas dont il s'agit ici. Si, sans se donner A, h ni a, la voûte étoit simplement assujettie à passer par trois points donnés, ou à avoir une certaine ouverture e, et une certaine montée h, on auroit en même temps $x = h$, et $y = \frac{1}{2}e$; ce qui, substitué dans l'équation ci-dessus, donne $\frac{1}{2}e = \pm B \log. \frac{B + h + \sqrt{(hh + Bh)}}{B}$; d'où l'on tirera la valeur de B.

367. Soit (*fig.* 108) une portion de voûte Mgfm, terminée par deux joints Mg, mf, également distants du sommet, l'*extrados* gf étant horizontal, si l'on suppose que les portions égales du profil, comprises depuis les joints Mg, mf, jusqu'aux naissances, sont égales à la portion variable m du profil qui entre dans les équations de l'art. (364), la surface Mgfm sera égale à $A - 2m$. Nous allons chercher une autre expression de cette surface.

Digitized by Google

Nommons h la longueur Ae de la clef, ou la distance du sommet aux naissances; AP, x; PM, y; menons les verticales mk, Mh; on aura $mk = Ae + AP = h + x$; $kf = \text{tang.}\,a \times mk = \frac{dx}{dy}(h+x)$, et par conséquent la somme des triangles mkf, Mhg, égale à $mk \times kf = \frac{dx}{dy}(h+x)^2$. La surface M$hkm$ sera, d'après la méthode générale de l'art. (223), égale à $(hm + 4Ae + km)\frac{1}{3}he = [2(h+x)+4h]\frac{1}{3}y = \frac{2}{3}(3h+x)y$; additionnant les surfaces partielles, on a $A - 2m = \frac{dx}{dy}(h+x)^2 + \frac{2}{3}(3h+x)y$, valeur qui, substituée dans l'équation [3] de l'art. (364), donne $A\frac{dx}{dy} = \text{tang.}\,a\left[\frac{dx}{dy}(h+x)^2 + \frac{2}{3}(3h+x)y\right]$, ou $ydy = \frac{\frac{1}{2}A}{\text{tang.}\,a}\cdot\frac{dx}{3h+x} - \frac{\frac{1}{2}(h+x)^2dx}{3h+x} = \frac{3}{2}\left(\frac{A}{\text{tang.}\,a} - 4h^2\right)\frac{dx}{3h+x} - \frac{3}{2}xdx + \frac{3}{2}hdx$. Intégrant cette équation, on a

$$y^2 = \left(\frac{3A}{\text{tang.}\,a} - 12h^2\right)\log.(3h+x) - \frac{3}{4}x^2 + 3hx + B.$$

Pour déterminer la constante B, il faut remarquer que x et y s'évanouissent en même temps; ce qui donne

$$B = -\left(\frac{3A}{\text{tang.}\,a} - 12h^2\right)\log.(3h).$$

Cette valeur substituée change l'équation en

$$y^2 = \left(\frac{3A}{\text{tang.}\,a} - 12h^2\right)\log.\left(\frac{3h+x}{3h}\right) - \frac{3}{4}x^2 + 3hx.$$

Lorsque la longueur de la clef est donnée, et que, de plus, la voûte doit avoir une certaine ouverture $2e$, et une certaine montée f, la valeur du profil A est donnée par-là; car on aura en même temps $x = f$, $y = e$, d'où résulte une équation qui ne contient que f, e, a, h et A.

Si A étoit donné, ce seroit alors la valeur de h qu'il faudroit tirer de cette équation, ou enfin celle de a, si A et h étoient déterminés d'avance.

Remarquons en passant que nous avons obtenu l'équation précédente très aisément, en exprimant l'aire du profil par le moyen de la formule de l'art. (223); ce qui n'auroit pas été, à beaucoup près, aussi facile en employant des méthodes directes et rigoureuses, et que les résultats numériques des unes et des autres ne donneroient pas des différences assez grandes pour qu'on y ait égard dans la pratique.

368.

Digitized by Google

368. L'équation $dm = \frac{\frac{1}{2}A d\,\text{tang.}\,\epsilon}{\text{tang.}\,\alpha}$ peut se changer en $dm = \frac{\frac{1}{2}A d\epsilon}{\text{tang.}\,\alpha\,\cos.^2\epsilon}$, ou en $dm = \frac{\frac{1}{2}A\,ds}{r\,\text{tang.}\,\alpha\,\cos.^2\epsilon}$ à cause de $r = \frac{ds}{d\epsilon}$.

Examen de la loi que suivent les épaisseurs des voûtes en équilibre, et qui sont assujetties à une courbure donnée.

Cette équation $dm = \frac{\frac{1}{2}A\,ds}{r\,\text{tang.}\,\alpha\,\cos.^2\epsilon}$, dans laquelle on peut supposer ds constant, fait voir que, dans toutes les voûtes où le rayon de courbure est constant, et celles où il diminue depuis le sommet jusqu'aux naissances, l'élément dm va en augmentant, et par conséquent le profil de la voûte va en s'élargissant dans le même sens. Tel est le cas des voûtes en portion de cercle ou en portion d'ellipse surbaissée. Dans les voûtes en arc de cercle, l'élément du profil est à la clef $\frac{\frac{1}{2}A\,ds}{r\,\text{tang}\,\alpha}$, parcequ'à ce point $\epsilon = 0$, et $\cos.\epsilon = 1$. Au milieu des reins, ou à 45° du sommet, $\cos.\epsilon = \frac{1}{2}$, et $dm = \frac{A\,ds}{r\,\text{tang.}\,\alpha}$; l'élément du profil est donc, au milieu des reins, double de ce qu'il étoit à la clef; il va ensuite en augmentant très rapidement.

Lorsque le rayon de courbure augmente depuis le sommet jusqu'aux naissances, si cette augmentation suit une plus grande raison que la diminution de $\cos.^2\epsilon$, les reins de la voûte vont en diminuant d'épaisseur dans le même sens; dans le cas contraire, elles vont en augmentant, et c'est celui des voûtes elliptiques surmontées qui, ainsi que les surbaissées, augmentent d'épaisseur depuis le sommet jusqu'aux naissances (*).

Des effets du frottement, et de l'adhésion relativement à l'équilibre des voûtes.

369. Ainsi dans toutes les voûtes en équilibre, abstraction faite du frottement et de l'adhésion des voussoirs, si le joint des naissances est horizontal, sa longueur doit être infinie; c'est ce que donne directement l'équation [4], art.(364), où, en faisant $\epsilon = 90°$, et $\cos.\epsilon = 0$, on a $z = \sqrt{\frac{A}{0}} = \infty$. Examinons quel changement peut apporter à ce résultat la considération du frottement.

370. L'effet du frottement est d'empêcher les voussoirs de glisser sur leurs joints, et par conséquent de s'opposer à leur mouvement parallèlement à ces joints. On peut donc le consi-

(*) Pour s'en rendre raison directement, on peut, dans l'équation $dm = \frac{\frac{1}{2}A\,ds}{r\,\text{tang.}\,\alpha\,\cos.^2\epsilon}$, substituer pour $\cos.\epsilon$ sa valeur $\frac{dy}{ds}$, et elle deviendra $dm = \frac{\frac{1}{2}A\,ds^3}{r\,\text{tang}\,\alpha\,dy^2}$. Soit l le demi-axe horizontal, et k le demi-axe vertical d'une ellipse surmontée ou surbaissée: on aura, dans l'un et l'autre cas, par la propriété de la courbe, $\frac{ds^2}{R\,dy^2} = \frac{l^2k}{(l^2-y^2)\sqrt{(l^4-l^2y^2+k^2y^2)}}$. Ainsi dm sera réciproquement proportionnel à $(l^2-y^2)\sqrt{(l^4-l^2y^2+k^2y^2)}$, et par conséquent infini aux naissances où on a $y = l$.

Digitized by Google

dérer comme une puissance qui agit parallèlement aux joints de lits, et qui se compose avec la pesanteur. Il résulte de cette composition une puissance moyenne qui fait un angle avec la verticale, et cet angle est toujours plus petit que 90°. D'après cela, la formule $\frac{M}{M'} = \frac{\sin.(C+C')}{\sin.(C''+C''')} \cdot \frac{\cos.(\gamma'-\delta')}{\cos.(\gamma-\delta)}$ (353), qui, d'après ce qu'on a vu (356), renferme les équations [1], [2], [3] de l'article (364), en considérant, comme nous l'avons fait précédemment, la voûte comme composée de deux voussoirs, devient $\frac{M}{M'} = \frac{\sin.(a+\epsilon)}{\sin.(a-\epsilon)} \cdot \frac{\cos.(a-\delta')}{\cos.(a-\delta)}$, et peut exprimer les conditions de l'équilibre, eu égard au frottement, M étant l'action d'une des parties de voûte composée de son poids, modifié par le frottement; M' l'action pareillement modifiée de l'autre partie de voûte, δ et δ' les angles formés par la verticale et par les résultantes du frottement et de la pesanteur, toujours plus petits que 90°.

On voit, par la forme de cette équation, que M et M' doivent toujours être des quantités finies. Il faut faire attention, 1°. que la plus grande valeur que puisse avoir a est 90°; 2°. que l'angle $a - \epsilon$ et la quantité M' s'évanouissant en même temps, lorsque $\epsilon = a$, on a $\delta = \delta'$ et $M = \frac{\circ}{\circ} \sin.2a$, qui, comme on sait, est une quantité susceptible d'évaluation.

Les voûtes en équilibre, dans l'hypothese du frottement, ne doivent pas avoir autant d'épaisseur aux reins que si les voussoirs n'avoient pas de frottement. Effets qui ont lieu lors du décintrement des grands ponts; cas où il est utile d'employer les équations d'équilibre données ci-devant.

371. L'équilibre, dans l'hypothese de l'adhésion et du frottement, n'exige donc pas que les reins des voûtes soient aussi chargés que lorsqu'on les suppose parfaitement polis et non adhérents, sur-tout depuis le joint, distant du sommet de 45°, jusqu'aux naissances. Ce seroit s'exposer à des hypotheses très incertaines que de faire entrer ces éléments dans le calcul; d'ailleurs nous avons déja observé (363) que, lors du décintrement des ponts, le frottement et l'adhésion sont beaucoup moindres qu'ils ne le deviennent ensuite après que les mortiers et les ciments ont pris de la consistance; indépendamment de cela, les voûtes ou le rapport de la montée à l'ouverture est très petit, et en général celles dont l'ouverture est grande, éprouvent, sans que les voussoirs glissent les uns sur les autres, une altération dans la courbure de la douelle. Nous verrons, quand nous en serons à rapporter les expériences sur cet objet, que, communément au décintrement, avant que les reins soient chargés, les parties qui avoisinent le sommet s'abaissent, et les reins s'élevent; on peut comparer ce mouvement aux oscillations que fait une corde, suspendue par ses extrémités, pour

Digitized by Google

acquérir la courbure nécessaire à l'équilibre : quand ensuite la maçonnerie des reins est achevée, et qu'ils se trouvent par-là plus chargés qu'ils n'étoient à l'instant du décintrement, alors ils s'abaissent, les parties voisines du sommet se relevent, et tout le système se rapproche de la forme prescrite par l'épure lorsque cette forme ne differe pas beaucoup de celle qu'exige l'équilibre (*). C'est pour vérifier à-peu-près cette différence qu'il seroit utile d'employer les formules que nous avons données art.(364), et qui peuvent avoir une application avantageuse dans les voûtes elliptiques très surbaissées, et dans celles en arc de cercle qui n'excedent pas 90°.

Combien il est important que la pierre dont les voussoirs sont composés ait la dureté nécessaire.

372. Lorsqu'une voûte est construite de maniere que toutes ses parties se contre-balancent assez exactement pour que la courbure ne soit point altérée, il est encore une condition bien essentielle à sa solidité ; celle que la pierre ait une dureté suffisante pour résister à la pression qu'elle éprouve. Le frottement et l'adhésion sont encore ici en faveur de la solidité ; car, empêchant la voûte de glisser sur les joints de rupture, et en général les voussoirs de glisser sur les joints de lits, ils détruisent une partie de l'effet de la pesanteur qui tend à comprimer les voussoirs l'un contre l'autre.

Il est donc avantageux pour la solidité, lorsqu'on calcule la compression des voussoirs, de faire abstraction du frottement et de l'adhésion ; d'un autre côté, dans les formes de voûtes en usage, les parties qui avoisinent le sommet étant les plus comprimées, nous ne considérerons ici que la pression de la clef ou d'un joint supposé au sommet (**), produite par l'action des deux parties latérales appuyées, sans frottement ni adhésion, sur les joints de rupture.

Évaluation de la pression de la clef d'une voûte.

373. Nommant toujours A le profil de la voûte, a l'angle du joint de rupture et de la verticale, la pression exercée par l'action de la demi-voûte contre le joint vertical du sommet sera, en faisant attention qu'à ce point $s = 0$, et en faisant abstraction du frottement, $\frac{\frac{1}{2}A}{\text{tang.}a}$.

Soit P la pression que la pierre peut éprouver, ou la hauteur d'un prisme de même matiere et d'un pied quarré de base que peut supporter un pied quarré de surface de cette pierre sans s'écraser ; et soit h la longueur de coupe de la clef, ou celle de

(*) On verra dans la suite les précautions que ces sortes de mouvements exigent pour conserver le parallélisme entre le lit d'un voussoir et le lit contigu du voussoir voisin.

(**) Il est d'usage de ne jamais mettre de joint au sommet ; mais cette pratique est pour la décoration et n'intéresse point la solidité.

Digitized by Google

son joint de lits; il faudra, pour que les dimensions de la clef la mettent en équilibre avec la pression qu'elle éprouve, qu'on ait $Ph = \frac{\frac{1}{2}A}{\text{tang.}a}$; ce qui donne $h = \frac{\frac{1}{2}A}{P\,\text{tang.}a}$, le pied étant pris pour l'unité de mesure.

Réponse à une difficulté qu'on peut faire contre cette évaluation.

374. Quelques personnes seroient peut-être tentées de croire que la pression de la clef ne doit pas s'évaluer par l'action d'une seule des portions de voûte latérales, mais par l'action réunie des deux parties ensemble, puisqu'elles pressent chacune de leur côté, et qu'ainsi la pression de la valeur de la clef est $\frac{A}{\text{tang.}a}$ au lieu de $\frac{\frac{1}{2}A}{\text{tang.}A}$.

Pour résoudre cette difficulté, il faut faire attention que le poids absolu que peut supporter la pierre sans être écrasée s'évalue, par expérience, en posant un bloc de cette pierre sur un plan horizontal, et le chargeant verticalement jusqu'à ce qu'il soit prêt à se rompre (*). Mais cette charge verticale, d'où on tire la valeur de P, n'est représentative que de la pression d'une des portions latérales de la voûte séparées par la clef; car supposons le corps *abcd* (*fig.* 107, n° 1) posé sur le plan AB, et chargé d'un poids P, ses faces *ab*, *cd*, ne seront pas plus comprimées que si, étant posées verticalement, on appliquoit à chacune une pression horizontale égale à P (n° 2); et c'est la résistance du plan AB qui, dans le premier cas, tient lieu d'une des pressions P dans le second cas.

375. L'équation $Ph = \frac{\frac{1}{2}A}{\text{tang.}a}$, et les équations de l'art. (364), supposent que l'angle *a* du joint de rupture et de la verticale, et le profil A de la voûte entre les joints de rupture, sont connus. Cette hypothese, qui simplifie beaucoup ces équations, aura lieu dans presque tous les cas où on les emploiera; car les dimensions particulieres d'une voûte étant ordinairement déterminées par des circonstances locales, *a* et A se trouvent donnés par-là, et les équations dont on vient de parler ne doivent être regardées que comme des moyens de vérification propres à faire connoître à quel degré la voûte jouit des propriétés qui constituent sa plus grande solidité.

Recherche d'une formule pour déterminer les plus grandes ouvertures des arches, et les plus petites longueurs de coupe des clefs relativement à la dureté de la pierre qu'on emploie.

Mais il peut arriver qu'on veuille faire entrer dans ces équations certaines dimensions particulieres de la voûte, desquelles la valeur de A se tirera par induction; on en a vu un exemple

(*) Nous donnerons le détail des expériences faites sur la dureté des pierres, et la description de la machine dont on s'est servi pour les faire.

Digitized by Google

art. (367) dans l'application de l'équation [3] de l'art. (364); nous allons, par un procédé analogue, donner une méthode pour déterminer les plus grandes ouvertures des arches et les plus petites longueurs de coupe des clefs relativement à la dureté de la pierre qu'on emploie.

376. Soit AOC (*fig.* 109) une voûte à courbure quelconque; mG et nF les joints de rupture, l'*extrados* GF étant horizontal. Nommons AC, $2e$; BO, f; OS, h; op, x'; pm, y', l'angle de Gm avec la verticale étant toujours égal à a, et le profil GmnF égal à A.

On trouve, par le raisonnement de l'art. (367) appliqué à la *fig.* (108), que $A = \frac{dx'}{dy'}(h + x')^3 + \frac{2}{3}(3h + x')y'$; substituant cette valeur dans l'équation $Ph = \frac{\frac{1}{2}A}{\text{tang. } a}$, on a

$$Ph = \tfrac{1}{2}\left[(h + x')^3 + \tfrac{2}{3}(3h + x')y'\right],$$

Maniere de faire usage de cette formule.

équation qui donne $h = P - x' \pm \sqrt{\left[(x' + y' - P)^2 - x'x' - \frac{2}{3}x'y'\right]}$, et qui résout la double question proposée dans l'article précédent, de trouver la plus petite coupe de la clef ou la plus grande ouverture possible de l'arche.

Pour l'employer à cet objet, on éliminera x' et y' au moyen de l'équation de la courbe AOC et de la valeur de $\frac{dx'}{dy'}$, ou de tang. a, tirée de cette équation. Cette élimination introduira dans la valeur de Ph l'ouverture $2e$ de la voûte, sa montée f, et la quantité $\frac{dx'}{dy'}$, ou la tangente de l'angle a, qui fait le joint de rupture avec la verticale. On pourra donc, le surbaissement ou le rapport de la montée à l'ouverture étant connu, assigner la plus grande ouverture que comporte une longueur donnée de coupe de la clef, ou la plus petite longueur de coupe que comporte une ouverture donnée; le tout pour mettre la pression qu'éprouve la pierre en équilibre avec la dureté déterminée par l'expérience.

Réflexion sur cette formule, et sur la hardiesse de dimensions qui en résultent; usages à en faire lorsqu'on aura rapporté les expériences faites sur la dureté des pierres.

Nous avons supposé l'*extrados* horizontal; c'est l'hypothese qui donne le plus de masse à la voûte, et par conséquent, toutes choses égales d'ailleurs, le plus de pression à la clef. On peut la conserver sans craindre de donner trop d'avantage à la résistance; car, lorsque nous aurons rendu compte des expériences sur la dureté des pierres, et que nous ferons quelques applications des formules précédentes, on verra avec étonnement combien les résultats du calcul donnent des dimensions plus hardies que celles qu'on emploie dans la pratique. Nous discuterons les

Digitized by Google

causes physiques et les obstacles de construction qui doivent engager à modifier les résultats du calcul; cette discussion, combinée avec ces résultats, nous donnera quelques lumieres tant sur le degré de hardiesse des monuments existants, que sur les limites de la hardiesse possible en construction, ou sur les bornes que la nature a assignées à l'art. C'est un des principaux objets que nous nous sommes proposés au commencement de ce chapitre, et l'on voit que nous avons déja une partie des matériaux nécessaires pour remplir nos engagements.

Complément de la théorie de l'équilibre des voûtes en berceau ; recherche de l'équation la plus générale qui en exprime les conditions.

377. Pour compléter ce que nous avons à dire sur la théorie de l'équilibre des voûtes en berceau, et en même temps faire voir la liaison de différentes questions de mécanique, et l'accord de leur résultat, nous allons comparer l'équation la plus générale que nous ayons donnée, pour exprimer cet équilibre, avec celle qui renferme les conditions de l'équilibre d'une corde inextensible sollicitée à chacun de ses points par des moteurs agissant dans le même plan.

L'équation générale de l'équilibre des voûtes est (370) $\frac{M}{M'} = \frac{\sin.(\zeta+\zeta')}{\sin.(\zeta''+\zeta''')} \cdot \frac{\cos.(\gamma'-\delta')}{\cos.(\gamma-\delta)}$, et elle a lieu, soit pour la voûte en entier, soit pour une portion quelconque de cette voûte, et par conséquent pour deux voussoirs contigus infiniment petits. En développant trigonométriquement $\cos.(\gamma'-\delta')$, et $\cos.(\gamma-\delta)$, cette équation se change en $\frac{M}{M'} = \frac{\sin.(\zeta+\zeta')}{\sin.(\zeta''+\zeta''')} \cdot \frac{\cos.\gamma'\cos.\delta'+\sin.\gamma'\sin.\delta'}{\cos.\gamma\cos.\delta+\sin.\gamma\sin.\delta}$, (353). Ensuite, pour énoncer qu'elle appartient à deux voussoirs contigus infiniment petits d'une voûte réguliere, il faut dire que l'angle $\zeta+\zeta'$, qui est celui de deux joints de lits infiniment près, puisque c'est la somme des angles que font ces joints de lits avec la direction du moteur qui anime le voussoir élémentaire, est aussi celui des deux normales correspondantes de la douelle, et qu'il en est de même de l'angle $\zeta''+\zeta'''$. Ainsi $\sin.(\zeta+\zeta') = \frac{ds}{r}$, et $\sin.(\zeta''+\zeta''') = \frac{ds}{r'}$, l'élément de courbe ds étant supposé constant. γ et γ' étant les angles que fait chacun des joints de lits opposés au joint moyen qui sépare les deux voussoirs élémentaires, avec un axe de position constante, que nous prendrons pour axe des abscisses, en nommant y, y''; x, x'', les ordonnées et les abscisses répondantes aux extrémités de ces joints extrêmes, et y', x', celles qui répondent à l'extrémité du joint moyen qui sépare les deux voussoirs élémentaires, on aura $\sin.\gamma = \frac{dx}{ds}$, $\cos.\gamma = \frac{dy}{ds}$, $\sin.\gamma' = \frac{dx''}{ds}$, $\cos.\gamma' = \frac{dy''}{ds}$, et l'équation

précédente se changera en $\frac{M}{M'} = \frac{r'}{r} \cdot \frac{dy'' \cos.\delta' + dx'' \sin.\delta'}{dy \cos.\delta + dx \sin.\delta}$. Faisant attention qu'on a $M' = M + dM$, $y'' = y' + dy' = y + 2dy + ddy$; d'où $dy'' = dy + 2ddy + d^3y$; et par conséquent $dx'' = dx + 2ddx + d^3x$, $r' = r + dr$, $\cos.\delta' = \cos.\delta + d\cos.\delta$, $\sin.\delta' = \sin.\delta + d\sin.\delta$. Substituant toutes ces valeurs, négligeant les différentielles du troisieme ordre, on a, toutes réductions faites,

$$[1] \cdots \cdot M \sin.\delta (2rddx + dxdr) + M\cos.\delta (2rddy + drdy) + rdxd(M\sin.\delta) + rdyd(M\cos.\delta) = 0.$$

D'un autre côté nous avons vu que l'équation de la courbe funiculaire est, en substituant à ϵ son synonyme δ,

$$d\left(\frac{(dx\sin.\delta + dy\cos.\delta)Mr}{ds^2}\right) + \frac{(dy\sin.\delta - dx\cos.\delta)M}{ds} = 0.$$

Cette équation est la même que celle de la courbe funiculaire plane.

Faisons ds constant, et effectuons la différentiation indiquée pour le premier terme, il viendra

$$M\sin.\delta(rddx + dxdr) + M\cos.\delta(rddy + dydr) + rdxd(M\sin.\delta) + rdyd(M\cos.\delta) + Mdyds\sin.\delta - Mdxds\cos.\delta = 0.$$

Pour ramener cette équation à l'équation [1], il faut observer qu'on a, par la théorie générale des courbes, $r = \frac{dyds}{ddx}$ et $r = \frac{-dxds}{ddy}$ (*); d'où $rddx = dyds$ et $rddy = -dxds$; substituant ces valeurs dans les deux derniers termes de l'équation précédente, et réduisant, elle devient

$$M\sin.\delta(2rddx + dxdr) + M\cos.\delta(2rddy + dydr) + rdxd(M\sin.\delta) + rdyd(M\cos.\delta) = 0.$$

qui est précisément la même que l'équation [1].

378. On voit donc que les conditions de l'équilibre entre les voussoirs qui composent une voûte, sollicités par des moteurs quelconques, sont les mêmes que celles de l'équilibre d'un fil attaché par ses extrémités et sollicité à chaque point par des moteurs agissant dans le même plan, ou, ce qui est la même chose, celles de l'équilibre d'une suite de globules infiniment petits, substitués à chacun des points du fil, et sollicités en sens directement opposés par les mêmes moteurs. Mais il suit de cette identité, que l'équation qui renferme les conditions de l'équi-

Conditions qui manquent dans cette équation; il seroit impossible et inutile de les y faire entrer.

(*) La premiere équation $r = \frac{dyds}{ddx}$ est la valeur très connue du rayon de courbure; la seconde, $r = -\frac{dxds}{ddy}$, se déduit de la premiere, en faisant attention que lorsque ds est constant, on a $d\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = 0$, ou $d(dx^2 + dy^2) = 0$; d'où $dxddx = -dyddy$.

Digitized by Google

libre dans les voûtes suppose que la masse de chaque voussoir est concentrée en un seul point, et nous avons vu en effet, art. (354), que cette équation exprimoit que l'action d'un voussoir perpendiculaire et son joint de lits étoit égale à l'action du voussoir voisin perpendiculaire au même joint de lits, mais n'exprimoit pas que ces deux actions fussent directement opposées. Les réflexions que nous avons eu occasion de faire, article (335), sur l'impossibilité d'évaluer la pression absolue de chacun des points de deux surfaces appliquées avec effort l'une contre l'autre, et par conséquent le point par où passe la résultante des pressions de tous les points, font voir qu'on ne doit pas s'attendre à assujettir le problême à cette derniere condition. Cet assujettissement seroit d'ailleurs fort inutile dans l'application de la théorie à la pratique, les considérations physiques qu'on est obligé de négliger rendant cet excès d'exactitude plus que superflu.

Ouvrage de M. l'abbé Bossut sur l'équilibre des voûtes.

M. l'abbé Bossut a lu en 1770, à l'académie des sciences, un mémoire sur l'équilibre des voûtes; il y prend pour base de tous les problêmes qu'on peut proposer sur l'équilibre des voûtes en berceau l'équation [1] de l'article précédent, dont il fait différentes applications contenues dans la premiere section du mémoire; la seconde section traite de l'équilibre des voûtes en dôme, et cet ouvrage est le meilleur que nous connoissions sur la statique des voûtes en général.

Différentes questions d'équilibre renvoyées aux sections suivantes et à la partie descriptive de cet ouvrage.

379. Toute la théorie que nous avons exposée dans ce chapitre est applicable aux voûtes construites en pierre, en brique ou autres matieres semblables. Ce seroit le lieu de parler de la stabilité des ponts en bois, en fer, et des cintres en charpente; mais cette discussion n'exigeant que des connoissances très élémentaires, tenant d'ailleurs à beaucoup de connoissances expérimentales et pratiques, nous la réservons pour la partie descriptive.

Nous aurions aussi voulu terminer cette section par le problême de la poussée des terres contre les murs qui les soutiennent, mais la solution de ce problême tient à des considérations physiques sur plusieurs desquelles la théorie des fluides doit jeter quelques lumieres. En outre, cette question ayant de l'analogie avec celle qu'on peut proposer sur la solidité des digues, jetées, et autres constructions exposées à l'action de l'eau, nous en retarderons la discussion jusqu'à ce que nous ayons établi les principes nécessaires pour la traiter avec une étendue suffisante.

SECTION II.

SECTION II.

DE LA DYNAMIQUE.

Introduction à cette Section.

La solution des problèmes sur le mouvement tient à celle des questions d'équilibre.

380. La partie de la mécanique qui fait l'objet de cette section offre un champ plus vaste et plus varié que la précédente, et les questions qu'elle renferme présentent généralement plus de difficultés. Nous nous bornerons à celles dont la connoissance est indispensable, et dont l'application pourra être utile dans la suite de ce traité. La méthode que nous avons adoptée en rendra la discussion aisée ; car elle réduira la solution des différentes questions de mouvement à celle de questions analogues d'équilibre ; au moyen de quoi ceux qui auront lu la statique avec un peu d'attention parcourront avec facilité la théorie suivante.

La dynamique est une science moderne ; ouvrages à consulter sur son histoire.

La dynamique est une science entièrement due aux modernes, et Galilée est le premier qui s'en soit occupé. On peut voir l'exposition et le développement de ses découvertes dans l'ouvrage intitulé, *Dialoghi delle scienze nuove,* etc., imprimé pour la premiere fois à Leyde, en 1637. La section premiere de la seconde partie de la mécanique de M. de la Grange renferme l'histoire de la science du mouvement, depuis Galilée jusqu'à nos jours, présentée avec toute l'élégance, la clarté et la profondeur qu'on doit attendre d'un aussi grand géometre ; on ne sauroit trop recommander la lecture de ce morceau intéressant.

Divisions de la dynamique.

381. Nous ne répéterons pas tout ce que nous avons dit dans les notions préliminaires sur ce qui a rapport soit au mouvement considéré en lui-même, soit à la communication du mouvement produite par l'action mutuelle de deux corps ; mais, pour mettre de l'uniformité dans le développement des idées, nous considérerons d'abord le mouvement isolé d'un point ou d'un corps livré à l'action combinée de moteurs de nature quelconque, ensuite le mouvement résultant de l'action

Digitized by Google

mutuelle de plusieurs corps les uns sur les autres ; ce qui comprendra le mouvement considéré dans les machines.

Nous allons faire précéder ces recherches de l'exposition d'un principe général du mouvement des corps, et de la détermination de celui du centre de gravité de plusieurs corps, liés ou non entre eux, et mis en action d'une maniere quelconque.

Principe général du mouvement.

Principe général du mouvem. des corps.

382. Le principe suivant est dû à M. d'Alembert, et sert de fondement à sa dynamique. Voici en quoi il consiste.

De quelque maniere que plusieurs corps viennent à changer leur mouvement actuel, si l'on conçoit que le mouvement que chaque corps auroit dans l'instant suivant, s'il devenoit libre, soit décomposé en deux autres, dont l'un soit celui qu'il aura réellement après le changement, le second doit être tel que, si chacun des corps n'eût eu d'autres mouvements que ce second, tous les corps fussent demeurés en équilibre.

Ce principe est clair, simple et facile à concevoir.

Ce principe joint au mérite d'être clair et simple celui de n'avoir besoin d'aucun effort d'esprit pour en sentir la vérité. On voit en effet évidemment que l'équilibre doit résulter des seconds mouvements supposés les seuls imprimés, c'est-à-dire qu'ils doivent se détruire mutuellement ; car si ces seconds mouvements n'étoient pas détruits, ils se composeroient avec les premiers, qui, par hypothese, doivent exister seuls, et déterminer le mouvement réel du système après le changement.

Applications de ce principe au choc des corps durs.

383. Nous avons appliqué (141) le principe des vîtesses virtuelles à la détermination des conditions de l'équilibre entre deux corps qui se choquent ; le principe précédent nous donnera, avec la même facilité, leur vîtesse commune, après le choc, lorsqu'il n'y a pas équilibre.

Soit M le corps choquant supposé prépondérant, V sa vîtesse, sa direction étant censée celle des vîtesses positives ; m le corps choqué, $\pm u$ sa vîtesse ; le tout pris dans les mêmes hypotheses de l'art. (39), et v la vîtesse commune après le choc. La vîtesse V peut se décomposer en une vîtesse $+ v$, qui aura lieu après le choc, et une vîtesse $V - v$, dirigée dans le même sens. Ensuite la vîtesse $\pm u$ peut se décomposer en une vîtesse $+ v$, qui aura lieu après le choc, et une vîtesse $\mp u + v$, dirigée en sens contraire. Les vîtesses $V - v$ et $\mp u + v$ sont donc telles que, si elles avoient été seules imprimées en sens mutuellement opposés, il y auroit eu équilibre, c'est-à-dire que les quan-

tités de mouvement des deux corps auroient été égales; ainsi on a l'équation $M(V - v) = m(\mp u + v)$; d'où l'on tire $v = \frac{MV \pm mu}{M+m}$, ainsi qu'on l'a vu (art. 39).

384. On a vu que les cas d'équilibre les plus compliqués se réduisent à celui de deux quantités de mouvement égales agissant en sens mutuellement opposés ; ensuite, conformément à ce que nous avons annoncé art. (380), et au moyen du principe général (382), les questions de mouvement peuvent se réduire à des questions d'équilibre. Cette réduction se fait, d'après l'énoncé de ce principe général, par une décomposition, c'est-à-dire en employant le *parallélogramme des forces*, et suppose que les corps n'ont par eux-mêmes, ou par leur propre énergie, aucune tendance à changer d'état, ne peuvent le faire que par l'action d'une cause étrangere, ou, pour s'exprimer en un mot, jouissent de la propriété que nous avons nommée *inertie* (32). L'*inertie*, l'*équilibre* et le *parallélogramme des forces*, sont donc les fondements de la solution de toutes les questions de la statique et de la dynamique, ainsi que nous l'avons dit dans les notions préliminaires de ce traité, art. (100). Nous rappellons ces propositions générales, parce-qu'on en sent mieux la vérité après avoir analysé un certain nombre de questions particulieres.

On trouve dans ce principe et celui des vitesses virtuelles la confirmation de ce qui a été dit au commencement de cet ouvrage sur les principes fondamentaux de la mécanique.

Du mouvement des centres de gravité.

385. Nous avons vu, art. (160 et 161), que, lorsque tous les points de la masse d'un corps libre étoient animés par des moteurs paralleles, en équilibre autour d'un point, et ne pouvant produire, par leur action simultanée, qu'un mouvement de translation, le point autour duquel existoit l'équilibre de rotation étoit le centre de gravité, et (163) le même par où passoit la direction de la résultante de tous ces moteurs. Cette propriété fournit immédiatement les conséquences suivantes.

1°. *Si tous les points d'un corps libre sont animés par des moteurs paralleles, et que la résultante des quantités de mouvement imprimées passe par le centre de gravité de ce corps, il n'y aura point de rotation, tous les points de ce corps se mouvront avec la même vîtesse, et la même propriété aura lieu évidemment, si on applique un moteur quelconque au centre de gravité d'un corps libre.*

2°. *Si des moteurs en nombre, quantité et direction quelconques, sont appliqués au centre de gravité d'un corps, ce corps*

Conséquences tirées des propriétés du centre de gravité pour le mouvement de ce centre ; sa direction et sa vîtesse quand il se trouve sur la direction de la résultante des quantités de mouvement imprimées.

Digitized by Google

n'aura que le mouvement de translation, et la ligne que décrira le centre de gravité sera dans la direction de la résultante de tous ces moteurs. La même propriété aura lieu si, les moteurs agissant à des points quelconques du corps, la résultante des quantités de mouvement imprimées passe par son centre de gravité.

3°. Soient u, u', u'', etc., les vîtesses que les moteurs tendent à donner, parallèlement à leur résultante, aux particules m, m', m'', etc., sur lesquelles ils agissent, et v la vîtesse commune qui aura lieu après leur action; les vîtesses u, u', u'', etc., imprimées, pourront être censées composées de la vîtesse commune v qui aura lieu, et des vîtesses $u - v$, $u' - v$, $u'' - v$, etc., qui seront détruites. Ces dernieres sont donc telles que, si elles avoient été seules imprimées, il y auroit eu équilibre (382); par conséquent, comme elles sont parallèles, la somme de leurs produits, par les masses qu'elles animent, doit être égale à zéro. Ainsi on a $(u - v)\, m + (u' - v)\, m' + (u'' - v)\, m'' + \text{etc.} = 0$; d'où on tire $v = \frac{um + u'm' + u''m'' + \text{etc.}}{m + m' + m'' + \text{etc.}}$. Ainsi *la vîtesse du centre de gravité, ou d'un point quelconque du corps, est égale à la somme des quantités de mouvement imprimées, divisée par la somme des particules, ou par la masse totale du corps.*

Recherches sur la direction et la vîtesse du centre de gravité de plusieurs corps qui se meuvent parallèlement.

386. Supposons que les particules m, m', m'', etc., ne sont point liées ensemble, et sont abandonnées librement à l'action des moteurs; il est clair qu'après l'action de ces moteurs elles auront pleinement les vîtesses u, u', u'', etc., qu'ils comportent. Cherchons quelle vîtesse en résultera pour le centre de gravité.

Soient x, x', x'', etc., les distances, pour un instant quelconque, de m, m', m'', etc., à un plan donné de position, et perpendiculaire aux directions que suivent ces molécules. La distance X de leur centre de gravité à ce plan sera, pour cet instant, $X = \frac{mx + m'x' + m''x'' + \text{etc.}}{m + m' + m'' + \text{etc.}}$; et sa vîtesse, au même instant, sera $\frac{dX}{dt} = \frac{m\frac{dx}{dt} + m'\frac{dx'}{dt} + m''\frac{dx''}{dt}}{m + m' + m'' + \text{etc.}}$, etc. (24). Mais $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dx'}{dt}$, $\frac{dx''}{dt}$, etc., sont (24) les vîtesses des particules m, m', m'', etc., on a donc $\frac{dx}{dt} = u$, $\frac{dx'}{dt} = u'$, etc. Substituant ces valeurs, et nommant v la vîtesse du centre de gravité, on a $v = \frac{um + u'm' + u''m'' + \text{etc.}}{m + m' + m'' + \text{etc.}}$, qui est la même expression obtenue ci-dessus, en supposant que

Digitized by Google

les particules étoient liées ensemble et formoient un même corps.

Il est évident qu'au lieu des particules m, m', m'', etc., on peut supposer des corps de grandeur finie, dont les centres de gravité aient les vîtesses u, u', u'', etc. De plus, la ligne que décrira le centre de gravité sera parallele à celles que décriront les centres de gravité des corps m, m', m'', etc.; car soit y, y', y'', etc., les distances de ces lignes à un plan parallele à leurs directions, et Y la distance de la ligne décrite par le centre de gravité commun au même plan, on a (162) $Y = \frac{my + m'y' + m''y'' + \text{etc.}}{m + m' + m'' + \text{etc.}}$; par où l'on voit que tant que les lignes décrites par les corps seront paralleles au plan en question, c'est-à-dire tant que y, y', y'', etc., conserveront la même valeur, Y sera aussi constant, et qu'ainsi le chemin décrit par le centre de gravité sera parallele au même plan. Enfin la vîtesse v du centre de gravité sera de même nature que la somme u, u', u'', etc., des vîtesses des corps m, m', m'', etc., c'est-à-dire que si cette somme est constante, ce qui peut avoir lieu de différentes manieres, v sera aussi constant, et le mouvement du centre de gravité uniforme; si cette somme varie uniformément, l'élément du temps étant aussi supposé constant, le mouvement du centre de gravité sera uniformément accéléré; ainsi du reste. Concluons de tout ce qui est démontré dans cet article, que,

Résultat de ces recherches.

387. *Si des corps, en nombre quelconque, se meuvent parallèlement à une ligne donnée de position, la vîtesse du centre de gravité sera égale à la somme des quantités de mouvement, divisée par la somme des masses; elle sera par conséquent uniforme ou variable, suivant que la somme des quantités de mouvement sera elle-même uniforme ou variable; et la direction que suivra le centre de gravité sera parallele à la ligne donnée de position.*

Recherche de la vîtesse du centre de gravité d'un corps, ou système de corps liés entre eux, livrés à l'action de moteurs paralleles, la résultante des quantités de mouvement imprimées passant hors du centre de gravité.

388. Si la somme des quantités de mouvement est zéro, le centre de gravité demeurera en repos; on voit qu'il faut pour cela que la somme positive des quantités de mouvement des corps qui vont dans un sens soit égale à la somme négative des quantités de mouvement des corps qui vont dans l'autre.

Nous avons vu que, dans un système de corps liés, lorsque la résultante des quantités de mouvement imprimées passe par le centre de gravité, la vîtesse de ce centre est la même que lorsque les corps ne sont pas liés entre eux, la résultante passant par un point quelconque du système. La propriété qu'a le centre de gravité de rester en repos quand la somme des

Digitized by Google

quantités de mouvement imprimées est zéro, jointe au principe général du mouvement, va nous servir à démontrer que lorsque les corps sont liés entre eux, quoique la résultante des quantités de mouvement imprimées ne passe pas par le centre de gravité commun, néanmoins le mouvement de ce centre sera le même que si les corps étoient libres, et par conséquent que si la résultante passoit par le centre de gravité.

En effet les corps, de libres qu'ils étoient, devenant liés entre eux, n'obéiront pas pleinement à l'impulsion des moteurs qui les animent; le mouvement imprimé à chaque corps ou molécule pourra donc se décomposer en deux autres, dont l'un sera celui qui aura lieu, et l'autre, occasionné par la liaison des corps, sera tel que, s'il avoit été imprimé seul, il y auroit eu équilibre (382), ou que la somme des quantités de mouvement qui en résulteront sera égale à zéro. Ainsi, d'après ce que nous venons de voir, cette somme de quantités de mouvement, produites par la liaison mutuelle des corps, n'influera point sur le mouvement du centre de gravité; l'état de ce centre de gravité sera donc indépendant de la liaison mutuelle des corps, et il se mouvra comme s'ils étoient tous libres et abandonnés pleinement à l'action des moteurs qui les animent. Ainsi,

Résultat de ces recherches.

389. *Lorsqu'un corps ou un systéme de corps liés entre eux sont soumis à l'action d'un nombre quelconque de moteurs parralleles, soit que la résultante des quantités de mouvement imprimées passe ou non par le centre de gravité, la vîtesse de ce centre est toujours égale à la somme de ces quantités de mouvement, divisée par la somme des masses, ainsi que cela a lieu pour les corps libres.*

Cas où les moteurs ont des directions quelconques, et vîtesses du centre de gravité parallèlement à trois axes co-ordonnés.

390. Ce que nous venons de dire, dans le cas où les moteurs sont paralleles, peut s'appliquer au cas où ils ont des directions quelconques, en décomposant chacune des quantités de mouvement imprimées en trois autres paralleles à trois lignes données de position. Ces trois composantes étant entièrement indépendantes l'une de l'autre, la vîtesse du centre de gravité qui résultera de chacune, parallèlement à une quelconque des lignes données de position, s'évaluera d'après la regle énoncée art. (389).

Soit M un quelconque des moteurs, m la molécule ou le corps qu'il anime, σ l'angle que fait la direction de ce moteur avec un plan donné de position, Ψ l'angle que fait sa projection sur ce plan avec une ligne donnée dans le même plan; la somme des quantités de mouvement imprimées parallèlement à cette

Digitized by Google

premiere ligne, sera (260) $f(Mm \cos.\sigma \cos.\Psi)$; la somme des quantités de mouvement imprimées parallèlement à une seconde ligne placée dans le même plan, perpendiculairement à la premiere, sera $f(Mm \cos.\sigma \sin.\Psi)$, et la somme des quantités de mouvement imprimées parallèlement à une troisieme ligne perpendiculaire aux deux premieres, sera $f(Mm \sin.\sigma)$. Ainsi les vîtesses du centre de gravité, parallèlement aux trois axes perpendiculaires entre eux, seront $\frac{f(Mm \cos.\sigma \cos.\Psi)}{fm}$, $\frac{f(Mm \cos.\sigma \sin.\Psi)}{fm}$, et $\frac{f(Mm \sin.\sigma)}{fm}$.

Direction et vîtesse du centre de gravité dans l'espace, les moteurs ayant des directions quelconques.

391. Chacune de ces trois vîtesses a lieu comme si la résultante des quantités de mouvement qui la produit passoit par le centre de gravité; la vîtesse unique qui résulte de leur combinaison est donc la même que si toutes les quantités de mouvement imprimées étoient immédiatement appliquées au centre de gravité, suivant leur direction; or nous avons des formules, art. (260), desquelles on pourra déduire la résultante unique de ces quantités de mouvement ainsi imprimées. Nommons a, b, c, les numérateurs de chacune des fractions qui terminent l'art. (390); nommons R la résultante de toutes les quantités de mouvement imprimées, supposées appliquées au centre de gravité; σ' l'angle qu'elle fait avec le plan auquel se rapportent les angles σ; Ψ' l'angle que fait cette projection avec la ligne à laquelle se rapportent les angles Ψ; on aura $R = \sqrt{(a^2+b^2+c^2)}$ tang. $\sigma' = \frac{c}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$, et tang. $\Psi' = \frac{b}{a}$; la vîtesse du centre de gravité, dans le sens R, sera $\frac{R}{fm} = \frac{\sqrt{(a^2+b^2+c^2)}}{fm}$, les angles σ' et Ψ', dont on vient d'assigner les tangentes, servant à déterminer la direction de la ligne qu'il parcourt dans l'espace.

Dans le cas où les moteurs agissent parallèlement à un plan donné, les vîtesses paralleles à deux lignes perpendiculaires entre elles, prises dans ce plan, sont, en nommant ϵ l'angle formé par la direction d'un moteur quelconque et une de ces lignes, $\frac{f(Mm \cos.\epsilon)}{fm}$, et $\frac{f(Mm \sin.\epsilon)}{fm}$. Faisant le numérateur de la premiere fraction égal à a, celui de la seconde égal à b; nommant R la résultante de toutes les quantités de mouvement imprimées, ϵ' l'angle que fait sa direction avec la ligne à laquelle se rapportent les angles ϵ, on aura (263) $R = \sqrt{(a^2+b^2)}$, et tang. $\epsilon' = \frac{b}{a}$; et la vîtesse du centre de gravité, dans le sens de R, sera $\frac{R}{fm} = \frac{\sqrt{(a^2+b^2)}}{fm}$, sa direction faisant, avec l'axe

Digitized by Google

auquel se rapportent les angles ϵ, un angle dont la tangente est égale à $\frac{b}{a}$.

Indépendance réciproque des mouvem. de translation et de rotation.

392. Puisque nous savons que lorsque la résultante des quantités de mouvement imprimées passe par le centre de gravité d'un corps, ce corps, abandonné à l'action des moteurs, n'a aucun mouvement de rotation, il faut en conclure que le mouvement de rotation n'a lieu que lorsque la résultante des quantités de mouvement imprimées passe hors du centre de gravité. Ensuite, comme le mouvement de ce centre est le même, soit que la résultante y passe ou n'y passe pas, c'est donc autour du point où il est placé que se fait la rotation, quand il y en a, puisque ce point est le seul qui ne participe pas à cette rotation. Il suit de là que le mouvement de translation est absolument indépendant du mouvement de rotation, puisqu'il est indépendant de la cause qui le produit, savoir, la direction de la résultante par un autre point que le centre de gravité; et, de son côté, le mouvement de rotation est indépendant du mouvement de translation; car il ne pourroit pas en être altéré sans l'altérer aussi, puisqu'il n'y a point d'action sans réaction; ce qui détruiroit l'indépendance démontrée du mouvement de translation.

On peut donc imaginer qu'au moment où le double mouvement de translation et de rotation va avoir lieu, le centre de gravité devient immobile, et que néanmoins la rotation a lieu autour de ce centre comme si le corps eût continué de se mouvoir librement dans l'espace; ce qui fournit la conclusion suivante, déduite de tout ce qui précede.

393. *Si un corps est abandonné à l'action de plusieurs moteurs ayant des directions quelconques, de laquelle il résulte un double mouvement de translation et de rotation, le mouvement de translation du centre de gravité aura lieu de la même maniere que si toutes les quantités de mouvement imprimées étoient appliquées immédiatement à ce centre, dans une direction parallele à celle qu'elles ont, et le mouvement de rotation aura lieu autour du centre de gravité de la même maniere que si ce centre étoit fixe, toutes choses restant les mêmes d'ailleurs.*

Lorsqu'il y aura un axe fixe de rotation dans le corps, qui ne passera point par le centre de gravité, quelles que soient les quantités et les directions des moteurs qui agissent sur chaque molécule, on pourra toujours les supposer tels qu'ils impriment chacun

Digitized by Google

chacun à la molécule qu'ils animent une vîtesse proportionnelle à sa distance à l'axe fixe, dans la direction de la perpendiculaire à la ligne menée perpendiculairement de la molécule sur cet axe, dont la résistance détruit tout ce qui pourroit contrarier cette hypothese ; alors le corps pourra être supposé libre, et les propriétés du mouvement se trouveront renfermées dans l'énoncé du théorême précédent. Or, si on imagine un plan passant par l'axe de rotation et le centre de gravité, on voit aisément que le mouvement se fait de la même maniere que si toutes les quantités de mouvement des molécules exerçoient leur action dans ce plan perpendiculairement à sa surface et à la même distance de l'axe qu'elles sont dans le corps. Au moyen de cette seconde transformation, et de ce qui est dit art.(389), on voit que la vîtesse du centre de gravité sera égale à la somme de toutes les quantités de mouvement qui ont lieu, divisée par la masse du corps, et le produit de cette masse, par la vîtesse du centre de gravité, donnera par conséquent la somme des quantités de mouvement qui ont lieu.

Relation entre la somme des quantités de mouvem. qui ont lieu, la vîtesse du centre de gravité, et la masse du corps, lorsqu'il y a rotation autour d'un axe fixe qui ne passe pas par le centre de gravité.

Ces préliminaires posés, nous allons donner les formules générales des mouvements de translation et de rotation.

Formules générales du mouvement d'un point ou d'un corps sollicité par des moteurs quelconques.

394. Nous avons vu en plusieurs endroits de la statique que, si un corps est sollicité au mouvement par un nombre quelconque de moteurs, l'action imprimée par chacun de ces moteurs peut se décomposer en trois autres perpendiculaires à trois lignes données de position, et perpendiculaires entre elles. Nous venons de faire usage de cette propriété, art.(390), pour déterminer la vîtesse et la direction du centre de gravité, et nous allons chercher d'autres expressions de la même vîtesse en fonctions de trois co-ordonnées perpendiculaires entre elles, ayant leur origine dans un point fixe de l'espace, et dont les relations expriment la nature de la courbe décrite par le centre de gravité.

Tout mouvement peut se décomposer en trois autres perpendiculaires entre eux.

395. Soit x la premiere de ces co-ordonnées, y la seconde, et z la troisieme ; rappellons-nous les dénominations de l'art.(287), et nommons σ l'angle que fait un moteur quelconque M avec le plan des (x, y), et Ψ l'angle que fait la projection du même moteur M sur le même plan des (x, y) avec l'axe des x. Cela posé, la vîtesse du centre de gravité, parallèlement à l'axe des x,

Recherches des formules pour le mouvement dans l'espace d'un corps sollicité par des moteurs quelconques.

sera (390) $\frac{f(Mm\cos.\sigma\cos.\Psi)}{fm}$; sa vîtesse, parallèlement à l'axe des y, sera $\frac{f(Mm\cos.\sigma\sin.\Psi)}{fm}$; et sa vîtesse, parallèlement à l'axe des z, sera $\frac{f(Mm\sin\sigma)}{fm}$.

Quelle que soit la nature des moteurs, puisqu'on peut toujours considérer le mouvement uniforme comme un cas particulier du mouvement varié, alors, conformément à ce qui a été dit art.(24 et 25), la quantité variable M sera généralement égale à l'élément de la vîtesse divisée par l'élément du temps; et nommant t le temps, l'élément de la vîtesse sera égal à Mdt. Faisant dt constant, la variation de la vîtesse, pour un instant quelconque, parallèlement à chacun des axes des x, des y, et des z, sera $\frac{dt\,f(Mm\cos.\sigma\cos.\Psi)}{fm}$, $\frac{dt\,f(Mm\cos.\sigma\sin.\Psi)}{fm}$, et $\frac{dt\,f(Mm\sin.\sigma)}{fm}$. Cherchons les expressions des mêmes variations en fonction des différentielles de x, y, et z.

Les éléments des espaces, parcourus parallèlement aux axes des x, des y et des z, sont dx, dy, dz. Ainsi les vîtesses, dans un instant quelconque, parallèlement aux mêmes axes, sont $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$; les différentielles de ces vîtesses seront $\frac{ddx}{dt}$, $\frac{ddy}{dt}$, $\frac{ddz}{dt}$. Égalant chacune de ces différentielles à son équivalente trouvée précédemment, divisant par dt, et multipliant par fm, on a, pour exprimer les relations entre les espaces parcourus et les temps,

Exposition de ces formules.

396. Parallèlement à l'axe des x,

$$\frac{ddx}{dt^2}fm = f(Mm\cos.\sigma\cos.\Psi)\cdots\cdots[1].$$

Parallèlement à l'axe des y,

$$\frac{ddy}{dt^2}fm = f(Mm\cos.\sigma\sin.\Psi)\cdots\cdots[2].$$

Parallèlement à l'axe des z,

$$\frac{ddz}{dt^2}fm = f(Mm\sin.\sigma)\cdots\cdots\cdots[3].$$

Observons que le second terme de chacune de ces équations est précisément le même qu'il faut égaler à zéro lorsqu'on suppose qu'il y a équilibre, ou que la somme des quantités de mouvement Mm, que les moteurs imprimeroient dans le premier instant de leur action, est nulle parallèlement à chacun des axes; observons de plus, que fm est égale à la masse totale du corps, et nous aurons cette regle infiniment simple pour déterminer les loix du mouvement de translation du corps dans tous les cas.

Digitized by Google

397. *Si un corps est soumis à l'action d'un nombre quelconque de puissances données en quantités et en direction; pour trouver la relation entre les espaces parcourus par le centre de gravité de ce corps et les temps, parallèlement à trois axes fixes perpendiculaires entre eux, prenez les expressions qu'il faudroit égaler à zéro dans l'hypothese de l'équilibre, et égalez-les chacune au produit de la masse du corps par la différentielle seconde de la co-ordonnée parallele à l'axe auquel se rapporte cette expression, ce produit étant divisé par le quarré de l'élément du temps.*

Propriétés qui résultent de ces formules.

Il ne faut pas perdre de vue que l'hypothese de l'équilibre dont on vient de parler doit avoir lieu entre les puissances considérées dans un instant quelconque, comme si c'étoit le premier instant de leur action sur le corps, sans avoir égard au mouvement, soit acquis par l'action antérieure des puissances, soit primitivement imprimé. Le mouvement primitif entre ensuite dans la détermination des constantes après les intégrations: ceci s'éclaircira par des exemples.

398. Il peut se faire que le corps, quoique soumis à l'action des mêmes puissances, soit de plus assujetti à se mouvoir sur une courbe donnée; tel est un corps pesant attaché par un fil à un point fixe, ou glissant sur un plan de forme quelconque; la pesanteur tend à le faire descendre en ligne droite, mais la résistance du fil ou du plan l'assujettissent à décrire une courbe, et son mouvement se trouve modifié par cette nouvelle cause d'altération.

Analyse du cas où le corps est assujetti à se mouvoir sur une courbe donnée.

Ce cas, par la maniere dont nous allons le considérer, ne fera point une exception à notre méthode générale pour déterminer le mouvement des corps, et les équations qu'il comporte s'obtiendront par la même marche qu'on a suivie pour celles de l'art. (396).

Pour cela, observons que le corps supposé libre ne devant pas décrire la courbe sur laquelle il est obligé de se mouvoir, par des causes particulieres qui l'y retiennent, doit exercer sur la courbe qu'il décrit une pression dirigée dans un plan perpendiculaire à cette même courbe, et qui la coupe au point où se trouve le corps. Cette pression, ou, ce qui est la même chose, la réaction que le corps éprouve par la résistance de la courbe, dépend à chaque instant de la position de l'élément de la courbe de la vîtesse du corps et de l'action des puissances; mais, quelle que soit la valeur de cette réaction, on peut la considérer comme une nouvelle puissance qui agit sur le corps perpendiculairement à une courbe donnée, et dès-lors le corps pourra être con-

Digitized by Google

sidéré comme libre. On décomposera donc cette réaction en trois paralleles aux trois axes fixes, et il n'y aura qu'à ajouter la valeur de chacune de ces composantes au second terme de celles des équations de l'art.(396) à laquelle elle se rapporte.

Pour ne pas nous jeter dans une complication de géométrie et de calcul inutile aux applications que nous avons à faire, nous supposerons plane la courbe que le corps est obligé de décrire, et que, de plus, les puissances sont dirigées dans des plans paralleles à celui de cette courbe.

Dans cette hypothese, les équations du mouvement se réduisent à $\frac{ddx}{dt^2}\int m = \int(\mathrm{M}m\cos.\Psi)$, et $\frac{ddy}{dt^2}\int m = \int(\mathrm{M}m\sin.\Psi)$; car on voit sur-le-champ que, n'y ayant aucun mouvement parallele à z, la troisieme équation de l'art.(396) est inutile, et que, puisque angle $\sigma = 0$, on a $\cos.\sigma = 1$.

Ensuite nommant N la pression du corps perpendiculaire à la courbe, qui est égale à la réaction qu'il en éprouve, et ds l'élément de la courbe, on trouvera aisément que la décomposition de N, parallèlement à l'axe des x, est $\frac{\mathrm{N}dy}{ds}$, et que sa décomposition, parallèlement à l'axe des y, est $\frac{-\mathrm{N}dx}{ds}$; on donne ici le signe négatif, parceque cette derniere composante agit en sens contraire à celui des moteurs positifs paralleles aux y.

Il faut donc, conformément à ce que nous avons dit plus haut, ajouter $\frac{\mathrm{N}dy}{ds}$ et $\frac{-\mathrm{N}dx}{ds}$ aux seconds membres des équations du mouvement libre, et l'on aura

$$\frac{ddx}{dt^2}\int m = \int(\mathrm{M}m\cos.\Psi) + \frac{\mathrm{N}dy}{ds},$$
$$\text{et } \frac{ddy}{dt^2}\int m = \int(\mathrm{M}m\sin.\Psi) - \frac{\mathrm{N}dx}{ds}.$$

Multiplions la premiere équation par dx, la seconde par dy, et ajoutons-les ensemble, il viendra

$$\frac{dxddx + dyddy}{dt^2}\int m = dx\int(\mathrm{M}m\cos.\Psi) + dy\int(\mathrm{M}m\sin.\Psi),$$

dans laquelle N ne se trouve plus. Remarquons que $dxddx + dyddy = \frac{d(dx^2+dy^2)}{2} = \frac{d(ds^2)}{2}$, et l'équation se changera en $d\cdot\frac{ds^2}{2dt^2}\int m = dx\int(\mathrm{M}m\cos.\Psi) + dy\int(\mathrm{M}m\sin.\Psi)$, en se rappellant que dt est constant.

Formule du mouvem. dans ce cas.

Nommons u la vîtesse, ds étant l'espace parcouru pendant

l'instant dt, on a $u = \frac{ds}{dt}$, et par conséquent $d.\frac{ds^2}{2dt^2} = \frac{1}{2}d.\,u^2 = u\,du$; ainsi l'équation précédente devient

$$u\,du\int m = dx\int(\mathrm{M}m\cos.\Psi) + dy\int \mathrm{M}m\sin.\Psi).$$

Recherche de la pression qu'exerce sur une courbe un corps forcé de se mouvoir le long de cette courbe.

399. On peut trouver l'expression de la pression normale $\mathrm{N}\,dt$ au moyen des équations précédentes qui renferment cette quantité; mais il sera plus satisfaisant de l'évaluer immédiatement. Pour cela, observons que cette pression est le résultat de trois autres, qui sont, 1°. celle qui résulte de la vîtesse du corps, qui, tendant à se mouvoir en ligne droite, abstraction faite des puissances qui le sollicitent, et étant obligé, par son assujettissement, à se mouvoir sur la courbe, de changer de direction à chaque instant, doit nécessairement exercer une action sur l'élément de la courbe qui occasionne ce changement de direction. Pour évaluer cette action, nommons ω l'angle que font deux éléments de courbe consécutifs; la vîtesse u, décomposée perpendiculairement à la courbe, deviendra u sin. ω, qui, en nommant R le rayon de courbure, équivaut à $\frac{u\,ds}{\mathrm{R}}$; car sin. $\omega = \frac{ds}{\mathrm{R}}$: ainsi cette premiere partie de la pression sera $\frac{u\,ds}{\mathrm{R}}\int m$. 2°. Celle qui résulte de l'action des puissances paralleles à l'axe des y, décomposée perpendiculairement à la courbe, et qu'on verra aisément être $\frac{dx}{ds}\,dt\int(\mathrm{M}m$ sin. $\Psi)$. 3°. Enfin celle qui résulte de l'action des puissances parallèlement à l'axe des x, pareillement décomposée perpendiculairement à la courbe, et qui est $-\frac{dy}{ds}\,dt\int(\mathrm{M}m\cos.\Psi)$, avec le signe négatif, vu qu'elle agit en sens contraire de la précédente.

Formule qui donne cette pression.

Ajoutant ensemble ces trois pressions, et les égalant à la pression normale, on a

$$\mathrm{N}\,dt = \frac{u\,ds\int m}{\mathrm{R}} + \frac{dx}{ds}\,dt\int(\mathrm{M}m\sin.\Psi) - \frac{dy}{ds}\,dt\int(\mathrm{M}m\cos.\Psi),$$

ou, divisant par dt, et faisant attention que $\frac{ds}{dt} = u$,

$$\mathrm{N} = \frac{u^2}{\mathrm{R}}\int m + \frac{dx\int(\mathrm{M}m\sin.\Psi) - dy\int(\mathrm{M}m\cos.\Psi)}{ds}.$$

Loi simple que suit cette pression quand il n'y a pas de force accélératrice.

On voit sur-le-champ que lorsque le corps n'est soumis à l'action d'aucune puissance, N que nous nommerons *force centrifuge*, est proportionnelle au quarré de la vîtesse, divisé par le rayon de courbure.

Si, en conservant la même hypothese, le mouvement a lieu

Digitized by Google

Proportionnelle dans le cercle au quarré de la vitesse.

dans le cercle où le rayon de courbure est constant, la force centrifuge sera simplement proportionnelle au quarré de la vîtesse.

Passons au mouvement de rotation.

Recherche d'une formule pour le mouvement de rotation autour d'un axe fixe, les moteurs étant dirigés dans les plans perpendiculaires à cet axe.

400. Soient (*fig.* 110) deux axes AX, AY, et *m* une molécule quelconque d'un corps dont tous les points sont assujettis à tourner autour d'un axe perpendiculaire au plan YAX et passent par le point A supposé fixe. Nous pouvons regarder chaque molécule *m* comme se trouvant dans le plan YAX, et *m* étant sollicitée dans la direction QH par un moteur M agissant dans le même plan.

Prenons sur la direction QH du moteur la ligne infiniment petite *mh* pour représenter l'élément de la vîtesse, ou M*dt;* alors M*mdt* sera ce dont la quantité de mouvement varieroit à chaque instant si la molécule étoit libre de se mouvoir dans la direction QH du moteur. Mais comme le corps dont *m* fait partie est assujetti à tourner autour du point A, la résistance de ce point détruit une partie de la quantité de mouvement élémentaire M*mdt*. Pour avoir égard à cette résistance, menons la ligne A*m;* de cette ligne, comme rayon, décrivons l'arc infiniment petit *mm'*, et traçons le rayon A *m'* qui passe par le point *h;* abaissons la perpendiculaire AH sur la direction du moteur, et achevons le parallélogramme *hmh'm'*. On voit que le petit arc *mm'* représente la vîtesse élémentaire que le moteur M tend à donner à la molécule *m* autour du centre A, et que *mh'*, ou *hm'*, exprime la vîtesse qui seroit perdue par la résistance du même centre, si la molécule tournoit librement autour du point A.

Faisons A*m* = R, AH = *r*. Cela posé, les triangles semblables A*m*H, *mhm'*, donnent A*m* : AH :: *mh* : *mm'*, ou R : *r* :: M*dt* : $mm' = \frac{Mrdt}{R}$. Telle est l'expression de ce dont la vîtesse varieroit si la molécule tournoit seule ou librement autour du point A, et par conséquent $\frac{Mmrd}{R}$ seroit la variation de la quantité de mouvement.

Soit *dk* l'angle que la molécule *m* décriroit autour de A pendant l'instant *dt*, dans l'hypothese précédente, *dk* étant la longueur d'un arc infiniment petit dont le rayon = 1; l'espace décrit autour de A par cette molécule seroit alors égal à R *dk*, et on auroit, art. (24), $\frac{Mrdt^2}{R} = dd(Rdk)$, où $\frac{Mrdt^2}{R} = Rddk$, puisque R, quoique variable d'une molécule à l'autre, est constant pour

Digitized by Google

la même molécule. Mais, à cause de la liaison des différentes parties du corps, les molécules m, m', m'', etc., ne décriront point l'angle dk autour de A, et décriront un autre angle $d\omega$; les espaces qu'elles parcourront seront donc $R\,d\omega$, $R'\,d\omega$, $R''\,d\omega$, etc., et les différentielles de leurs vîtesses $\frac{R\,ddu}{dt}$, $\frac{R'\,ddu}{dt}$, $\frac{R''\,ddu}{dt}$, etc. (24).

On peut donc regarder la différentielle $\frac{M\,r\,dt}{R}$, de la vîtesse imprimée, comme composée de la vîtesse élémentaire $\frac{R\,ddu}{dt}$, qui aura lieu, et de la vîtesse $\frac{M\,r\,dt}{R} - \frac{R\,ddu}{dt}$, imprimée en sens contraire, qui sera détruite. Faisant le même raisonnement sur toutes les molécules, les vîtesses détruites $\frac{M\,r\,dt}{R} - \frac{R\,ddu}{dt}$, $\frac{M'\,r'\,dt}{R'} - \frac{R'\,ddu}{dt}$, etc., doivent être telles, d'après le principe général (382), que, si elles avoient été seules imprimées, le système seroit demeuré en équilibre (*); la somme des produits de ces vîtesses, par les molécules et par les distances R, R', R'', etc., doit donc être égale à zéro; ce qui donne, toute réduction faite, l'équation

401. . . . . $\frac{ddu}{dt^2}(R^2 m + R'^2 m' + R''^2 m'' + \text{etc.}) =$
$M m r + M' m' r' + M'' m'' r'' + \text{etc.}$

Exposition de cette formule.

402. Le second membre de cette équation renferme la somme des termes qu'il faut égaler à zéro lorsqu'on suppose qu'il y a équilibre autour du point A; ainsi nous aurons, pour exprimer la loi du mouvement de rotation autour de ce point, une regle analogue à celle trouvée pour le mouvement de translation; savoir,

Propriétés qui en résultent.

Si un corps assujetti à tourner autour d'un axe est sollicité par plusieurs moteurs dirigés dans des plans perpendiculaires à cet axe, pour trouver la rotation entre les angles décrits par un point quelconque du corps autour de cet axe et le temps, prenez la somme des termes qu'il faudroit égaler à zéro dans l'hypothese de l'équilibre, et égalez-la au rapport de la différence seconde de l'angle décrit au quarré de l'élément du temps, ledit rapport étant multiplié par la somme des produits des molécules par le quarré de leur distance à l'axe de rotation.

(*) Cet équilibre n'est relatif qu'à la variation du mouvement, qui seroit nulle dans ce cas, en ce que les quantités qui tendroient à le faire varier se détruiroient mutuellement; on sent que s'il y a une vîtesse antérieurement acquise, elle doit se conserver. Cette remarque est analogue à celle qui suit la proposition de l'art. (397).

Digitized by Google

L'usage de cette proposition comporte les mêmes remarques faites pour celles de l'art. (397).

Cas où les moteurs ont des directions quelconques.

403. L'axe de rotation étant toujours supposé immobile, si les moteurs ne sont point dirigés dans des plans perpendiculaires à cet axe, il faudra imaginer que chacun d'eux est décomposé en deux autres, l'un parallele à l'axe, et l'autre dirigé dans un plan perpendiculaire à ce même axe. La premiere composante sera nulle par rapport au mouvement de rotation, puisqu'elle ne tend qu'à donner un mouvement de translation parallele à l'axe; et nommant ϵ l'angle formé par la direction du moteur et une parallele à l'axe de rotation, la seconde composante, qui tend à faire tourner, sera, comme on sait, égale au moteur multiplié par *sinus* ϵ, sa distance perpendiculaire à l'axe étant la même que celle de la direction du moteur au même axe; il n'y aura donc, dans ce cas, qu'à substituer à M, M', M'', etc., M sin.ϵ, M' sin.ϵ', M'' sin.ϵ'', etc., dans l'équation de l'art. (401), et on la rendra aussi générale qu'il est possible pour exprimer le mouvement d'un corps autour d'un axe immobile.

Cette substitution donnera

Formule pour ce cas.

404 ..... $\frac{dd\omega}{dt^2}(\mathrm{R}^2 m + \mathrm{R}'^2 m' + \text{etc.}) = \mathrm{M}mr\sin.\epsilon + \mathrm{M}'m'r'\sin.\epsilon + \text{etc.}$

Énonciation plus simple de cette formule.

405. Appellons $\int(\mathrm{R}^2 m)$ la somme des termes qui composent le coëfficient de $\frac{dd\omega}{dt^2}$ dans le premier membre, et $\int(\mathrm{M}mr\sin.\epsilon)$ la somme des termes du second membre, l'équation précédente se changera en $\frac{dd\omega}{dt^2}\int(\mathrm{R}^2 m) = \int(\mathrm{M}mr\sin.\epsilon)$ (*).

Formule pour le mouvement de rotation lorsque la vitesse angulaire a des variations constantes ou proportionnelles à celles du temps.

406. Multiplions les deux termes par dt, et intégrons, en supposant constants les termes affectés du signe $\int$, il viendra, pour premiere intégale, $\frac{d\omega}{dt}\int(\mathrm{R}^2 m = t\int(\mathrm{M}mr\sin.\epsilon) + \mathrm{A}$, et pour seconde intégrale, $\omega\int(\mathrm{R}^2 m) + \frac{1}{2}t^2\int(\mathrm{M}mr\sin.\epsilon + \mathrm{A}t + \mathrm{B}$; d'où l'on tire $\omega = \frac{\frac{1}{2}t^2\int(\mathrm{M}mr\sin.\epsilon) + \mathrm{A}t + \mathrm{B}}{\int(\mathrm{R}^2 m)}$, équation qui donne l'angle décrit autour de l'axe au bout d'un temps quelconque.

(*) Cette formule, ainsi que celles du mouvement de translation, auroient pu s'obtenir par la considération d'une propriété qui auroit beaucoup abrégé le raisonnement, mais sans éclairer autant l'esprit; savoir que, dans tout mouvement de translation, la somme des quantités de mouvement imprimées est égale à la somme des quantités de mouvement qui ont lieu, et que, dans tout mouvement de rotation, la somme des moments des quantités de mouvement imprimées est égale à la somme des moments des quantités de mouvement qui ont lieu. On conçoit en effet que si, aux quantités de mouvement imprimées, on en opposoit d'égales dans

On

On connoîtra les constantes A et B par la double considération 1°. de la valeur qu'a la vîtesse angulaire, ou $\frac{d\omega}{dt}$ au commencement, ou à un instant donné du mouvement; 2°. de la valeur qu'a l'angle ω également à un instant donné du mouvement, ou, pour mieux dire, de la connoissance du point à partir duquel se comptent les angles ω.

Formule pour déterminer la vîtesse angulaire finie imprimée au commencement du mouvement.

Ainsi si, dans le premier instant du mouvement, le corps a éprouvé l'action finie d'un certain nombre de forces, imprimées une fois pour toutes, et a ensuite été abandonné à l'action des puissances dont l'effet est de faire varier le mouvement par degrés infiniment petits, il faut, pour compléter l'intégrale, connoître quelle vîtesse angulaire finie a dû résulter de cette action primitive.

Le procédé pour trouver cette vîtesse est exactement le même que celui employé pour déterminer l'élément de la vîtesse dans un instant subséquent quelconque du mouvement. Ainsi nommant W la vîtesse angulaire primitive, on aura, par le même raisonnement de l'art.(400), $W = \frac{f(Mmr\sin.\epsilon)}{f(R^2m)}$, M, R, r, et sin.ϵ, étant dans cette expression les valeurs constantes relatives aux forces qui agissent dans le premier instant.

Ce que c'est que le moment d'inertie d'un corps.

407. La quantité $f(R^2m)$, ou la somme des produits de chaque molécule par le quarré de sa distance à l'axe de rotation, se nomme le *moment d'inertie* du corps qui est composé de l'assemblage de ces molécules. Nous verrons bientôt le moyen de déterminer par le calcul le moment d'inertie.

Du mouvement de rotation lorsque le corps est libre.

408. Nous avons supposé, dans ce que nous venons de dire sur le mouvement de rotation, que l'axe de rotation étoit fixe; s'il ne l'étoit pas, et que le corps se mût librement dans l'espace, alors, d'après la proposition énoncée art.(393), il faudroit appliquer ce que nous venons de dire d'un axe de rotation fixe à un axe passant par le centre de gravité, que nous avons nommé, art.(155), *axe instantané de rotation*. On a vu, art.(154, avec la note), tout ce qui est nécessaire pour déterminer cet axe et le mouvement de rotation qui a lieu autour de lui, lorsqu'on

Axe instantané de rotation.

une direction contraire, il n'y auroit point de mouvement, et que par conséquent les quantités de mouvement qui doivent avoir lieu seroient détruites. On a par-là immédiatement, et presque sans raisonnement, les équations de l'art.(396) et celle des art.(401 et 405); mais, quelque simple que soit ce principe, nous avons préféré, pour la démonstration, l'emploi de celui exposé art. (382). Le motif de cette préférence est que ce dernier principe présente plus de netteté de lumiere, et est pour ainsi dire dépouillé d'une espece d'obscurité métaphysique que semble présenter l'autre, qui d'ailleurs n'est qu'une conséquence de celui de M. d'Alembert.

Digitized by Google

connoît le mouvement de rotation autour de trois axes donnés. La position de l'axe instantané de rotation est, dans l'acception générale, variable d'un instant à l'autre; mais il y a des cas où elle est constante. Chaque corps a au moins trois axes, placés entre eux à angles droits, nommés *axes principaux*, autour desquels un mouvement de rotation, une fois imprimé, se conserveroit uniformément; et lorsqu'il y en a plus de trois, leur nombre devient infini. Il y a toujours deux de ces axes situés de maniere que le moment d'inertie, par rapport à eux, est un *maximum* et un *minimum*.

Axes principaux d'un corps.

Recherches à faire sur le mouvement de rotation, leur principale utilité.

La recherche des équations qui donnent le mouvement de rotation autour de trois axes quelconques, celle des axes principaux et de leurs propriétés, etc., pourroient fournir matiere à des discussions très intéressantes, si l'abondance de matieres que nous avons à traiter, sans cela, pouvoit nous permettre de nous étendre sur des objets un peu trop étrangers au but de ce traité. Leur application est principalement consacrée à l'astronomie physique; et comme, dans la théorie des machines, qui est l'objet que nous avons en vue, les axes de rotation sont ordinairement censés fixes, nous nous en tiendrons aux principes posés ci-devant: ils forment, par leur généralité, un corps de doctrine assez étendu pour embrasser toutes les questions usuelles, et leur simplicité leur donne le caractere qui convient à des choses de pratique.

Nous allons passer à quelques applications des formules des mouvements de translation et de rotation, qui auront le double objet de faire voir, par des exemples, la maniere de les employer, et de présenter la théorie de quelques questions de physique dont la connoissance est indispensable.

Application de la théorie du mouvement de translation à quelques exemples.

Application des formules du mouvem. de translation au mouvement d'un corps lancé avec une vîtesse constante, et abandonné à l'action d'une puissance constante.

409. Soit (*fig.* 111) un corps *m* lancé du point A dans la direction AS, avec une vîtesse V, que nous nommerons *vîtesse de projection*, abandonné ensuite, dans tous les instants de son mouvement, à l'action d'une puissance dont la direction est censée être toujours parallele à une ligne donnée de position AY, et dont la nature est de faire varier uniformément le mouvement dans le sens de sa direction; et cherchons la nature de la courbe AMCD décrite par le corps.

Menons l'axe AX perpendiculairement à AY et dans le plan

Digitized by Google

des lignes AS, AY, plan dans lequel il est évident que le mouvement aura lieu. Menons PM parallele à AY; nommons AP, x; PM, y; on voit sur-le-champ que, des trois équations de l'article (396), il n'y a que les deux premieres qui puissent avoir ici leur application; car le corps se mouvant dans un seul plan, il n'a aucun mouvement parallèlement à l'axe perpendiculaire à ce plan. Ainsi $\sigma = 0$, $\cos.\sigma = 1$; et puisque la direction du moteur qui produit la variation du mouvement, le seul qu'on doive considérer d'abord (397), est parallele à AY, et par conséquent perpendiculaire à AX, on a $\sin.\Psi = 1$, et $\cos.\Psi = 0$. Les équations [1] et [2] de l'article cité se réduisent d'après ces considérations, et en faisant attention que, d'après l'énoncé, M est constant à $\frac{ddx}{dt^2} = 0$, et $\frac{ddy}{dt^2} = -M$. On fait M négatif, parcequ'on suppose les vîtesses positives dans le sens des y positives; une premiere intégration donnera $\frac{dx}{dt} = A$, et $\frac{dy}{dt} = -Mt + B$; on aura, par une seconde intégration, $x = At$, et $y = -\frac{1}{2}Mt^2 + Bt$.

Pour déterminer les deux constantes A et B, je remarque que l'équation $\frac{dx}{dt} = A$ indique que la vîtesse $\frac{dx}{dt}$, parallele à AX, est constante; elle est donc toujours telle qu'elle a été dès le premier instant du mouvement. Or, dans cet instant, elle étoit $= V \times \cos. SAP$; donc, en faisant *angle* $SAP = a$, on a $\frac{dx}{dt} = V \cos.a$, et $A = V \cos.a$. Ensuite faisons $t = 0$ dans l'équation $\frac{dy}{dt} = -Mt + B$, la vîtesse $\frac{dy}{dt}$, parallele à AY, deviendra celle qui a eu lieu dans le premier instant du mouvement, et qui est $V \sin.a$; on a donc $B = V \sin.a$. Substituant ces valeurs, il vient $x = tV \cos.a$, et $y = tV \sin.a - \frac{1}{2}Mt^2$.

La premiere équation donne $t = \frac{x}{V \cos.a}$. Substituant cette valeur dans la seconde équation, elle devient $y = x\frac{\sin.a}{\cos.a} - \frac{1}{2}M\frac{xx}{V^2\cos.^2a}$, ou, parceque $\frac{\sin.a}{\cos.a} = \text{tang.}a$, $y = x\,\text{tang.}a - \frac{1}{2}M\frac{xx}{V^2\cos.^2a}$.

Équation de la courbe décrite par le corps.

Supposons le corps soumis à l'action de la pesanteur; φ étant la vîtesse qu'elle communique dans l'unité de temps, nommons h la hauteur dûe à la vîtesse de projection, on aura (65) $V^2 = \varphi 2h$; ce qui change l'équation en $y = x\,\text{tang.}a - \frac{xx}{4h\cos.^2a}$.

Cette courbe est une parabole; cas où la gravité agit sur le corps, points où la courbe coupe l'horizon, et angle qu'elle forme avec lui.

Cette équation appartient à la parabole; on voit que c'est la courbe que décriroit, dans le vuide, un corps soumis à la pe-

Digitized by Google

santeur, et lancé dans une direction qui formeroit un angle a avec l'horizon ; elle rencontre l'horizon en deux points qu'on détermine en cherchant les valeurs de x qui répondent à $y = 0$. Cette condition donne l'équation x tang. $a - \frac{xx}{4h \cos.^2 a} = 0$, dont les racines sont $x = 0$, qui se rapporte au point A ; et $x = 4h \cos.^2 a$ tang. $a = 4h \cos.^2 a \frac{\sin. a}{\cos. a} = 4h \cos. a \sin. a = 2h \sin. 2a$, (car on sait que $\sin. 2a = 2 \sin. a \cos. a$) qui se rapporte au point D.

Amplitude du jet ; ce que c'est. Son *maximum*, sa valeur générale ; quelle est la plus grande hauteur à laquelle le mobile puisse s'élever.

La distance AD $= 2h \sin. 2a$ se nomme l'*amplitude du jet* lorsque le corps lancé est une bombe ; elle est la plus grande possible lorsque $2a = 90°$, ou lorsque $a = 45°$.

Ordonnant l'équation $y = x$ tang. $a - \frac{xx}{4h \cos.^2 a}$ par rapport à x, on a

$$xx - 4hx \text{ tang. } a \cos.^2 a - 4hy \cos.^2 a = 0,$$

$$\text{ou } xx - 2hx \sin. 2a - 4hy \cos.^2 a = 0.$$

Si, dans cette équation, on substitue une valeur quelconque pour y, on aura toujours deux valeurs correspondantes pour x, et on sait, par la théorie des équations, que la somme de ces deux valeurs ou racines est égale au coëfficient $2h \sin. 2a$ du second terme : mais on vient de voir que $2h \sin. 2a$ étoit la valeur de l'amplitude AD ; cette amplitude est donc la somme de deux valeurs de x répondantes à une valeur quelconque de y.

Soient deux ordonnées égales PM, pm ; les valeurs de x, correspondantes à l'une ou à l'autre, sont AP et Ap ; d'après ce qu'on vient de dire, AP + Ap = AP ; donc AP = pD ; donc la courbe est symmétrique par rapport à un axe passant par le milieu B de AD, qui, par conséquent, est celui de la parabole. Pour trouver l'ordonnée CB, répondant au point B, il faut, dans l'équation $xx - 2hx \sin. 2a - 4hy \cos.^2 a = 0$, substituer pour x la valeur $\frac{1}{2}$ AD, ou $h \sin. 2a$; on aura, en mettant pour $\sin. 2a$ sa valeur $2 \sin. a \cos. a$, et réduisant, $y = h \sin.^2 a$. C'est l'expression de la plus grande hauteur à laquelle le mobile puisse s'élever.

Expression du parametre de la parabole.

D'après cela, le parametre de la parabole, qui est égal à $\frac{\overline{AB}^2}{CB}$, aura pour expression $\frac{h^2 \sin.^2 2a}{h \sin.^2 a} = \frac{4h \sin.^2 a \cos.^2 a}{\sin.^2 a} = 4h \cos.^2 a$.

Méthode pour déterminer par expérience la vitesse de projection.

L'équation AD $= 2h \sin. 2a$ donne $h = \frac{AD}{2 \sin. 2a}$; on peut donc, par la connoissance de l'amplitude et de l'angle de projection, trouver quelle a été la hauteur due à la vîtesse de projection,

Digitized by Google

et par conséquent déterminer quelle a été cette vîtesse. Il est plus commode de faire l'expérience sous l'angle de 45°, parce-qu'alors $h = \frac{1}{2}$ AD ; on suppose dans tout ceci qu'on n'a pas égard à la résistance de l'air.

Une vîtesse de projection et une amplitude données répondent toujours à deux angles de projection.

La même équation donne sin. $2a = \frac{AD}{2h}$; ainsi, connoissant l'amplitude et la vîtesse de projection, on déterminera l'angle de projection. Observons qu'un sinus peut toujours appartenir à deux arcs, l'un moindre que 90°, et l'autre, supplément du premier ; ainsi il y a, pour la même vîtesse de projection, deux angles qui donnent la même amplitude, et ces angles sont compléments l'un de l'autre, puisque la somme de leurs doubles est égale à 180°.

Un corps pesant, descendant le long d'une courbe, acquiert la même vîtesse que s'il tomboit verticalement de la même hauteur.

410. Supposons qu'un corps pesant glisse sans frottement le long de la courbe AMD (*fig.* 112) ; menons la verticale AB et l'horizontale DB ; nommons AP, x ; l'horizontale PM, y ; l'arc AM, s ; et la pesanteur φ ; l'équation $u\,du\int m = dy\int(\mathrm{M}m\sin.\Psi) + dx\int(\mathrm{M}m\cos.\Psi)$, de l'art. (398), se réduira à $u\,du = \varphi\,dx$, qui, intégrée, donne $u^2 = 2x\varphi$, ou $u = \sqrt{(2x\varphi)}$, en supposant qu'il n'y ait pas de mouvement primitivement imprimé. Cette vîtesse est celle qu'acquerroit un corps tombé de la hauteur x ou AP ; ainsi on voit qu'un corps pesant qui glisse sans frottement le long d'une courbe acquiert la même vîtesse que s'il descendoit librement et verticalement de la même hauteur dont il est descendu en suivant la courbe ; il pourroit donc, avec cette vîtesse acquise, remonter à la même hauteur, soit en suivant la même courbe, soit en suivant une courbe quelconque.

Valeur du temps qu'un corps pesant emploie à descendre le long d'une courbe.

411. Si, dans la même hypothese de la pesanteur, on veut avoir le temps que le corps met à descendre de A en M, il faut, de l'équation $d\frac{ds^2}{2dt^2}\int m = dx\int(\mathrm{M}m\cos.\Psi) + dy\int(\mathrm{M}m\sin.\Psi)$, tirée de l'art. cité, et qui devient $d\frac{ds^2}{2dt^2} = \varphi\,dx$, tirer la valeur de t ; la premiere intégrale donnera $\frac{ds^2}{dt^2} = 2\varphi x + \mathrm{A}$. Si on suppose que la vîtesse $\frac{ds}{dt}$ soit nulle au point de départ, on aura A = 0, et $dt = \frac{ds}{\sqrt{(2\varphi x)}}$; d'où $t = \int\frac{ds}{\sqrt{(2\varphi x)}} = \int\frac{ds}{u}$; car nous avons plus haut que $u = \sqrt{(2\varphi x)}$.

Dans la cycloïde, dont le grand axe est horizontal, le temps employé à descendre au point le plus bas est toujours le même, de quel point que parte le corps.

412. La courbe CAD (*fig.* 113) étant une cycloïde dont AOB est le centre générateur, proposons-nous de trouver le temps qu'un corps grave emploieroit à descendre de N en A.

Nommons AP, x ; PM, y ; AB, $\frac{1}{2}a$, la hauteur donnée AG, b ;

Digitized by Google

la propriété de la cycloïde donne $s^2 = 2ax$; d'où on tire $ds = \frac{adx}{s} = \frac{adx}{\sqrt{(2ax)}}$. Ensuite la vîtesse acquise par le corps, depuis N jusqu'en M, est (410) $\sqrt{[2\varphi(b-x)]}$; donc (411) on a, en faisant attention que s diminue quand t augmente, $dt = \frac{-ds}{\sqrt{[2\varphi(b-x)]}}$; et substituant pour ds sa valeur $\frac{adx}{\sqrt{(2ax)}}$, $dt = \frac{-dx}{\sqrt{(bx-xx)}} \cdot \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{\varphi}}$.

On sait que $\int \frac{-dx}{\sqrt{(bx-xx)}} =$ arc cos. $\frac{2x-b}{b}$; cette intégrale est nulle quand $x = b$, et elle est égale à la demi-circonférence, qui a l'unité pour rayon, ou à 3, 141, etc., quand $x = 0$; on a donc, en la prenant depuis N jusqu'à A, $t = \frac{3,141 \cdot \sqrt{a}}{2\sqrt{\varphi}}$, ou, en désignant par n le nombre de fois que la circonférence contient le rayon, $t = \frac{n}{4}\sqrt{\frac{a}{\varphi}}$; mais la quantité b, ou la hauteur AG, n'entre point dans cette valeur, c'est-à-dire qu'elle seroit la même, dans quelque partie de AB que fût le point G ; donc, de quelque point de la courbe CA que descende le corps, le temps qu'il emploiera pour parvenir en A sera toujours le même (*).

Temps employé par un corps à descendre le long d'un arc de cercle; formule qui en donne la valeur.

413. Soit (*fig.* 114) un arc de cercle, et cherchons le temps qu'un corps M emploieroit à parcourir l'arc NA.

Pour envisager cette question sous le point de vue qui nous intéresse le plus, dans l'application, nous pouvons supposer que le corps ou corpuscule M est attaché à un fil MO fixé au centre O de l'arc NAN', et parcourt cet arc en oscillant autour du point O. Le fil MO et le corpuscule formeront alors ce qu'on appelle *un pendule simple.*

Nommons le rayon AO, a; AG, b; AP, x; PM, y ; la vîtesse u,

(*) Cette propriété de la cycloïde, jointe à celle qu'a cette courbe d'avoir une développée parfaitement égale et semblable à la développante, a servi à M. Huyghens à construire les premieres horloges à pendule qui aient vraisemblablement existé. Cette invention, qui est la plus belle époque de l'art de mesurer le temps, date de l'année 1656. Cependant quelques auteurs prétendent que Vincent, fils de Galilée, avoit appliqué le pendule aux horloges, en 1649, à Venise.

M. Huyghens, frappé de l'imperfection des horloges construites jusqu'à son temps, imperfection produite par le défaut d'un régulateur constant, imagina d'y appliquer le seul régulateur fixe qu'il y ait dans la nature, c'est-à dire les oscillations d'un pendule. Galilée avoit déja découvert que les oscillations faites dans de petits arcs de cercle étoient égales ; mais cette égalité n'étant pas rigoureuse, Huyghens voulut avoir un régulateur mathématiquement parfait. Pour cela, il suspendit entre deux lames cycloïdales un poids attaché à une des extrémités d'un fil dont l'autre extrémité étoit fixée au point de réun on des deux lames. Les oscillations du poids obligeant le fil de s'appliquer alternativement sur la courbure de chaque lame, ce poids décrivoit lui-même des arcs de cycloïde au moyen de la propriété de cette courbe dont

Digitized by Google

acquise depuis N jusqu'en M sera $\sqrt{[2\varphi(b-x)]}$. Substituant cette valeur dans l'équation $t = \int \frac{ds}{u}$, on aura $t = \int \frac{ds}{\sqrt{[2\varphi(b-x)]}}$; d'un autre côté la propriété du cercle donne, pour la valeur de l'élément de la courbe qui doit être pris négativement, parceque l'arc diminue quand le temps augmente, $ds = \frac{-adx}{\sqrt{(2ax-xx)}}$, valeur qui, substituée dans l'équation précédente, se change en $t = \frac{-adx}{\sqrt{[(2ax-xx)2\varphi(b-x)]}} = \frac{-dx}{\sqrt{(bx-xx)}} \cdot \frac{a}{\sqrt{[2\varphi(2a-x)]}} = \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{\varphi}} \cdot \left(1-\frac{x}{2a}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{-dx}{\sqrt{(bx-xx)}} = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{\varphi}} \cdot \frac{-dx}{\sqrt{(bx-xx)}}\left[1+\frac{1}{2}\frac{x}{2a}+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{x^2}{4a^2}+\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{x^3}{8a^3}+\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\cdot\frac{x^4}{16a^4}+\text{etc.}\right]$, en développant $\left(1+\frac{x}{2a}\right)^{-\frac{1}{2}}$, suivant la regle connue du binôme de Newton.

Pour avoir le temps de la descente entiere, il faut intégrer chaque terme de la série, de maniere qu'il s'évanouisse lorsque $x = b$, et il faut ensuite supposer $x = 0$. Or on voit sur-le-champ que le facteur variable de tous les termes de cette série sera de la forme $\frac{-x^m dx}{\sqrt{(bx-xx)}}$, c'est-à-dire que ces facteurs seront $\frac{-dx}{\sqrt{(bx-xx)}}$, $\frac{-xdx}{\sqrt{(bx-xx)}}$, $\frac{-x^2dx}{\sqrt{(bx-xx)}}$, etc. Or, on sait qu'en nommant $n : 1$, le rapport de la circonférence au rayon, les intégrales de chacun de ces termes, prises depuis $x = b$ jusqu'à $x = 0$, sont

$$\tfrac{1}{2}n;\ \tfrac{1}{2}n\cdot\tfrac{b}{2};\ \tfrac{1}{2}n\cdot\tfrac{1.3.b^2}{2.4};\ \tfrac{1}{2}n\cdot\tfrac{1.3.5.b^3}{2.4.6},\ \text{etc.}$$

Substituant ces valeurs dans celle de t, elle devient

$$t = \tfrac{1}{4}n\sqrt{\tfrac{a}{\varphi}}\left[1+\tfrac{1}{2^2}\cdot\tfrac{b}{2a}+\tfrac{1.3^2}{2^2.4^2}\cdot\tfrac{b^2}{4a^2}+\tfrac{1.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2}\cdot\tfrac{b^3}{8a^3}+\text{etc.}\right];$$

nous venons de parler : il étoit donc dans le même cas que si, sans être attaché à un point fixe, il eût glissé le long d'une courbe de cette espece, et par-là toutes ses oscillations se faisoient dans le même temps, quelle que fût leur grandeur. On peut voir le détail des recherches et des expériences, dans son traité *de Horologio oscillatorio*, imprimé dans le recueil de ses œuvres (*Leyde*, 1724). On ne sauroit trop recommander la lecture de cet ouvrage aux amateurs de la belle géométrie.

On peut voir dans les traités d'horlogerie de M. Ferdinand Berthoud, *disc. prélim.*, p. 30, les raisons qui ont déterminé les artistes à abandonner le pendule d'Huyghens, quoique plein de génie et d'invention. Les principales sont les difficultés qu'on avoit à vaincre pour se procurer des pieces de métal qui eussent exactement la courbure cycloïdale, ou qui la conservassent, en supposant qu'on la leur eût une fois donnée. On sait combien le métal est susceptible des impressions de la chaleur et du froid, et combien sa forme peut être altérée par l'action de chacune de ces causes. L'altération qui devoit en résulter dans la courbure des lames cycloïdales influoit donc nécessairement sur celle de leur développante, et détruisoit ainsi l'*isochronisme* ou l'égale durée des oscillations ; d'un autre côté, la régularité du pendule circulaire ayant été reconnue très suffisante dans de petits arcs, on n'a pas hésité à le substituer au pendule cycloïdal, et le succès a justifié ce changement.

c'est l'expression du temps que le corps N emploie à descendre de N en A : mais, avec la vîtesse acquise, il doit décrire dans un temps égal, de l'autre côté de AO, un arc AN' égal à l'arc AN; ainsi le temps employé à parcourir l'arc NAN', ou le temps d'une oscillation entiere, sera

$$\tfrac{1}{2} n \sqrt{\tfrac{a}{g}} \left[1 + \tfrac{1}{2^2} \cdot \tfrac{b}{2a} + \tfrac{1 \cdot 3^2}{2^2 \cdot 4^2} \cdot \tfrac{b^2}{4a^2} + \tfrac{1 \cdot 3^2 \cdot 5^2}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} \cdot \tfrac{b^3}{8a^3} + \text{etc.} \right],$$

où le facteur constant $n = 6,2831853$, etc.

Simplification de cette formule lorsque l'arc est petit.

414. Le rapport $\frac{b}{a}$ ou $\frac{AG}{AO}$ est égal au sinus verse d'un arc de même valeur angulaire que l'arc AN, et ayant l'unité pour rayon; car soit ω cet arc, on a 1 : sinus verse ω :: a : b; d'où sinus verse $\omega = \frac{b}{a}$. Ainsi, lorsque l'angle ω sera petit, la série $1 + \frac{1}{2^2} \cdot \frac{b}{2a} + \frac{1 \cdot 3^2}{2^2 \cdot 4^2} \cdot \frac{b^2}{4a^2}$ + etc., sera extrêmement convergente, et pourra être considérée comme égale au premier terme ou à l'unité; la durée de la descente de M en A, ou d'une demi-oscillation, sera $\frac{1}{2} n \sqrt{\frac{a}{g}}$, et celle d'une oscillation sera $\frac{1}{2} n \sqrt{\frac{a}{g}}$: or, cette expression ne contient plus la fleche b; donc, lorsque les oscillations se font dans de petits arcs, leur durée est la même, quelle que soit la grandeur de l'arc : ces oscillations sont donc alors isochrones (*).

Analogie entre les oscillations dans la cycloïde, dans les petits arcs de cercle, et dans les petits arcs de courbe quelconque.

415. La valeur que nous avons trouvée (412) pour la durée d'une demi-oscillation, dans un arc de cycloïde, est précisément la même que celle qu'on trouveroit pour l'oscillation dans un petit arc de cercle qui auroit pour rayon le double diametre du cercle générateur de la cycloïde. On peut, par le raisonnement, se rendre immédiatement raison de cette propriété lorsqu'on sait que le rayon de la développée du point le plus bas de la cycloïde est égal au double diametre du cercle générateur; car alors un petit arc de la courbe, au point le plus bas, peut être censé un arc de cercle qui auroit ce double diametre pour rayon.

En raisonnant par analogie, on verra que les oscillations,

(*) Pour s'assurer numériquement de l'erreur qu'on peut commettre en supposant l'isochronisme dans les petits arcs, supposons $\omega = 5°$, la durée d'une oscillation d'une seconde, et la longueur a du pendule conforme à ce que donneroit l'équation $1'' = \frac{1}{2} n \sqrt{\frac{a}{g}}$, ou $a = \frac{4g}{n^2}$, qui rigoureusement suppose les arcs infiniment petits; le sinus verse de 5° est $0,0038053 = \frac{b}{a}$, et $\frac{1}{2^2} \cdot \frac{b}{2a} = 0,0004757$. Quant au terme $\frac{1 \cdot 3^2}{2^2 \cdot 4^2} \cdot \frac{b^2}{4a^2}$, il est plus petit que $0,0000001$; on aura donc, pour le temps employé par le pendule dont il s'agit à faire une

dans

dans de très petits arcs de courbe quelconque, sont toujours sensiblement isochrones, puisque tout petit arc de courbe peut être considéré comme un arc de cycloïde ou comme un arc de cercle.

Rapport entre la durée des oscillations et la longueur du pendule.

416. L'équation $t = \frac{1}{2} n \sqrt{\frac{a}{g}}$ fait voir que, dans un même lieu où la gravité est supposée constante, la durée des oscillations est proportionnelle à la racine quarrée de la longueur du pendule : ainsi à Paris, où le pendule qui bat les secondes a 3 pieds 8,57 lignes de longueur, celui dont l'oscillation dure 2 secondes a 12 pieds 2 pouces 10,28 lignes.

Méthode aisée pour trouver par expérience la longueur du pendule à secondes.

417. Soit N le nombre d'oscillations faites pendant un temps T par un pendule dont la longueur est a; la durée d'une oscillation étant égale à t, on aura

$$T : t :: N : 1 ; \text{ d'où } t = \frac{T}{N} = \frac{1}{2} n \sqrt{\frac{a}{g}}.$$

Soit A la longueur du pendule qui fait un nombre N' d'oscillation pendant le même temps T; ce pendule en fera une pendant le temps $\frac{1}{2} n \sqrt{\frac{A}{g}}$, et on aura, par la même raison que ci-devant, $\frac{T}{N'} = \frac{1}{2} n \sqrt{\frac{A}{g}}$. Égalant les deux valeurs de T, il vient $\frac{1}{2} n N' \sqrt{\frac{A}{g}} = \frac{1}{2} n N \sqrt{\frac{a}{g}}$; d'où $A = \frac{N^2 a}{N'^2}$.

Au moyen de cette équation, connoissant la longueur a d'un pendule, et ayant compté exactement le nombre de vibrations N qu'il fait dans un temps déterminé, une heure, par exemple, on déduira de cette expérience la longueur d'un autre pendule qui feroit dans le même temps un nombre quelconque de vibrations.

Supposons que le pendule donné ait trois pieds de longueur, fasse un nombre k de vibrations, en une heure, et qu'on veuille connoître la longueur du pendule à secondes, ou de celui qui feroit 3600 vibrations en une heure; nommant x la longueur cherchée, on aura $x = \frac{3}{(3600)^2} k^2 = k^2 \cdot 0{,}00083334$.

Rapport entre les longueurs et le nombre de vibrations de plusieurs pendules.

L'équation $A = \frac{gN^2}{N'^2}$ fait voir que les longueurs des pen-

oscillation, $1'' + 1'' \times 0{,}0004757$, et la durée de l'oscillation totale de 10° ne différera, abstraction faite du frottement et de la résistance de l'air, de celle de l'oscillation dans un arc infiniment petit, que de $0''$, 0004757 : ainsi, dans le premier cas, le pendule ne retarderoit en 24 heures, ou en 86400", que de $86400 \times 0{,}0004757''$, ou de $41''$, 1 environ, sur le même pendule faisant des oscillations infiniment petites.

Si les arcs décrits de part et d'autre de la verticale n'étoient que de 1°, dont le sinus verse est 0,0001523, on trouvera, de la même maniere, que le retardement diurne ne seroit que de $1''$, 64, et pour $\frac{1}{4}$ degré, il ne seroit que $0''$, 41.

Digitized by Google

dules sont réciproquement comme le quarré du nombre de vibrations qu'ils font dans un temps donné (*).

Méthode aisée pour connoître par le moyen du pendule la force accélératrice de la pesanteur dans un lieu donné.

418. Au moyen de l'équation $t = \frac{1}{2} n \sqrt{\frac{a}{\varphi}}$, connoissant la longueur du pendule à secondes dans un lieu déterminé, on peut évaluer très exactement, pour le même lieu, la quantité φ, qui est, comme on sait, la vîtesse que la pesanteur peut procurer à un mobile pendant la premiere seconde de son action, en prenant la seconde pour unité de temps. On a pour cela l'équation $\varphi = \frac{1}{4} n^2 a$.

La longueur du pendule à secondes, à Paris, est ordinairement évaluée à 3 pieds 8,57 lignes = 440,57 lignes. Substituant cette valeur dans l'équation précédente, on a $\varphi = \frac{1}{4} n^2 \cdot 440,57$ = 30,196 pieds; ce qui est conforme aux valeurs rapportées art. (21) (**).

(*) Cette propriété sert à régler très exactement une pendule à secondes sur le temps moyen. On sait que le temps d'une révolution diurne de la terre est de 86164,098 de secondes. D'après cela, s'étant assuré par expérience du nombre de secondes que la pendule a réellement marqué pendant un nombre déterminé de révolutions diurnes, on saura de combien elle avance ou elle retarde pendant une révolution. Soit $\pm s$ l'avance ou le retard exprimé en secondes, a la longueur du pendule à secondes, dans le lieu où on fait l'observation; $\pm x$ la quantité dont il faut alonger ou raccourcir la lentille; faisant $86164,098 = b$, on aura $a : a \pm x :: (b \pm s)^2 : b^2$; d'où $x = \frac{as(\mp 2b - s)}{(b \pm s)^2}$; négligeant s, qui est très petit, par rapport à $2b$, l'équation devient $x = \frac{\pm 2as}{b}$, valeur très facile à calculer.

Le pendule des pendules astronomiques de M. Le Paute est ordinairement suspendu à une lance d'acier très mince passant entre deux coussinets, et à laquelle est entée une vis dont l'écrou tourne au-dessus des coussinets. Cette vis est au centre d'un cercle gradué, et porte un *index* au moyen duquel, connoissant la hauteur du pas de la vis, on s'en sert comme d'un micrometre très propre à hausser ou baisser le pendule de la petite quantité x, sans en arrêter les vibrations. On place ordinairement un micrometre pareil au-dessous de la lentille; mais son usage exige qu'on arrête le pendule.

Quant à la maniere de mesurer le temps indiqué par la pendule pendant un certain nombre de révolutions diurnes, elle ne présente pas de grandes difficultés. On dirige sur une étoile fixe une lunette portant un réticule, et attachée d'une maniere stable contre un mur ou un autre objet immobile quelconque; on prend l'heure de la pendule lors de la premiere observation, et, un ou plusieurs jours après, la pendule ayant toujours marché, et la lunette n'ayant pas changé de position, on fait une nouvelle observation, au moyen de laquelle on a le nombre de vibrations du pendule correspondant à un nombre déterminé de révolutions diurnes.

Je suis parvenu, par cette méthode, à régler sur le temps moyen une pendule de l'habile artiste dont je viens de parler, avec une assez grande exactitude pour qu'elle ne variât pas de deux minutes dans une année.

(**) M. Bouguer (*Figure de la terre*, page 342) évalue à 440,67 lignes la longueur du pendule à secondes à Paris.

Pour obtenir, au moyen du pendule à secondes, la valeur de φ uniquement due à l'attraction de la terre, ou telle qu'on l'obtiendroit si elle étoit sans mouvement, il faut, dans le résultat de l'expérience, avoir égard à la force centrifuge produite par la rotation diurne de la terre, et qui tend à diminuer l'effet de la pesanteur. Nous avons vu (171, note) que, sous l'équateur, cette force diminuoit la valeur de φ de 15,08 lignes, et que cette diminution décroissoit

Digitized by Google

419. Le temps que le mobile met à descendre par la corde NA (*fig.* 114) est égal au temps qu'il mettroit à descendre par le diametre vertical (70), c'est-à-dire (21) à $\sqrt{\frac{4a}{g}}$, ou à $2\sqrt{\frac{a}{g}}$. D'un autre côté, le temps que le même mobile mettroit à descendre par l'arc N est égal à $\frac{1}{4}n\sqrt{\frac{a}{g}}$, (414), ou à $1,57\sqrt{\frac{a}{g}}$, et cependant le chemin qu'il parcourt est plus long que celui qu'il parcourroit en suivant la corde NA; on voit donc que, quoique la ligne droite soit le plus court chemin du point à un autre, elle n'est pas celui qui y fait parvenir dans le moins de temps un corps animé par la pesanteur, et qu'il faut que le corps suive une courbe.

Un corps grave emploie moins de temps à descendre le long d'un arc de cercle qu'à descendre le long de sa corde, quoique le chemin soit plus long.

Cette courbe n'est même pas le cercle, quoiqu'il exige moins de temps que la ligne droite; ainsi on peut se proposer la

comme les quarrés des cosinus de latitude. La démonstration de cette loi se déduit de ce qu'on a dit art. (399), où l'on a vu que la force centrifuge étoit proportionnelle au quarré de la vîtesse; car les cosinus de latitude sont proportionnels aux ordonnées menées de la surface sur l'axe, ou aux rayons des cercles que tous les graves, placés sur cette surface, décrivent en même temps pendant une rotation diurne.

On voit donc que, deux pendules d'égale longueur étant placés à deux latitudes différentes, il y a une relation entre l'accélération de l'un sur l'autre, la direction et la quantité absolue de l'attraction aux deux points, et les ordonnées, menées de chacun d'eux sur l'axe de rotation. Ainsi, en faisant une hypothese sur la nature de la courbe des méridiens, sur l'égale ou inégale densité de la terre, et ayant des expériences sur l'accélération du pendule en différents points du globe, relativement à l'équateur dont le rayon est connu, on peut trouver des formules au moyen desquelles on déduira de ces expériences le rapport des deux axes. M. le major général William Roy, dans un mémoire lu à la société royale de Londres, le 22 février 1787, et imprimé dans les *Transactions philosophiques*, contenant des observations sur la grandeur et la figure de la terre, donne un rapport moyen, déduit de 75 comparaisons, entre le Spitzberg et l'équateur, qui est celui de 170, 047 à 173, 047. Cet habile observateur dit qu'on peut être très long-temps avant de pouvoir mesurer des degrés du méridien dans les hautes latitudes méridionales, de maniere à pouvoir comparer les figures des hémispheres austral et septentrional, supposés solides de révolution; mais il pense que des observations bien faites avec le pendule, et qu'on peut aisément répéter à toutes les latitudes, donneront le rapport du demi-diametre de l'équateur à chacun des demi-axes austral et septentrional. (*But by good experiments with the pendulum alone, easily repeated in all latitudes, the ratio of the semi-diameter of the equator to the semi-axis on both sides may be readily obtained.*)

Pour finir ce que nous avons à dire sur le pendule simple, nous ajouterons que, parmi les différentes tentatives faites pour établir une mesure invariable, et qu'on pût retrouver dans tous les temps, on a proposé de choisir la longueur du pendule simple dans un lieu déterminé. Malgré les efforts des savants à cet égard, l'usage des anciennes mesures a prévalu: néanmoins l'évaluation assez exacte qu'on a faite du rapport entre la longueur de la toise et celle du pendule simple équivaut à l'admission d'une mesure déduite d'un phénomene constant de la nature. La longueur du pendule simple à la latitude de Paris est, d'après M. Bouguer, de 440, 67 lignes; ainsi, cette longueur étant supposée divisée en 44067 parties, la toise qui a servi au même M. Bouguer à mesurer un degré terrestre sous l'équateur, à faire ses autres expériences, et qui est déposée à l'académie des sciences de Paris, contiendra 86400 de ces parties, à la température d'environ 10° du thermometre de Réaumur. (*Voyez* la traduction que j'ai publiée, en 1787, du mémoire du major général Roy, sur la *Mesure de la base* de Hounslow-heat, *Disc. préliminaire*, page 17.)

Digitized by Google

question de trouver quelle est la courbe qu'un corps abandonné à la pesanteur sera le moins de temps à parcourir.

Recherche de la courbe de la plus vîte descente.

Soit AN la courbe cherchée (*figure* 115); puisque cette courbe est celle que doit suivre le corps pour que, partant de A avec une vîtesse quelconque, et abandonné ensuite à la pesanteur, il arrive en N dans le moins de temps possible, deux points quelconques, pris sur la même courbe, doivent jouir de la même propriété. En effet si, par exemple, l'arc Mmm' n'étoit pas le chemin par lequel le corps doit arriver de M en m' dans le moins de temps possible, ce seroit un autre arc Mnm' qui jouiroit de cette propriété; mais alors la courbe AMmm'N ne jouiroit pas de la propriété d'être celle de la plus vîte descente, et il faudroit attribuer cette propriété à la ligne AMnm'N; ce qui est contre l'état de la question.

Supposons l'arc Mm' infiniment petit, la propriété sus énoncée, qui ne dépend point de sa grandeur, subsistera toujours. Menons les ordonnées PM, pm, $p'm'$, infiniment près; nommons AP, x; Ap, x'; PM, y; pm, y'; Mm, ds; mm'; ds'; menons Mg et mh paralleles à AP.

Puisque le temps employé à parcourir le petit arc Mmm' est un *minimum*, si on suppose que la direction de ce petit arc varie infiniment peu, le temps ne variera point; car c'est là la propriété des quantités arrivées à leur *maximum* ou à leur *minimum*. On peut donc supposer deux petites lignes Mn, nm', faisant des angles infiniment petits avec Mm et mm', et, pour mettre le problême en équation, il faudra exprimer que l'élément de temps employé à parcourir Mmm' est égal à l'élément de temps employé à parcourir Mnm', ou que la variation de cet élément, considérée de l'un à l'autre petit arc de courbe, est égale à zéro.

Le temps employé à parcourir Mm ou ds est égal à $\frac{ds}{u}$, ou, comme $u = \sqrt{(2\varphi \times \text{AP})} = \sqrt{2\varphi x}$, (65), à $\frac{ds}{\sqrt{2\varphi x}}$, et le temps employé à parcourir mm' ou ds' est égal à $\frac{ds'}{\sqrt{2\varphi x'}}$; le temps total employé à parcourir Mmm' sera $\frac{ds}{\sqrt{2\varphi x}} + \frac{ds'}{\sqrt{2\varphi x'}}$. Il s'agit d'exprimer que cette quantité ne variera pas si le corps, au lieu de parcourir Mmm', parcourt le petit arc infiniment peu différent Mnm'.

Désignons par δ les variations provenantes du changement de l'arc Mmm' en l'arc Mnm'; on voit que ces variations n'affectent que les lignes Mm, mm', et pm, qui se changent en

Digitized by Google

Mn, nm', et pn ; les lignes x, x', dx, dx', sont constantes par rapport à la variation qu'indique le signe δ.

Cela posé, pour énoncer que la variation du temps par Mmm' et par Mnm' est nulle, il faut poser l'équation

$$\delta\left(\frac{ds}{\sqrt{2\varphi x}}+\frac{ds'}{\sqrt{2\varphi x'}}\right)=0,$$

ou, parceque 2φ, diviseur commun, est constant,

$$\delta\left(\frac{ds}{\sqrt{x}}+\frac{ds'}{\sqrt{x'}}\right)=0.$$

Les dénominations $\sqrt{x}$, $\sqrt{x'}$, sont constantes par rapport à la variation qu'indique δ. Quant aux numérateurs, on a $ds^2 = dy^2+dx^2$ et $\delta\cdot ds^2$, ou $2\,ds\,\delta\cdot ds = 2dy\,\delta\cdot dy$, $\delta\cdot dx$, étant nul. On a pareillement $ds'^2 = dy'^2+dx'^2$, et $2ds'\,\delta\cdot ds' = 2dy'\delta\cdot dy'$; on tire de là $\delta\cdot ds = \frac{dy\,\delta\cdot dy}{ds}$ et $\delta\cdot ds' = \frac{dy'\delta\cdot dy'}{ds'}$; et en substituant ces valeurs dans l'équation $\delta\left(\frac{ds}{\sqrt{x}}+\frac{ds'}{\sqrt{x'}}\right)=0$, on a

$$\frac{dy\,\delta\cdot dy}{ds\sqrt{x}}+\frac{dy'\delta\cdot dy'}{ds'\sqrt{x'}}=0.$$

Observons maintenant que, cette équation n'ayant lieu que depuis M jusqu'en m', la longueur $gm' = gh+hm' = dy+dy'$ doit être censée constante par rapport à ce qu'exprime cette équation ; on a donc $\delta(dy+dy')=0$, et par conséquent $\delta\cdot dy = -\delta\cdot dy'$; ce qui réduit l'équation à $\frac{dy}{ds\sqrt{x}}-\frac{dy'}{ds'\sqrt{x'}}=0$, ou à $d\left(\frac{dy}{ds\sqrt{x}}\right)=0$, équation de la courbe cherchée.

La premiere intégrale de cette équation donnera $\frac{dy}{ds\sqrt{x}} = A$, qui, en supposant que $x = a$ lorsque la courbe devient parallele à l'horizon, ou que $dy = ds$, donne $A = \frac{1}{\sqrt{a}}$, et se change en $\frac{dy}{ds\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{a}}$, ou $a\,dy^2 = x\,ds^2 = x\,dy^2+x\,dx^2$. Donc $dy = \frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{(a-x)}}$. Multiplions le second membre, haut et bas, par $\sqrt{x}$, il viendra $dy = \frac{x\,dx}{\sqrt{(ax-xx)}} = \frac{x\,dx-\frac{1}{2}a\,dx}{\sqrt{(ax-xx)}}+\frac{\frac{1}{2}a\,dx}{\sqrt{(ax-xx)}}$, dont l'intégrale est $y = B-\sqrt{(ax-xx)}+\int\frac{\frac{1}{2}a\,dx}{\sqrt{(ax-xx)}}$.

La courbe de la plus vite descente est une cycloïde.

Puisque l'abscisse CR (*fig.* 113), répondant au point A le plus bas de la courbe, ou la verticale BA qui lui est égale, a pour valeur a, imaginons un demi-cercle décrit sur le diametre AB, on aura, en traçant l'horizontale PQ, nommant CQ, x; QM, y; PT $= \sqrt{(ax-xx)}$; BT $= \int\frac{\frac{1}{2}a\,dx}{\sqrt{(ax-xx)}}$; la constante B $= 0$, puisqu'on a en même temps $y = 0$, PT $= 0$, et BT $= 0$; donc QM, ou CS $=$ BT $-$ PT. Or, lorsque le point S sera en B, le point M sera en A; on aura donc CB $=$ BTA. Donc CB $-$ CS, ou BS $=$

Digitized by Google

BTA — BT + PT = AT + PT; ce qui est une propriété fondamentale de la cycloïde: ainsi la courbe de la plus vîte descente est une cycloïde.

Construction de cette courbe.

Comme les deux points A et B sont donnés (*fig.* 116), il ne sera pas difficile de décrire par ces deux points la courbe cherchée. On pourra tracer d'abord une cycloïde sur la base horizontale AL prise à volonté; cette courbe rencontrera en K la corde AB; on menera par le point B la ligne BF parallele à KL, et AF sera la base de la cycloïde demandée, ou, ce qui est la même chose, AF sera égale à la circonférence de son cercle générateur. Or, ce cercle étant une fois connu, la description de la cycloïde, qui en dépend, est facile. Cette construction est fondée sur ce que toutes les cycloïdes sont des courbes semblables: effectivement il n'entre dans leur équation d'autre constante que le diametre du cercle générateur (*).

Recherche de la courbe d'égale pression.

420. Proposons-nous pour dernier exemple, sur les mouvements progressifs, de déterminer la courbe le long de laquelle un corps glissant, tant en vertu de son poids qu'en vertu d'un mouvement primitivement imprimé, presseroit également dans tous les points.

La pression d'un corps qui se meut le long d'une courbe, sur cette courbe, a pour valeur (399) $\frac{u^2}{R}\int m + \frac{dx\int(Mm\sin.\Psi)-dy\int(Mm\cos.\Psi)}{ds}$, où la partie positive du numérateur du second terme est relative à la pression produite par les puissances paralleles à l'axe des y.

En supposant l'axe des y vertical, cette expression devient, dans le cas de la pesanteur, $\left(\frac{u^2}{R}+\frac{g\,dx}{ds}\right)\int m$. Soit $\varphi P'$ la partie constante du poids du corps qu'on veut que supporte la courbe, et on aura $\varphi P' = \left(\frac{u^2}{R}+\frac{g\,dx}{ds}\right)\int m$.

Soit a la hauteur due à la vîtesse initiale, $a+y$ sera la hauteur due à la vîtesse pour un point quelconque, et on aura $u^2 = 2\varphi(a+y)$; faisant $\varphi\int m = P$, et substituant, il vient $\frac{2(a+y)}{R}+\frac{dx}{ds}=\frac{P'}{P}$.

(*) Tous les géometres du premier rang s'occuperent, au commencement de ce siecle, du problême de la plus vîte descente, et ils trouverent tous, pour résultat, un arc de cycloïde. De là vient le nom de *courbes brachystochrones*, pour désigner généralement celles qui ont la propriété d'être, suivant les différents cas, lignes de la plus vîte descente. (*Mécanique de M. l'abbé Marie.*)

Les courbes qui jouissent aussi, dans différentes circonstances, de l'autre propriété de la cycloïde démontrée (412), se nomment *courbes tautochrones*.

On a généralement $R = \frac{ds^3}{dy^2 d\left(\frac{dx}{dy}\right)}$. Substituant encore cette valeur, il vient $\frac{2(a+y)\,dy^2 d\left(\frac{dx}{ds}\right)}{ds^3} + \frac{dx}{ds} = \frac{P'}{P}$.

Comme on n'a rien supposé de constant dans cette équation, on peut, pour faciliter l'intégration, supposer constante telle différentielle qu'on voudra. Supposons ds constante : alors on a dds ou $d\sqrt{(dx^2+dy^2)} = 0$, qui donne $dx\,ddx + dy\,ddy = 0$, ou $ddy = -\frac{dx\,ddx}{dy}$. Or $dy^2 d\left(\frac{dx}{dy}\right) = dy^2 \frac{dy\,ddx - dx\,ddy}{dy^3}$, ou, en substituant la valeur qu'on vient de trouver pour ddy, on a $dy^2 d\left(\frac{dx}{dy}\right) = \frac{ds^2\,ddx}{dy}$. Notre équation se change donc en

$$2(a+y)\,ddx + dy\,dx = \frac{P'}{P}\,ds\,dy,$$

ou, en divisant par $2(a+y)^{\frac{1}{2}}$,

$(a+y)^{\frac{1}{2}} ddx + \frac{1}{2}(a+y)^{-\frac{1}{2}} dx\,dy = \frac{P'}{P} \times \frac{1}{2}(a+y)^{-\frac{1}{2}} ds\,dy$, dont les deux membres étant des différentielles exactes, on a pour intégrale

$$(a+y)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{P'}{P}(a+y)^{\frac{1}{2}} ds + A\,ds.$$

Pour déterminer la constante, supposons que la tangente de la courbe, au point de départ, fasse avec la verticale un angle dont le sinus soit q ; comme ce sinus est d'ailleurs exprimé par $\frac{dx}{ds}$, on aura $q = \frac{P'}{P} + \frac{A}{\sqrt{a}}$; donc $A = (q - \frac{P'}{P})\sqrt{a}$. Regardant donc A comme déterminé, on aura

$$ds = \frac{(a+y)^{\frac{1}{2}} dx}{\frac{P'}{P}(a+y^{\frac{1}{2}}) + A} \text{ et } ds^2 = \frac{(a+y)\,dx^2}{\left(\frac{P'}{P}(a+y)^{\frac{1}{2}} + A\right)^2} = dx^2 + dy^2 ;$$

d'où on tire finalement

$$dx = \frac{dy\left[\frac{P'}{P}(a+y)^{\frac{1}{2}} + A\right]}{\sqrt{\left[a+y - \left(\frac{P'}{P}(a+y)^{\frac{1}{2}} + A\right)^2\right]}}.$$

Équation de cette courbe.

Cette équation s'integre exactement lorsque $P' = P$: dans tout autre cas, elle dépend des logarithmes ou des arcs de cercle, selon que P' est plus petit ou plus grand que P. C'est ce que l'on verra aisément en rendant le second membre rationnel.

Il n'y auroit de différence que pour l'intégration si, au lieu de supposer que la pression est constante, on exigeoit qu'elle variât suivant une loi donnée ; alors $\frac{P'}{P}$ seroit une quantité variable dont la loi seroit donnée. Par exemple, si on vouloit que

Cas où la pression varieroit suivant une loi donnée.

Digitized by Google

la pression en chaque point fût comme la vîtesse, $\frac{P'}{P}$ seroit proportionnel à $\sqrt{(a+y)}$. On mettroit donc dans la premiere équation différentielle $K(a+y)^{\frac{1}{2}}$ au lieu de $\frac{P'}{P}$, K étant une quantité donnée, et l'on intégreroit. (Voyez la *Mécanique de M. Bezout.*)

Applications de la théorie du mouvement de rotation.

Transformation de la formule du mouvement de rotation en fonction de la vîtesse angulaire.

421. L'équation $\frac{dd\omega}{dt^2}\int(R^2 m) = \int(Mmr \sin.\zeta)$, donnée article (405), peut, en nommant w la vîtesse angulaire qui a lieu à l'instant où le corps décrit l'angle élémentaire $d\omega$, se changer en $\frac{dw}{dt}\int(R^2 m) = \int(Mmr \sin.\zeta)$. En effet, w est l'angle que le corps décriroit dans l'unité de temps avec la vîtesse angulaire acquise; $d\omega$ est celui qu'il décrit réellement pendant l'instant dt; il doit donc exister entre ces especes de vîtesses et d'espaces le même rapport qui existe entre les vîtesses et les espaces auxquels se rapportent les équations de l'art. (24). Ainsi, d'après l'équation (D) de cet article, on doit avoir $dwdt = dd\omega$, et par conséquent $\frac{dd\omega}{dt^2} = \frac{dw}{dt}$.

Formule pour cette vîtesse dans le cas d'une communication de mouvement instantanée et finie.

422. La quantité $\frac{dw}{dt}$, dont $\frac{\int(Mmr \sin.\zeta)}{\int(R^2 m)}$ est la valeur, exprime la vîtesse angulaire finie que le corps acquerroit au bout de l'unité de temps si les moteurs M, considérés comme des puissances, continuoient uniformément leur action pendant la même unité de temps (25): mais lorsque les moteurs seront des forces, alors la vîtesse finie représentée par $\frac{dw}{dt}$ sera communiquée à l'instant même de l'action des forces; et faisant $\frac{dw}{dt} = W$, on aura $W = \frac{\int(Mmr \sin.\zeta)}{\int(R^2 m)}$, ainsi qu'on l'a déja trouvé art. (406). On sait que M sin.ζ est l'action exercée par M dans un plan perpendiculaire à l'axe de rotation; ainsi Mm sin.ζ est la quantité de mouvement de la molécule m rapportée au même plan, et Mmr sin.ζ le moment de cette quantité de mouvement; enfin $\int(R^2 m)$ est le moment d'inertie du corps; on peut donc énoncer ainsi le théorême suivant:

Propriétés qui résultent de cette formule.

423. *Si un corps assujetti à tourner autour d'un axe est sollicité par un nombre quelconque de forces agissant dans des directions quelconques, décomposez ces forces parallèlement à un plan perpendiculaire à l'axe de rotation, ou multipliez-les par le sinus de*

Digitized by Google

de l'angle qu'elles font avec un parallele au même axe ; prenez la somme des moments des quantités de mouvement résultantes de ces forces ainsi décomposées, lesquelles quantités de mouvement s'évaluent comme si le corps étoit libre; divisez cette somme par le moment d'inertie du corps, et le quotient sera la vîtesse angulaire du même corps autour de l'axe de rotation.

Méthode générale pour évaluer le moment d'inertie.

424. L'application de ce théorême suppose l'évaluation actuelle du moment d'inertie d'un corps, et, avant d'aller plus loin, il est bon que nous disions un mot de la maniere de faire cette évaluation.

Soit ABC (*fig.* 117) un triangle tournant autour d'un axe O perpendiculaire à son plan ; le moment d'inertie de ce triangle, par rapport à l'axe O, sera la somme des produits de ses éléments R par les quarrés des distances RO.

Faisons passer par l'axe O un plan OX perpendiculaire à la base BC, et un autre plan YOY perpendiculaire au premier; menons RR′ et RP paralleles aux plans OX et YOY, on voit sur-le-champ que $\overline{RO}^2 = \overline{RR'}^2 = \overline{RP}^2$: ainsi le moment d'inertie du triangle sera égal à la somme des produits des molécules par les quarrés des distances RR′, plus la somme des produits des mêmes molécules par les quarrés des distances RP.

Menons les lignes infiniment près NN′, nn', et MM′, mm', paralleles à OX et YY : nommons PR ou OR′, x; NN′, y; OP, x'; MM′, y' : le trapeze NN′$n'n$ sera égal à $y\,dx$, et son produit, par le quarré de RP, sera $x^2 y\,dx$: pareillement le produit du trapeze MM′$m'm$, par le quarré de la distance RR′, sera $x'^2 y'\,dx'$; ainsi le moment d'inertie du triangle, par rapport à l'axe O, sera $\int x^2 y\,dx + \int x'^2 y'\,dx'$, dans lesquelles expressions il est aisé de substituer à y et y' des fonctions de x, de x', et de constantes, au moyen des triangles semblables BDA, BN′N, et ABC, AMM′.

Si l'aire ABC, au lieu d'être terminé par des lignes droites, l'étoit par des courbes quelconques, en faisant le même raisonnement on trouveroit également que son moment d'inertie auroit pour expression $\int x^2 y\,dx + \int x'^2 y'\,dx'$, dont on déterminera la valeur finie toutes les fois que y et y' seront des fonctions de x et x'.

Enfin on parviendra par le même procédé à trouver le moment d'inertie d'un solide ; pour cela, il n'y a qu'à supposer que les trapezes élémentaires NN′$n'n$, MM′$m'm$, sont des tranches paralleles aux plans OX, YY, qui ont pour épaisseur dx et dx';

Digitized by Google

et nommant Y et Y′ les coupes du solide faites sur les lignes NN′ et MM′, le moment d'inertie aura pour expression $\int x^2 Y dx \int x'^2 Y' dx'$, dont la valeur finie dépendra du calcul intégral toutes les fois que Y et Y′ seront fonctions de x et x'.

Application de cette méthode aux surfaces ou solides irréguliers.

425. Lorsque la surface ou le solide dont on voudra déterminer le moment d'inertie ne seront soumis à aucune loi susceptible d'être exprimée par une équation, il faudra diviser la surface en trapezes mixtilignes, et le solide en tranches d'autant plus petites qu'on voudra avoir plus d'exactitude; on déterminera les surfaces, ou les solidités de ces trapezes ou de ces tranches, ainsi que leur centre de gravité, par les méthodes exposées art. (223 et suiv.), et on fera une somme des produits de ces surfaces ou de ces solides par les quarrés des distances de leurs centres de gravité aux plans ci-dessus mentionnés passant par l'axe de rotation. Cette méthode aura assez d'exactitude pour la pratique.

Méthode pour déterminer le moment d'inertie par rapport un axe quelconque parallele à un axe passant par le centre de gravité, pour lequel axe le moment d'inertie seroit connu.

426. Supposons un axe parallele à l'axe de rotation et passant par le centre de gravité, et, par ce centre et cet axe, faisons passer deux plans paralleles à ceux qui passent par l'axe de rotation. Soit z la distance d'un élément de la surface ou du solide à un des plans passant par le centre de gravité, et a la distance du centre de gravité au plan parallele à celui-là, passant par l'axe de rotation; soit encore z' la distance de l'élément qui couperoit le premier élément à angle droit, à l'autre plan passant par le centre de gravité, et a' la distance de ce dernier plan au plan qui lui est parallele, et qui passe par l'axe de rotation; on pourra, dans les formules $\int x^2 Y dx + \int x'^2 Y' dx'$, substituer aux distances x et x' les mêmes distances $z + a$ et $z' + a'$, en faisant z et z' négatives ou positives, suivant qu'elles se trouvent du côté du plan ou du côté opposé par rapport au centre de gravité. Ces formules se changeront donc en $\int z^2 Y dx + 2a \int z Y dx + a^2 \int Y dx + \int z'^2 Y' dx' + 2a' \int z' Y' dx' + a'^2 \int Y' dx'$. Remarquons que $\int z^2 Y dx + \int z'^2 Y' dx'$ est la valeur du moment d'inertie par rapport à l'axe passant par le centre de gravité; qu'on a, par la propriété du centre de gravité (159), $\int z Y dx = 0$, et $\int z' Y' dx' = 0$; que $a^2 + a'^2$ est le quarré de la distance du centre de gravité à l'axe de rotation, et qu'enfin $\int Y dx$ et $\int Y' dx'$ expriment l'une et l'autre la masse entiere du corps. Nommons Q la masse du corps, k la distance de son centre de gravité à l'axe de rotation, $Q n^2$ son moment d'inertie par rapport à l'axe passant par le centre de gravité; la valeur du moment d'inertie, par rapport à l'axe de rotation, sera $Q(n^2 + k^2)$; ce qui fournit un moyen

Digitized by Google

fort simple de déterminer le moment d'inertie par rapport à un axe quelconque, parallele à un axe passant par le centre de gravité, quand on connoît le moment d'inertie par rapport à ce dernier axe, et la distance des deux axes.

Détermination du pendule simple qui feroit ses oscillations dans le même temps qu'un pendule composé.

427. Reprenons l'équation $\frac{dw}{dt} \int R^2 m = f(Mmr \sin. \epsilon)$; supposons que l'axe de rotation est horizontal, et que M est la pesanteur que nous nommerons φ; cette équation se changera, eu égard à ce que $\varphi =$ constante, et $\sin. \epsilon = 1$, en $dw = \frac{f(mr)}{\int R^2 m} \varphi dt$.

Nommons Q la masse du corps, k la distance perpendiculaire de l'axe de rotation à la verticale passant par son centre de gravité; on aura $f(mr) = Qk$, et $m = dQ$ (179). Ainsi l'équation précédente se changera en $dw = \frac{Qk}{\int (R^2 dQ)} \varphi dt$.

Soit A l'axe de rotation (*fig.* 118), AP une verticale, GP une horizontale, et G le centre de gravité du corps Q tournant autour de cet axe; faisons $AG = a$, *angle* $GAP = \omega$; on aura GP, ou $k = a \sin. \omega$, qui, substituée dans la valeur de dw, donne $dw = \frac{Qa \sin. \omega}{\int (R^2 dQ)} \varphi dt$, et, puisque $\int (R^2 dQ) = Q(n^2 + a^2)$ (426), $dw = \frac{a \sin. \omega}{n^2 + a^2} \varphi dt$.

Le corps Q étant supposé osciller autour de A, on a $dt = -\frac{d\omega}{w}$, qui, substituée, donne $w dw = \frac{-a}{n^2 + a^2} \varphi d\omega \sin. \omega$, dont l'intégrale est $w^2 = \frac{2a\varphi \cos. \omega}{n^2 + a^2} + A$.

Pour déterminer la constante, supposons que w ait commencé avec t, et que, lorsque w étoit zéro, l'angle GAP étoit l'angle mAp; nommant f ce dernier angle, on aura $o = \frac{2a\varphi \cos. f}{n^2 + a^2} + A$; d'où $A = -\frac{2a\varphi \cos. f}{n^2 + a^2}$, qui, substitué, donne

$$w^2 = \frac{2a\varphi}{n^2 + a^2} (\cos. \omega - \cos. f).$$

Supposons qu'un pendule simple, dont la longueur seroit $\frac{n^2 + a^2}{a}$, commence son mouvement à une distance angulaire f de la verticale; lorsque ce pendule sera parvenu à une distance angulaire ω de cette verticale, il sera descendu d'une quantité $\frac{n^2 + a^2}{a} (\cos. \omega - \cos. f)$, et la vîtesse acquise sera

$$\sqrt{\left[\frac{(n^2 + a^2) 2\varphi}{a} (\cos. \omega - \cos. f)\right]}.$$

Divisant cette vîtesse, qui est celle le long de la courbe, par la

Digitized by Google

longueur du pendule, ou par $\frac{n^2+a^2}{a}$, pour avoir la vîtesse angulaire, cette vîtesse sera $\sqrt{\left[\frac{2ga}{n^2+a^2}(\cos.\omega - \cos.f)\right]}$. Or c'est précisément la même équation qu'on trouve pour la vîtesse angulaire du corps Q; donc le pendule simple, dont la longueur sera $\frac{n^2+a^2}{a}$, lui sera isochrone, ou fera ses oscillations dans le même temps.

Ce que c'est que le centre d'oscillation.

428. Si, sur la ligne AG passant par le centre de gravité, on porte la longueur $Ag = \frac{n^2+a^2}{a}$, on déterminera le point g, qui aura la propriété d'osciller de la même maniere que le feroit un pendule simple, ou de la même maniere que s'il étoit indépendant et sans liaison avec les autres parties du corps Q: ce point se nomme *centre d'oscillation* (*).

Cas où la position du centre d'oscillation change sans que la distance du centre de gravité à l'axe de rotation varie.

429. La distance de ce centre à l'axe de rotation dépend, comme on voit, de deux quantités, dont l'une est a, ou la distance du centre de gravité à l'axe de rotation; l'autre est n^2, ou le quotient du moment d'inertie par rapport à un axe passant par le centre de gravité, et parallele à l'axe de rotation, par la masse. La distance a du centre de gravité à l'axe de rotation peut donc rester la même, et néanmoins la position du centre d'oscillation peut varier. Pour bien concevoir ceci, considérons l'oscillation d'un plan auquel l'axe de rotation soit perpendiculaire, le moment d'inertie, par rapport à cet axe, sera (424) $\int x^2 y\,dx + \int x'^2 y'\,dx'$, dans laquelle expression $\int x^2 y\,dx$ est relative aux distances des éléments de la surface à un plan passant par l'axe de rotation. Ainsi comme on a (426) $Q(n^2+a^2) = \int x^2 y\,dx + \int x'^2 y'\,dx'$, la distance du centre d'oscillation à l'axe de rotation sera $\frac{\int x^2 y\,dx + \int x'^2 y'\,dx'}{aQ}$. Supposons à présent que, a restant la même, on fasse faire un quart de révolution au plan oscillant, de maniere que l'axe de rotation se trouve dans le plan oscillant, on aura $\int x^2 y\,dx = 0$; $\int x' y'^2\,dx'$ ne changera point de valeur, et la distance du centre d'oscillation à l'axe de rotation sera réduite à $\frac{\int x' y'^2\,dx'}{aQ}$.

Considérations générales sur le problême du centre d'oscillation dans différentes hypotheses de forces accélératrices.

430. En supposant que la position du centre d'oscillation

(*) L'application de la théorie des centres d'oscillation est d'un grand usage en horlogerie, depuis qu'on se sert généralement des pendules à correction. Ces pendules sont composés d'une très grosse lentille suspendue par un système de verges d'acier et de cuivre, disposées de maniere que la dilatation des unes compense celle des autres, et tienne, à toutes les températures, le centre d'oscillation à la même hauteur. (Voyez le chap. 21 du *Traité d'horlogerie* de M. Le Paute, et le *Traité* de M. Berthoud, tom. 2, chap. 22, 23, 38 et 45).

Digitized by Google

n'éprouvât aucune variation relative à a et n, ou que le moment d'inertie, par rapport à l'axe de rotation, fût constant, cette position ne devroit encore être censée invariable dans le corps qu'autant que les oscillations se feroient dans le vuide, ou généralement qu'autant que la force accélératrice qui produira le mouvement, combinée avec la résistance du fluide dans lequel se meut le corps, donnera une résultante constante dont l'action sur chaque molécule s'exerce dans des directions paralleles. C'est en effet à ces considérations que nous devons la possibilité d'intégrer l'équation $\frac{dw}{dt} f(\mathrm{R}^2 m) = f \mathrm{M} mr \sin. \epsilon)$ (427), de maniere que M et ϵ disparoissent dans l'expression de la distance du point qui a la même vîtesse angulaire w que lui donneroit la gravité s'il tournoit librement autour de l'axe sans être lié aux autres molécules qui composent le corps

Recherche de la distance à l'axe de rotation de la résultante des quantités de mouvem. qui ont lieu.

431. Soit A (*fig.* 119) l'axe de rotation d'un corps Q dont m est une des molécules, et AX un plan passant par le centre de gravité de ce corps; proposons-nous de trouver la distance AE à laquelle passe la résultante des quantités de mouvement de toutes les molécules, qu'on sait déja (393) être égale à la masse Q, multipliée par la vîtesse du centre de gravité.

Faisons $\mathrm{A}m = \mathrm{R}$, la vîtesse d'une molécule $= u$; la vîtesse du centre de gravité $= \mathrm{V}$, et sa distance à l'axe de rotation $= a$. Représentons la vîtesse de la molécule m par la ligne mn perpendiculaire à $\mathrm{A}m$, et décomposons cette vîtesse en deux, mk et mh, l'une parallele, et l'autre perpendiculaire à AX; la similitude des triangles $\mathrm{AP}m$, mnh, donne $\mathrm{A}m : \mathrm{AP} :: mn : mh = \frac{mn \times \mathrm{AP}}{\mathrm{A}m} = \frac{u}{\mathrm{R}} \times \mathrm{AP} = \frac{\mathrm{V}}{a} \times \mathrm{AP}$, et la quantité de mouvement résultante de cette vîtesse $\frac{\mathrm{V}}{a} m \times \mathrm{AP}$. On trouvera de la même maniere, que la quantité de mouvement produite par la vîtesse mk est $\frac{\mathrm{V}}{a} m \times \mathrm{P}m$; ainsi la somme des moments des quantités de mouvement perpendiculaires à AX sera $\frac{\mathrm{V}}{a} f(m \times \overline{\mathrm{AP}}^2)$, et la distance de leur résultante à AX sera $\frac{\frac{\mathrm{V}}{a} f(m \times \overline{\mathrm{AP}}^2)}{\frac{\mathrm{V}}{a} f(m \times \mathrm{AP})} = \frac{f(m \times \overline{\mathrm{AP}}^2)}{aQ}$, puisqu'on a (179) $a = \frac{f(m \times \mathrm{AP})}{\mathrm{Q}}$. Quant à la somme des moments $\frac{\mathrm{V}}{a} f(m \times \overline{\mathrm{P}m}^2)$ des quantités de mouvement paralleles à AX, je puis évidemment lui substituer la somme des

Digitized by Google

moments $\frac{\frac{V}{a}f(m \times \overline{Pm'^2})}{\frac{V}{a}aQ}\ \frac{V}{a}aQ$; ainsi la quantité de mouvement $\frac{V}{a}aQ = \frac{V}{a}f(m \times AP)$, c'est-à-dire une quantité de mouvement, égale à la somme de celles qui agissent perpendiculairement à AX, étant appliquée, parallèlement à AX, à une distance $\frac{f(m \times \overline{Pm'^2})}{aQ}$, fera le même effet que $\frac{V}{a}f(m \times \overline{Pm'^2})$. On pourra donc faire équilibre au mouvement de rotation, en appliquant la force $\frac{V}{a}aQ = VQ =$ la somme des quantités de mouvement de toutes les molécules; en l'appliquant, dis-je, perpendiculairement à AX, à la distance $\frac{f(m \times \overline{AP'})}{aQ}$, et en appliquant en même temps cette force, parallèlement à AX, à la distance $\frac{f(m \times \overline{Pm'})}{aQ}$; ou, ce qui revient au même, en appliquant la force VQ, en un seul point, à la distance $\frac{f(m \times \overline{AP'}) + f(m \times \overline{Pm'})}{aQ}$ $= \frac{f[m \times (\overline{AP'} + \overline{Pm'})]}{aQ} = \frac{f(m \times \overline{Am'})}{aQ} = \frac{f(R'm)}{aQ}$, qui, en faisant le moment d'inertie $f(R^2m) = Q(h^2 + a^2)$, deviendra $\frac{h^2+a^2}{a}$.

Ce que c'est que le centre de percussion.

432. Le point E, que nous venons de déterminer, se nomme *centre de percussion;* c'est celui où un corps, tournant autour d'un axe, feroit éprouver le plus grand choc.

En quoi diffèrent les problèmes des centres d'oscillation et de percussion.

433. L'expression $\frac{h^2+a^2}{a}$ de la distance du centre de percussion à l'axe de rotation est la même que celle trouvée précédemment (428) pour le centre d'oscillation. Plusieurs géometres ont regardé ces deux centres comme généralement identiques, et ont pour ainsi dire traité les recherches de l'un et de l'autre comme des questions de même nature. La maniere dont nous les avons présentés doit faire concevoir que ces questions sont bien différentes l'une de l'autre, sur-tout si on prend le problême du centre d'oscillation dans toute son étendue. Nous avons vu en effet (430) que la distance $\frac{h^2+a^2}{a}$ du centre d'oscillation ne s'obtenoit que dans une certaine hypothese de force accélératrice, et par conséquent n'appartenoit qu'à une branche particuliere de la question générale. Il n'en est pas de même du centre de percussion, sa position est entièrement indépendante de tous les moteurs qui peuvent agir sur le corps, et ne tient qu'à la nature et à la forme de ce corps.

Digitized by Google

434. Lorsque le centre de gravité est infiniment éloigné de l'axe, l'expression $\frac{h^2+a^2}{a}$ se réduit à a : il en est de même lorsque h^2 est très petit par rapport à a^2, et, dans ces deux cas, les centres d'oscillation et de percussion se confondent avec le centre de gravité.

Ces centres se confondent avec celui de gravité quand ce dernier est infiniment éloigné de l'axe.

435. Terminons ce chapitre par la détermination d'une autre espece de centre qu'on appelle *centre spontané de rotation*. Pour en donner une idée, soit un corps Q (*fig.* 120) animé par un moteur appliqué au point O du corps, et agissant dans la direction Oi. Menons OC perpendiculaire à Oi, et supposons que, pendant que le centre de gravité placé en G parcourt un espace infiniment petit Gg, parallele à Oi, le point O décrit autour de ce centre un arc ih. Cela posé, chaque point p de la ligne gc, qui étoit la ligne GC quand le point g étoit en G, décrira en sens contraire à Gg un arc ps d'autant plus grand que le point p sera plus éloigné du point g, et qui sera à l'arc ih comme pg : gi. Il y aura donc sur cette ligne un point c qui décrira un arc cC égal à Gg, et qui, par conséquent, en vertu de la rotation, doit se trouver en C lorsque, en vertu de la translation, le point G sera en g. Mais comme les lignes gc et GC se confondoient quand le point g étoit en G, les mouvements de rotation et de translation se sont mutuellement compensés au point C, qui, par ce moyen, est resté immobile, et doit être regardé comme le centre autour duquel ont tourné tous les points du corps en vertu du mouvement absolu résultant de la combinaison de leur double mouvement de translation et de rotation. C'est à cause de la propriété qu'a ce point d'être un centre de mouvement, que le corps se forme comme de son propre gré, qu'on l'appelle *centre spontané de rotation*.

Ce que c'est que le centre spontané de rotation ; recherche de la position de ce centre.

Soient u la vîtesse de translation, et w la vîtesse de rotation autour du centre de gravité ; le petit arc Gg, considéré comme parcouru en vertu du mouvement de translation, sera égal à udt ; son égal cC, considéré comme résultant du mouvement de rotation, sera égal à $g\text{C} \times wdt = \text{GC} \times wdt$; on aura donc $\text{GC} \times wdt = udt$; d'où $\text{GC} = \frac{u}{w}$; ainsi la distance du centre spontané de rotation au centre de gravité est égale au rapport des deux vîtesses de translation et de rotation ; elle est donc infinie quand la derniere vîtesse est nulle, ou quand la résultante des quantités de mouvement imprimées passe par le centre de gravité ; ce qui est évident, puisque, GC et gC devenant paralleles, leur réunion C est à une distance infinie.

Digitized by Google

Propriété intéressante de ce centre.

436. La distance CO a une propriété qu'il est intéressant de faire connoître. Pour cela, soit $\int \mathrm{M}m$ la somme des quantités de mouvement imprimées, on aura (389) $u = \frac{\int(\mathrm{M}m)}{\mathrm{Q}}$, et (423) $w = \frac{\int(\mathrm{M}mr)}{\int(mr^2)}$. Substituant ces valeurs, on a $\mathrm{GC} = \frac{\int(\mathrm{M}m) \times \int(mr^2)}{\mathrm{Q} \times \int(\mathrm{M}mr)}$. Puisque la résultante des quantités de mouvement imprimées est supposée passée au point O, on a $\int(\mathrm{M}mr) = \mathrm{GO} \times \int(\mathrm{M}m)$; et faisant $\int(mr^2) = \mathrm{Q}h^2$, il vient $\mathrm{GC} = \frac{\int(\mathrm{M}m) \times \mathrm{Q}h^2}{\mathrm{Q} \times \mathrm{GO} \times \int(\mathrm{M}m)} = \frac{h^2}{\mathrm{GO}}$. Ajoutant GO aux deux membres, on a $\mathrm{CO} = \frac{h^2}{\mathrm{GO}} + \mathrm{GO} = \frac{h^2 + \mathrm{GO}^2}{\mathrm{GO}}$.

La valeur trouvée pour CO est précisément la même qu'on trouveroit si on cherchoit la distance du centre d'oscillation à un axe passant par le point O (428); elle est entièrement indépendante de la quantité et de la nature des moteurs qui agissent sur le corps; on peut donc aisément la déterminer pour un corps donné.

Conformité de la théorie précédente avec celle exposée dans un autre endroit de cet ouvrage.

437. La théorie du centre spontané de rotation peut être considérée comme un développement de ce qui a été dit article (145), ou comme une démonstration de la maniere générale dont le mouvement y a été considéré.

Nous allons passer aux matieres qui font le second objet de recherche de cette section, c'est-à-dire aux questions relatives au mouvement résultant de l'action mutuelle des corps les uns sur les autres. Cette théorie a déja été ébauchée art. (39) et suivants; mais nous allons la traiter sous un point de vue plus général, et applicable aux cas que nous offre la nature.

Théorie physico-mathématique de la percussion.

Ce qu'on entend par l'élasticité d'un corps.

438. Avant d'entrer en matiere sur les recherches qui doivent faire l'objet de ce chapitre, il est bon de définir une propriété des corps que nous n'avons point encore considérée dans ce que nous avons dit du mouvement; savoir, l'*élasticité*. On entend par-là la propriété qu'ont certains corps dont la figure a été altérée par un choc ou une pression, de reprendre entièrement ou en partie leur premiere forme. Dans le premier cas, l'élasticité est parfaite; dans le second cas, elle est imparfaite.

Insuffisance des théories ordinaires de la percussion; pourquoi elles ne sont pas applicables à la pratique.

439. Les théories ordinaires de la percussion ne traitent que du choc des corps parfaitement durs ou parfaitement élastiques; mais, la nature ne nous offrant aucun corps de cette espece, ces théories ne sont point applicables à la mécanique-pratique.

En

Digitized by Google

En effet, si les chocs qu'éprouvent les corps que nous offre la nature étoient comparés à ceux qu'éprouvent les corps parfaitement durs, il paroîtroit impossible de leur opposer des pressions capables d'en arrêter l'effet.

La raison en est que la quantité de mouvement d'un corps animé d'une vîtesse, s'évalue par le produit de cette vîtesse et de sa masse (38), et que l'effet produit par un corps qui ne fait que presser se mesure par le produit de sa masse et d'une vîtesse infiniment petite ou zéro (40), en sorte qu'un des facteurs du dernier produit étant nul, il est incomparable avec le premier produit dont les deux facteurs sont des quantités finies.

Expériences qui prouvent que, physiquement, une percussion peut faire équilibre à une pression.

440. Il est facile de se convaincre, par des expériences journalieres, que l'avantage qu'ont les corps animés d'une vîtesse sur ceux qui ne leur opposent qu'une résistance de pression, quoique très grand, n'est cependant pas infini.

Dans les sondes qu'a fait faire M. de Regemorte lors de la construction du pont de Moulins, il a reconnu que le sol sur lequel ce pont devoit être établi étoit un sable pur jusqu'à la profondeur de 47 pieds. Néanmoins un pieu, battu avec les plus forts moutons, n'a jamais pu s'y enfoncer au-delà de 15 pieds, quoique les 32 pieds qu'il avoit encore à parcourir fussent un milieu de même nature et aussi peu résistant que celui qu'il avoit déja pénétré. Le mémoire de M. Perronet sur les pieux et les pilotis offre une foule de recherches analogues à l'expérience que je viens de citer.

D'un autre côté, on a vu des fondations de pile, dont les pieux avoient été battus à refus, et résisté aux plus fortes percussions, s'enfoncer par le seul poids de la pile.

Ces expériences, faites en grand, prouvent que, physiquement parlant, on peut mettre en équilibre une force de percussion avec une force de pression, et même que cette derniere peut l'emporter sur l'autre, et produire un plus grand effet.

Ce phénomene s'explique par la loi de continuité.

441. Cette vérité deviendra sensible si l'on examine les causes auxquelles on doit attribuer la différence qui existe entre les effets du choc et ceux de la simple pression. Lorsqu'un corps supposé parfaitement dur, animé d'une vîtesse, en rencontre un autre parfaitement dur aussi, la variation de mouvement qui a lieu doit être produite dans un instant indivisible, en sorte que, de la vîtesse initiale à la vîtesse après le choc, il n'y a aucune continuité, aucune vîtesse intermédiaire. Mais si le mouvement de ce corps étoit modifié par une pression ou *force morte*, comme la pesanteur, alors il changeroit par degrés in-

Digitized by Google

sensibles, et ne subiroit une variation déterminée qu'au bout d'un certain temps. Voyez ce que nous avons dit sur ce sujet art. (40).

Comment la loi de continuité a lieu dans le choc physique des corps.

442. C'est donc la loi de continuité qui distingue les effets de la pression de ceux du choc, lorsque la dureté est infinie; mais comme cette dureté infinie n'existe point, puisque la matiere a par-tout un certain degré d'élasticité, et que l'adhésion de ses parties peut être surmontée, voyons si la percussion, considérée physiquement, nous offrira la loi de continuité.

Lorsqu'un corps en choque un autre, deux effets ont lieu dans chacun. 1°. Les parties en contact cedent à l'action du choc et se compriment, en sorte que la figure des corps est altérée par l'applatissement ou *impression* qui a lieu dans les parties en contact, et aux environs de ces parties. 2°. Lorsque l'applatissement ou *impression* est parvenue au plus haut degré dont les corps soient susceptibles, alors la portion d'élasticité qu'ils ont tend à détruire cet applatissement ou impression, qui s'efface en tout ou en partie; ce qui produit une réaction des corps l'un contre l'autre, à la fin de laquelle ils cessent de se presser mutuellement.

Explication de la grande disproportion entre les effets d'un choc et ceux d'une pression.

443. On voit par cet exposé, que la loi de continuité s'observe dans le choc des corps considérés physiquement; qu'il n'arrive aucune altération à leur mouvement sans que toutes les altérations intermédiaires n'aient eu préalablement lieu. Il est vrai que cette altération est toujours produite pendant un espace de temps prodigieusement court; et c'est ce qui occasionne la grande disproportion qu'on observe entre les effets du choc et ceux de la pression: mais les phénomenes du choc ne doivent pas moins être rapportés à ceux des puissances accélératrices ou retardatrices, qui agissent par degrés insensibles avant de produire un effet fini.

La théorie qu'on va exposer rapporte aux mêmes loix le choc des corps durs, mous, ou ayant une portion quelconque d'élasticité.

444. Nous allons, d'après cet exposé, donner l'esquisse d'une théorie physique de la percussion, qui renferme toutes les circonstances du mouvement tant pendant la durée du choc qu'après le choc. On y verra découler de la même source les loix du choc des corps durs, des corps mous, et des corps parfaitement ou imparfaitement élastiques, soit que ces corps soient mus en vertu de vîtesses constantes ou de forces accélératrices, ou par l'une et l'autre de ces deux causes (*).

445. On entendra par profondeur de l'impression sa plus

(*) La théorie de la percussion qu'on va exposer a été donnée, pour la premiere fois, dans un ouvrage espagnol qui a pour titre, *Examen maritime, théorique et pratique, ou Traité*

Digitized by Google

grande profondeur dans le sens de la direction du mouvement, et amplitude de l'impression la plus grande section qu'on peut y faire perpendiculairement à la direction du mouvement.

Dénominations des quantités qui entrent dans le calcul du choc des corps.

Soient en général

m et μ les deux corps qui se choquent;
s et σ les amplitudes d'impression;
r et ρ les duretés des corps;
x et z les longueurs ou profondeurs des impressions qui se font en eux;
f et φ les quantités de mouvement que les corps acquerroient dans l'unité de temps, en vertu de l'action des puissances constantes qui les animent;
k et $\varkappa$ les vîtesses avec lesquelles le choc commence;
u et v les vîtesses dans un instant quelconque du choc;
e et ϵ les espaces parcourus dans le temps même du choc;
t le temps.

Notions pour l'intelligence de la théorie suivante.

446. On suppose que le corps m suit et choque le corps μ, et par conséquent que la vîtesse k est plus grande que la vîtesse $\varkappa$; sans cela le choc ne pourroit s'effectuer, à moins que la vîtesse x ne fût négative : mais, pour plus de facilité, on supposera toujours que les puissances f et φ, ainsi que les vîtesses m et μ, sont positives; car il est très facile de faire négatives, dans le résultat du calcul, les quantités qui le seroient.

On suppose de plus que les deux corps se meuvent dans une même direction, et que le choc s'effectue de maniere qu'il n'y ait aucun mouvement gyratoire ou de rotation : ces dernieres considérations ne feroient qu'embrouiller le calcul; car il seroit plus long que difficile d'y avoir égard.

Enfin les corps seront censés d'une grandeur suffisante pour que les impressions ne changent pas sensiblement le lieu de leurs centres de gravité, de maniere que le mouvement de ces centres ne soit pas affecté par le changement de situation respective des parties de ces corps.

Comme on mesure la dureté d'un corps.

447. Toutes les quantités désignées ci-dessus (447) sont très susceptibles d'entrer dans le calcul, parcequ'on peut les rapporter chacune à des unités déterminées; les seules quantités r et ρ, qui désignent les duretés, paroîtront peut-être présenter quelque difficulté.

de mécanique, appliqué à la construction et à la manœuvre des vaisseaux et autres bâtiments, par M. don Georges Juan, que nous avons déja cité art. (223).

Cet ouvrage a été traduit en françois, avec des additions, par M. Léveque, ingénieur-hydrographe de la marine.

Digitized by Google

Pour se faire une idée de la dureté relativement au point de vue sous lequel on l'envisage, c'est-à-dire comme objet mensurable, il faut observer que la connoissance de cette propriété tenant à celle des propriétés intimes des corps, sa nature nous est absolument inconnue. Nous ne pouvons donc point, à proprement parler, mesurer la dureté ; car mesurer, c'est comparer, et on ne peut comparer à rien un objet inconnu. Mais comme la dureté ne nous intéresse ici que par ses effets, c'est la mesure de ces effets qu'il nous importe de connoître, et voici quels sont ceux que désignent les lettres r et ρ.

Si un corps parfaitement dur en choque un autre qui ne soit pas parfaitement dur, et que la surface de contact, à laquelle la direction du mouvement est supposée perpendiculaire, soit plane, et constamment égale à une surface donnée, comme un pied quarré, le pied étant l'unité, la résistance du corps choqué fera perdre au corps choquant, pendant un instant quelconque dt, une quantité de mouvement infiniment petite, que je nommerai ω. Si l'on multiplie ω par le rapport de l'unité de temps à l'élément du temps, le produit $\omega \frac{1}{dt}$ sera précisément égal à la quantité ρ qui désigne la dureté du corps choqué pendant l'instant qui correspond à la valeur de ω, ou qui désigne plutôt l'effet $\omega \frac{1}{dt}$ que cette dureté peut produire en continuant son action pendant l'unité de temps (25). On a donc $\frac{1}{dt}\omega = \rho$, ou $\omega = \rho dt$.

L'expression de cette mesure tient uniquement à la nature du corps.

On voit que ω est indépendant des masses et des vîtesses, soit absolues, soit respectives, des corps qui se choquent ; il désigne une quantité de mouvement qui peut résulter d'un nombre infini de combinaisons de vîtesses et de masses ; ω dépend donc uniquement de la nature du corps choqué, et quoique les masses et les vîtesses des deux corps entrent dans la valeur de ρ, comme on le verra, elles n'y sont que comme causes productrices de l'impression, et pour pouvoir déterminer ρ, d'après l'expérience, par le rapport qu'elles ont avec cette même impression.

On peut faire sur la quantité r un raisonnement semblable, en supposant que le corps choqué est parfaitement dur, que le corps choquant ne l'est pas, et l'on aura l'équation analogue $\omega' = r dt$.

L'amplitude d'impression peut représenter la surface de contact.

448. Si la surface de contact n'étoit pas une surface plane, il faudroit lui substituer l'amplitude d'impression : cette substi-

Digitized by Google

tution ne changeroit rien; car tous les points choqués dans la direction du mouvement étant renfermés dans l'amplitude d'impression, elle pourra représenter la somme de tous ces points.

Valeur du mouvem. perdu par les corps, quelle que soit l'amplitude d'impression, un des corps étant supposé parfaitement dur.

449. Pour trouver les valeurs de ω et ω' qui répondent à des amplitudes d'impression quelconque σ et s, il faut faire les proportions $1 : \sigma :: \rho dt : \sigma\rho dt = \omega$, et $1 : s :: rdt : srdt = \omega'$, et les équations $\omega = \sigma\rho dt$, et $\omega' = srdt$, auront lieu, quelles que soient les amplitudes d'impression. Ces équations résultent nécessairement de ce que, les corps étant supposés également denses dans toutes leurs parties, la résistance, et par conséquent la quantité de mouvement perdue est proportionnelle à l'amplitude d'impression.

Égalité entre le mouvem. perdu et le mouvement gagné.

450. Les valeurs $\omega = \sigma\rho dt$, et $\omega' = srdt$, des quantités de mouvement perdues par le corps choquant, sont aussi celles du mouvement gagné par le corps choqué, l'une de ces choses étant toujours égale à l'autre.

Valeur du mouvement perdu par les corps, ou de la force de percussion, aucun des deux n'ayant une dureté parfaite.

451. Les équations $\omega = \sigma\rho dt$, et $\omega' = srdt$, ou, ce qui revient au même, $\frac{1}{dt}\omega = \sigma\rho$, et $\frac{1}{dt}\omega' = sr$, ont lieu lorsque l'un des corps est supposé parfaitement dur; si les deux corps étoient compressibles, nommant Ω la différentielle de la quantité de mouvement, voici comment on trouve la valeur de $\frac{1}{dt}\Omega$. J'observe que Ω sera d'autant plus grand que $\sigma\rho$ et sr seront plus grands, et qu'ainsi $\frac{1}{dt}\Omega$ sera proportionnel à $\sigma\rho sr$ (On suppose dt constant). Mais lorsque ρ est infini, on doit avoir (449) $\Omega = srdt$, et lorsque r est infini, on a $\Omega = \sigma\rho dt$; il s'agit donc de multiplier $\sigma\rho sr$ par une quantité telle que le produit satisfasse à ces deux conditions, et cette quantité est évidemment $\frac{1}{\sigma\rho + sr}$; ainsi on aura $\frac{1}{dt}\Omega = \frac{\sigma\rho sr}{\sigma\rho + sr}$. Faisant $\frac{1}{dt}\Omega = \pi$, on a $\pi = \frac{\sigma\rho sr}{\sigma\rho + sr}$ pour l'expression de la force de percussion dans un instant quelconque.

Les différentielles des impressions sont à chaque instant réciproquement proportionnelles aux duretés.

452. Les différentielles sdx et σdz des impressions sont produites à chaque instant par la même puissance πdt qui agit également sur les deux corps; et pour produire ces impressions élémentaires, la force πdt a à vaincre les forces rdt et ρdt; ainsi les effets sdx et σdz seront d'autant plus grands que les puissances rdt et ρdt seront plus petites; et comme ces effets sont produits par la même cause πdt, ils seront en raison inverse

Digitized by Google

des obstacles rdt et ρdt qu'ils lui opposent ; on aura donc $sdx : \sigma dz :: \rho dt : rdt$; d'où on tire l'équation $srdx = \sigma\rho dz$, ou $sdx : \sigma dz :: \rho : r$.

L'espace parcouru par le corps choquant est égal à la somme des profondeurs d'impression plus l'espace parcouru par le corps choqué.

453. Puisque le corps m suit le corps μ, et qu'il se forme en eux des impressions dont les profondeurs sont x et z, l'espace e parcouru par le corps m doit être égal à l'espace ϵ parcouru par le corps μ plus la somme $x + z$ des profondeurs d'impression ; ce qui donne $e = \epsilon + x + z$.

Les deux espaces parcourus sont égaux à la fin du choc des corps élastiques.

454. Les corps parfaitement élastiques reprennent à la fin du choc la même figure qu'ils avoient avant, et par conséquent dans ce cas les profondeurs d'impression x et z s'évanouissent ; on a donc à la fin du choc des corps élastiques $e = \epsilon$.

Valeur de l'élément du temps.

455. De l'équation $e = \epsilon + x + z$, ou $e - \epsilon = x + z$, on tire $de - d\epsilon = dx + dz$; mais la propriété du mouvement varié donne $udt = de$, et $\nu dt = d\epsilon$ (24) ; on a donc $(u - \nu)\,dt = de - d\epsilon = dx + dz$, ou $dt = \frac{dx + dz}{u - \nu}$.

A l'instant de la plus grande impression, les vîtesses des corps sont égales.

456. Lorsque les impressions parviennent à leur plus grande valeur, on a $x + z = maximum$, ou $dx + dz = 0$, et l'équation $u - \nu = \frac{dx + dz}{dt}$ devient $u - \nu = 0$; ainsi, dans l'instant où s'achevent les plus grandes impressions, les vîtesses des deux corps sont égales.

Équation qui exprime le rapport des vîtesses dans un instant quelconque du choc.

457. Les forces accélératrices qui animent le corps m sont f et π, et comme π tend à retarder son mouvement, la force accélératrice résultante sera $f - \pi$; par la raison contraire, la force accélératrice de μ sera $\varphi + \pi$. On aura donc, par la propriété du mouvement varié (24), et en se rappellant que f, φ et π sont des masses multipliées par des vîtesses, $(f - \pi)\,dt = m\,du$, et $(\varphi + \pi)\,dt = \mu\,d\nu$; la somme de ces deux équations est $(f + \varphi)\,dt = m\,du + \mu\,d\nu$, et l'intégrale de l'équation somme $(f + \varphi)\,t = mu + \mu\nu + C$. Pour déterminer la constante, j'observe que lorsque $t = 0$, $u = k$, et $\nu = \varkappa$, et qu'alors l'équation se réduit à $mk + \mu\varkappa + C = 0$; d'où $C = -mk - \mu\varkappa$; ainsi l'intégrale complete est $(f + \varphi)\,t = m\,(u - k) + \mu(\nu - \varkappa)$; d'où l'on tire $\mu\,(\nu - \varkappa) = m\,(k - u) + (f + \varphi)\,t$; et enfin $\nu = \frac{(f + \varphi)\,t + mk + \mu\varkappa - mu}{\mu}$, équation qui exprime les rapports entre les vîtesses dans un instant quelconque du choc des corps élastiques ou non élastiques.

Ce que devient cette équation, à la fin du choc, lorsque les corps n'ont point d'élasticité.

458. Si les corps ne sont point élastiques, le choc cesse à l'instant où la plus grande impression s'acheve ; mais dans cet instant les vîtesses sont égales, ainsi qu'on l'a prouvé précé-

Digitized by Google

demment (456). Ainsi il faut, dans l'équation précédente, faire $u = v$, et l'on aura, pour la vîtesse commune après le choc, $u = v = \frac{(f+\varphi)t + mk + \mu x}{m+\mu}$.

459. On pourroit également déduire de l'équation

$$v = \frac{(f+\varphi)t + mk + \mu x - mu}{\mu},$$

la vîtesse des corps élastiques après le choc; mais je vais traiter la question généralement, en cherchant généralement les vîtesses particulieres du corps choquant et du corps choqué, supposés, ou non, élastiques, dans un instant quelconque du choc.

Recherche des valeurs particulieres des vîtesses de chaque corps dans un instant quelconque du choc.

Des équations $(f-\pi)dt = m\,du$, et $(\varphi+\pi)dt = \mu\,dv$ (459), on tire $du = \frac{(f-\pi)dt}{m}$, et $dv = \frac{(\varphi+\pi)dt}{\mu}$. Soustrayant la seconde équation de la premiere, on a $du - dv = \left[\frac{f-\pi}{m} - \frac{\varphi+\pi}{\mu}\right] dt$; et, multipliant chaque membre par $m\mu$,

$$m\mu(du - dv) = [\mu f - m\varphi - (m+\mu)\pi]\, dt;$$

mais on a précédemment (455), $dt = \frac{dx+dz}{u-v}$. Substituant cette valeur, l'équation précédente se change en

$$m\mu(u-v)(du-dv) = [\mu f - m\varphi - (m+\mu)\pi](dx+dz).$$

Substituant encore dans cette derniere équation la valeur de $\pi = \frac{\sigma\rho sr}{\sigma\rho + sr}$, et celle de $dx = \frac{\sigma\rho dz}{sr}$, tirée de l'équation $srdx = \sigma\rho dt$, trouvée précédemment (452), on a

$$\begin{aligned} m\mu(u-v)(du-dv) &= \left[\mu f - m\varphi - (m+\mu)\tfrac{\sigma\rho sr}{\sigma\rho+sr}\right]\left(\tfrac{\sigma\rho dz}{sr} + dz\right) \\ &= \left[\mu f - m\varphi - (m+\mu)\tfrac{\sigma\rho sr}{\sigma\rho+sr}\right]\tfrac{\sigma\rho+sr}{sr}\,dz = (\mu f - m\varphi)\tfrac{\sigma\rho+sr}{sr}\,dz \\ &\quad - (m+\mu)\,\sigma\rho\,dz. \end{aligned}$$

L'intégrale de cette équation est $\frac{1}{2}m\mu\left[(u-v)^2 - (k-x)^2\right] = (\mu f - m\varphi)\int\frac{\sigma\rho+sr}{sr}dz - (m+\mu)\int\sigma\rho\,dz$; mais $\int\frac{\sigma\rho+sr}{sr}dz = x+z$; car $\frac{\sigma\rho+sr}{sr}dz = \frac{\sigma\rho dz}{sr} + dz = dx + dz$, puisqu'on a eu précédemment (452) $dx = \frac{\sigma\rho dz}{sr}$. Substituant donc cette valeur, on a

$$\tfrac{1}{2}m\mu\left[(u-v)^2 - (k-x)^2\right] = (\mu f - m\varphi)(x+z) - (m+\mu)\int\sigma\rho\,dz.$$

Digitized by Google

Si, de l'équation précédente, on tire la valeur de $u - v$, on aura

$$u - v = \pm \left[(k - x)^2 + \frac{(\mu f - m\theta)(x+z)}{\frac{1}{2}m\mu} - \frac{(m+\mu)\int\theta\,dz}{\frac{1}{2}m\mu}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Le signe positif a lieu avant l'instant de la plus grande impression, et le signe négatif après cet instant; car, à l'instant de la plus grande impression, on a $u = v$; et après cet instant, le rétablissement des parties comprimées accélérant le mouvement de μ, et retardant celui de m, rend par conséquent u plus petit que v.

On a trouvé (457) $v = \frac{(f+\theta)t + mk + \mu x - mu}{\mu}$; substituant cette valeur dans l'équation précédente, on aura

$$\frac{(m+\mu)u - mk - \mu x - (f+\theta)t}{\mu} = \pm \left[(k-x)^2 + \frac{(\mu f - m\theta)(x+z)}{\frac{1}{2}m\mu} - \frac{(m+\mu)\int\theta\,dz}{\frac{1}{2}m\mu}\right]^{\frac{1}{2}};$$

d'où l'on tire

Équations qui donnent ces vitesses.

$$u = \frac{mk + \mu x + (f+\theta)t}{m+\mu} \pm \frac{\mu}{m+\mu}\left[(k-x)^2 + \frac{(\mu f - m\theta)(x+z)}{\frac{1}{2}m\mu} - \frac{(m+\mu)\int\theta\,dz}{\frac{1}{2}m\mu}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

On trouvera par un procédé semblable

$$v = \frac{mk + \mu x + (f+\theta)t}{m+\mu} \mp \frac{m}{m+\mu}\left[(k-x)^2 + \frac{(\mu f - m\theta)(x+z)}{\frac{1}{2}m\mu} - \frac{(m+\mu)\int\theta\,dz}{\frac{1}{2}m\mu}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Règle pour les signes dans l'usage de ces équations.

Le signe supérieur, dans ces deux équations, sert avant l'instant de la plus grande impression, et le signe inférieur après cet instant. Ainsi, au moment de la plus grande impression, la quantité affectée du double signe s'évanouit, puisque c'est alors qu'elle devient, de positive, négative, ou, de négative, positive.

Ces valeurs de u et v désignent la vîtesse des corps choquants et choqués dans un instant quelconque du choc, soit que ces corps soient élastiques ou qu'ils ne le soient pas.

Application de ces équations aux corps mous.

460. Dans les corps sans élasticité, les valeurs de u et v se réduisent, après le choc, à la valeur commune $\frac{mk + \mu x + (f+\theta)t}{m+\mu}$, qui est celle trouvée précédemment (458). En effet, le choc de ces corps finissant à l'instant de la plus grande impression, et à ce même instant toute la quantité qui est après le double signe s'évanouissant, elle ne doit point entrer en compte dans l'évaluation de la vîtesse.

Application aux corps parfaitement élastiques.

461. Les corps parfaitement élastiques se rétablissant dans leur premier état à la fin du choc, on a, pour cet instant, x, z,

Digitized by Google

x, z, et $f\sigma\rho dz$, égaux à zéro, et ainsi les valeurs de u et v deviennent

$$u = \frac{mk + \mu x + (f+\varphi)t}{m+\mu} - \frac{\mu}{m+\mu}(k-x) = \frac{(m-\mu)k + 2\mu x + (f+\varphi)t}{m+\mu},$$

$$\text{et } v = \frac{mk + \mu x + (f+\varphi)t}{m+\mu} + \frac{m}{m+\mu}(k-x) = \frac{(\mu-m)x + 2mk + (f+\varphi)t}{m+\mu}.$$

Conservation des forces dans le choc des corps élastiques.

On peut aisément déduire de ces valeurs de u et v, en supposant $f + \varphi = 0$, celles de $mu^2 + \mu v^2$, et on trouvera, en effectuant le calcul, $mu^2 + \mu v^2 = mk^2 + \mu x^2$; c'est ce qu'on appelle *la conservation des forces vives.*

Application aux corps imparfaitement élastiques.

462. Si les corps n'étoient pas parfaitement élastiques, alors ils ne se rétabliroient pas entièrement dans leur premier état, et à la fin du choc il resteroit encore une impression; ainsi pour trouver la vîtesse finale de ces sortes de corps, il faudroit substituer pour t, x, z, σ et ρ, les valeurs convenables; x, z, σ et ρ, peuvent se déterminer par l'expérience et le calcul, ainsi qu'on le verra; mais la valeur de t paroîtra plus difficile à apprécier. Cette valeur n'est cependant point incalculable, comme on le verra bientôt; mais j'observerai d'avance que, toutes les fois que f et φ ne seront pas extrêmement grands, ou ne seront que des modifications de la pesanteur, la valeur de t étant prodigieusement petite, la quantité $(f+\varphi)t$ pourra être négligée sans erreur sensible. Cette quantité n'entre dans les formules précédentes que pour leur donner toute l'étendue et la rigueur possible, et ne négliger aucune des circonstances physiques du mouvement.

Valeur de la vitesse des corps à la fin du choc.

463. En négligeant $(f+\varphi)t$ dans l'expression de la vîtesse finale des corps, on a, pour les corps sans élasticité, $u = \frac{mk + \mu x}{m+\mu}$, qui est la valeur trouvée art. (39), et, pour les corps parfaitement élastiques, $u = \frac{(m-\mu)k + 2\mu x}{m+\mu}$, et $v = \frac{(\mu-m)x + 2mk}{m+\mu}$. Ce sont les valeurs des vîtesses finales que donnent les traités élémentaires de mécanique, parcequ'on y fait abstraction de la durée du choc, et de l'effet produit, pendant ce temps, par les forces accélératrices qui animent les corps.

Valeur, pour un instant quelconque du choc, de l'impression qui se fait dans le corps choqué, en supposant la dureté constante.

464. Si, dans l'équation

$$\tfrac{1}{2}m\mu[(u-v)^2 - (k-x)^2] = (\mu f - m\varphi)(x+z) - (m+\mu)f\sigma\rho dz,$$

trouvée précédemment (459), on suppose la dureté ρ constante, et qu'on en tire la valeur de $f\sigma dz$, on aura

$$f\sigma dz = \frac{\frac{1}{2}m\mu[(k-x)^2 - (u-v)^2] + (\mu f - m\varphi)(x+z)}{\rho(m+\mu)}.$$

Digitized by Google

Or σdz étant l'élément de l'impression, $\int \sigma dz$ sera l'impression totale dont l'équation précédente donne la valeur pour un instant quelconque du choc, la dureté étant constante.

Ce que devient cette valeur à la fin du choc.

Faisant, dans cette équation, $u = v$, on aura la valeur de $\int \sigma dz$, qui répond à l'instant de la plus grande impression; ce qui donne

$$\int \sigma dz = \frac{\frac{1}{2} m\mu (k-s)^2 + (\mu f - m\varphi)(x+z)}{\rho (m+\mu)}.$$

Ce qu'elle devient quand le corps choqué est immobile.

465. Lorsque le corps choqué est immobile, il n'y a qu'à supposer $\mu = \infty$, $\varkappa = 0$, et $\varphi = 0$, l'équation précédente deviendra $\int \sigma dz = \frac{\frac{1}{2} mk^2 + f(x+z)}{\rho}$.

L'impression qui se fait dans le corps choqué est sensiblement proportionnelle aux quarrés des vitesses.

466. f étant la quantité de mouvement que la force accélératrice peut procurer au corps m dans l'unité de temps, si on suppose que f est la pesanteur, qu'on prenne la seconde pour unité de temps, et le pied-de-roi pour unité de mesure, on aura $f = 30{,}196\, m$, et l'équation précédente deviendra

$$\int \sigma dz = \frac{\frac{1}{2} mk^2 + 30{,}196\, m\,(x+z)}{\rho} = \frac{m}{\rho}\left[\tfrac{1}{2}k^2 + 30{,}196\,(x+z)\right].$$

Nommant h la hauteur due à la vîtesse k, on aura $k^2 = 60{,}39\, h$, et $\int \sigma dz = \frac{30{,}196\, m}{\rho}(h + x + z)$.

Lorsque $x + z$ sera très petit par rapport à k^2, ou par rapport à h, ce qui arrive communément, même dans les corps qui n'ont pas une grande dureté, la valeur de $\int \sigma dz$ sera sensiblement proportionnelle à k^2 ou à h, et ainsi les impressions seront comme les quarrés des vîtesses ou les hauteurs des chûtes. Ceci sera encore plus vrai lorsqu'on aura

$$x = 0, \text{ et } \int \sigma dz = \frac{m}{\rho}\left(\tfrac{1}{2}k^2 + 30{,}196\, z\right) = \frac{30{,}196\, m}{\rho}(h + z);$$

ce qui nous apprend que lorsqu'un corps dur tombe sur un autre corps immobile, l'impression qui se fait dans le dernier est en raison inverse de sa dureté, et en raison directe composée du quarré de la vîtesse ou de la hauteur de la chûte et de la masse du corps choquant.

Valeur que peut avoir l'impression lorsqu'il y a une vitesse initiale, ou qu'il n'y en a pas.

On voit par l'équation $\int \sigma dz = \frac{m}{\rho}\left(\frac{1}{2}k^2 + 30{,}196\, z\right)$, que, quelque petite que soit la vîtesse initiale k, pourvu qu'elle soit une quantité finie, il y aura toujours une impression, à moins que ρ ne soit infini. Il n'en sera pas de même si $k = 0$; car il en résultera $\int \sigma dz = \frac{30{,}196\, mz}{\rho}$, ou $\frac{\int \sigma dz}{z} = \frac{30{,}196\, m}{\rho} = \frac{f}{\rho}$; lorsque $\int \sigma dz$ sera $= 0$, la profondeur d'impression z le sera aussi, et l'équa-

Digitized by Google

tion deviendra $\frac{0}{0} = \frac{30,196\,m}{\rho} = \frac{f}{\rho}$; mais $\frac{0}{0}$ étant égal à ce qu'on veut, l'impression pourra conséquemment être nulle, m, f et ρ étant des quantités quelconques.

On voit en effet, *à priori*, que f et ρ, étant des quantités de même nature, dont l'effet est une pression, peuvent s'anéantir au premier instant, et qu'il n'en est pas de même à l'égard de k, qui, occasionnant un choc, ne peut être détruite qu'après avoir produit une impression.

467. Ces formules sont pa faitement d'accord avec l'expérience ; pour s'en convaincre, il ne faut que consulter les ouvrages des auteurs qui ont écrit sur la physique expérimentale. Le docteur s' Gravesande, dans le premier volume de son ouvrage, intitulé, *Physices elementa mathematica*, décrit (§. 833) une machine pour faire tomber avec précision différentes spheres de cuivre sur de l'argille. Dans la troisieme expérience, il en fait tomber trois de même diametre, mais d'un poids différent, en ayant fait deux creuses ; leurs poids étoient entre elles comme 1, 2, 3 ; la hauteur de la chûte de ces trois spheres étoit de 9 pouces, et les impressions qu'elles firent se trouverent aussi comme 1, 2, 3 ; dans la dixieme expérience (§. 855), il fit tomber les deux plus pesantes de 18 pouces de hauteur, et trouva que leurs impressions étoient comme 4 à 6, c'est-à-dire doubles des premieres. On voit par-là qu'en effet les impressions sont en raison composée des poids ou masses, et des hauteurs dont ils tombent, ou en raison composée des poids ou masses, et des quarrés des vîtesses primitives.

Expériences qui confirment la théorie précédente.

On peut voir encore d'autres expériences rapportées dans le mémoire de M. Perronet, sur les pieux et les pilotis. *OEuvres de M. Perronet*, tom. I, pag. 99 et 100, édition *in-folio*, chez Didot fils aîné.

Si les deux masses qui se choquent étoient égales, et que, dans le choc, elles ne fussent animées par aucune puissance, on auroit $m = \mu$, $f = 0$, $\varphi = 0$, et $\int \sigma dz = \frac{m(k-x)^2}{4\rho}$; et lorsque $x = 0$, $\int \sigma dz = \frac{mk^2}{4\rho}$. Ce théorême est encore confirmé par plusieurs autres expériences que le docteur s' Gravesande expose dans l'endroit cité.

Valeur de l'impression dans le cas où les masses qui se choquent sont égales et animées de vîtesses constantes.

468. Puisque l'expérience s'accorde avec les formules, non seulement dans le cas des corps mous, comme l'argille, mais encore dans celui des corps durs et élastiques, lorsque la dureté ρ est supposée constante ; il est évident que, dans ces cas, la dureté

La dureté peut être supposée sensiblement constante, et le sera dans la suite des calculs.

a été au moins sensiblement constante, et qu'on peut la supposer telle; ce que nous ferons dorénavant.

469. La même équation qui donne la valeur de $\int \sigma dz$ donnera aussi celle de z toutes les fois que σ aura les conditions nécessaires pour que la fonction σdz soit intégrable.

Équations qui donnent la valeur de la dureté pendant que l'impression se forme, et à l'instant de la plus grande impression.

470. D'après l'hypothese de la dureté constante, l'équation

$$\tfrac{1}{2} m\mu[(u-v)^2-(k-x)^2] = (\mu f - m\varphi)(x+z) - (m+\mu)\int \sigma \rho dz,$$

deviendra

$$\tfrac{1}{2} m\mu[(u-v)^2-(k-x)^2] = (\mu f - m\varphi)(x+z) - \rho(m+\mu)\int \sigma dz;$$

d'où l'on tirera

$$\rho = \frac{\frac{1}{2} m\mu[(k-x)^2-(u-v)^2] + (\mu f - m\varphi)(x+z)}{(m+\mu)\int \sigma dz};$$

et, dans le cas de la plus grande impression,

$$\rho = \frac{\frac{1}{2} m\mu(k-x)^2 + (\mu f - m\varphi)(x+z)}{(m+\mu)\int \sigma dz}.$$

Cette valeur seroit la même étant déduite de l'une ou l'autre équation.

Quoique la premiere de ces deux équations renferme des variables, et que la seconde n'en contienne point, néanmoins elles doivent toujours donner sensiblement le même résultat, en substituant les valeurs de u, v, x, z, et $\int \sigma dz$, convenables à un instant quelconque du choc. Cette identité résulte de l'hypothese confirmée par l'expérience que la dureté est constante.

Formule qui donne le rapport de la dureté à la pesanteur, dans le cas où le corps choqué est immobile.

471. Si, dans la valeur précédente de ρ, on suppose le corps choqué immobile, ou $\mu = \infty$, et $x = 0$, cette valeur deviendra $\rho = \frac{\frac{1}{2} mk^2 + f(x+z)}{\int \sigma dz}$. Nommant h la hauteur due à la vîtesse k, on aura $k^2 = 60,39\,h$. Substituant cette valeur de k^2, il en résulte $\rho = \frac{30,196\,mh + f(x+z)}{\int \sigma dz}$, et si le corps m tombe verticalement, on aura $f = 30,196\,m$; ce qui donne $\rho = \frac{30,196\,m(h+x+z)}{\int \sigma dz} = \frac{f(h+x+z)}{\int \sigma dz}$: ainsi la dureté ρ sera à la gravité f comme $h+x+z$ est à $\int \sigma dz$, ou comme 1 est à $\frac{\int \sigma dz}{h+x+z}$. Il ne faut pas perdre de vue que ceci n'est pas le rapport de ces puissances considérées dans leur nature, mais seulement le rapport des effets qu'elles peuvent produire, et que f est le produit d'une masse par une vîtesse.

472. Après avoir trouvé la valeur de ρ, on aura celle de r au moyen de l'équation $srdx = \sigma \rho dz$, qui donne $r\int s dx = \rho \int \sigma dz$; d'où $r = \rho \frac{\int \sigma dz}{\int s dx}$.

Digitized by Google

473. Ces formules peuvent être d'un grand usage pour comparer les duretés des différents corps. On a formé différentes tables des pesanteurs spécifiques; mais il manque à la physique une table qui contienne les rapports des duretés: l'architecture des ponts et des voûtes en général en retireroit un grand avantage.

Usage de cette formule pour faire une table des duretés.

474. On peut prendre pour exemple d'une de ces expériences la premiere de s' Gravesande rapportée ci-dessus; la sphere de cuivre la moins pesante, tombant de neuf pouces de haut sur de l'argille, fit une impression dont le diametre avoit $\frac{65}{1000}$ de pied; le diametre de la sphere étoit de $\frac{1}{8}$ de pied.

Application de cette formule à une expérience de s' Gravesande.

Si l'on nomme c la circonférence dont le diametre $= 1$, $2y$ le diametre de l'impression, z étant la fleche ou profondeur de l'impression, on aura, par la propriété du cercle, le rayon de la sphere étant $= a$, $z = a - (aa - yy)^{\frac{1}{2}}$; ce qui, en substituant pour a sa valeur $\frac{1}{16}$, et pour y sa valeur $\frac{65}{1000}$, donne $z = 0{,}015$.

D'un autre côté, par la propriété de la sphere, la valeur de l'impression ou du segment sphérique, formé dans l'argille par la chûte du globe de cuivre, est $= cz^2(a - \frac{1}{3}z)$, et la solidité de la sphere est $= \frac{4ca^3}{3}$. On aura donc $\frac{4ca^3}{3} = 0{,}0010227$, dont prenant le tiers, à cause que la sphere étoit vuide aux deux tiers, on aura $m = 0{,}0003409$, et $\int \sigma dz = cz^2(a - \frac{1}{3}z) = 0{,}0000406$. On a de plus $h = 0{,}75$, et $x = 0$.

Substituant ces valeurs dans la formule $\rho = \frac{30{,}196\, m(h+x+z)}{\int \sigma dz}$, on aura $\rho = \frac{30{,}196 \,.\, 0{,}0003409 \,.\, 0{,}765}{0{,}0000406} = 193{,}3$.

On a supposé, dans tout le calcul précédent, que l'unité de mesure étoit le pied françois. En calculant d'après les deux autres expériences, on trouveroit, à très peu de chose près, le même résultat; ce qui se voit d'avance: car, les impressions croissant dans la raison des masses, le multiplicateur m et le diviseur $\int \sigma dz$ de la valeur de ρ sont toujours en même rapport; il n'y a donc que la variation de z qui pourroit changer quelque chose; mais cette variation n'étant pas grande, et z lui-même étant fort petit par rapport à h, la valeur de ρ restera sensiblement la même, ainsi que cela doit être, puisque c'est le même corps qui est soumis à l'expérience.

On a fait m égal au volume de la sphere, parceque, dans les corps de même matiere, les volumes sont comme les poids; mais si les spheres avoient été de différente matiere, on n'auroit

Digitized by Google

obtenu une valeur constante pour ρ qu'en faisant m égal au volume multiplié par la pesanteur spécifique.

La plus grande force de percussion a lieu à l'instant où s'achève l'impression totale.

475. A l'instant de la plus grande impression, la différentielle de π, ou de son égale $\frac{\sigma\rho sr}{\sigma\rho+sr}$, est égale à zéro, c'est-à-dire que $\frac{r\rho(sd\sigma+\sigma ds)(\sigma\rho+sr)-sr\sigma\rho(\rho d\sigma+rds)}{(\sigma\rho+sr)^2}=0$. En faisant les multiplications indiquées, supprimant les quantités qui se détruisent, et divisant par $\frac{r\rho}{(\sigma\rho+sr)^2}$, on a $\rho\sigma^2 ds+rs^2 d\sigma=0$; mais cette quantité ne peut être zéro que les différentielles ds et $d\sigma$ ne soient aussi zéro, c'est-à-dire sans que les amplitudes s et σ, et par conséquent les impressions, n'aient reçu toute l'augmentation qu'elles peuvent avoir. Donc la plus grande force de percussion est celle qui agit au moment où s'achève l'impression totale.

Transformation de la valeur précédemment donnée pour la force de percussion.

476. La force de percussion, dans un instant quelconque du choc, est $\pi=\frac{\sigma\rho sr}{\sigma\rho+sr}$; substituant dans cette équation la valeur de $r=\rho\frac{\int\sigma dz}{\int sdx}=\rho\frac{j}{I}$; en faisant $\int sdx=I$, et $\int\sigma dz=j$, on aura $\pi=\frac{\rho^2 s\sigma j}{I(\sigma\rho+s\rho\frac{j}{I})}=\frac{\rho s\sigma j}{\sigma I+sj}$. Substituant maintenant dans cette équation la valeur trouvée ci-dessus (470) pour

$$\rho=\frac{\frac{1}{2}m\mu(k-x)^2+(\mu f-m\phi)(x+z)}{j(m+\mu)},\text{ on aura}$$

$$\pi=\frac{s\sigma}{\sigma I+sj}\cdot\frac{\frac{1}{2}m\mu(k-x)^2+(\mu f-m\phi)(x+z)}{m+\mu}.$$

Il ne faut pas perdre de vue que, quoiqu'on ait substitué la valeur de ρ qui convient à la plus grande impression, cependant, comme la dureté est constante, la valeur de π n'en convient pas moins à tous les instants du choc. Comme x et z viennent de la substitution de ρ, ils seront constants et exprimeront les plus grandes profondeurs d'impression: ainsi il n'y aura de variable dans la valeur de π que s et σ.

Ce que devient cette valeur quand le corps choqué est immobile.

477. Lorsque le corps choqué est immobile, on a $\mu=\infty$; $x=0$, et $\varphi=0$. Si on suppose de plus que le corps choquant soit assez dur pour ne recevoir aucune impression, on aura $I=0$ et $x=0$, et, dans ce cas, la valeur de π devient

$$\pi=\frac{\sigma}{j}(\tfrac{1}{2}mk^2+fz).$$

Formule qui donne le rapport de la force de percussion à la gravité.

478. h étant la hauteur due à la vîtesse k, on a $k^2=60,39\,h$; de plus, f étant la gravité, on a $f=30,196\,m$, et la valeur de π se change en $\pi=\frac{\sigma}{j}[(30,196\,m)(h+z)]=\frac{30,196\,\sigma m}{j}(h+z)$;

Digitized by Google

d'où l'on déduit la proportion $\pi : f :: \frac{30,196\,m\sigma}{j}(h+z) : 30,196\,m :: \frac{\sigma}{j}(h+z) : 1$. C'est le rapport de la percussion à la gravité.

479. Dans l'expérience de s' Gravesande, à laquelle on a appliqué ci-dessus la formule $\rho = \frac{30,196\,m}{fods}(h+x+z)$, on a trouvé $j = 0,0000406$, $h+z = 0,765$, $x = 0$. Le diametre de l'impression étant $= \frac{65}{800}$, et le cercle, dont le diametre est l'unité, étant $= 3,14159$, on aura $\sigma = 3,14159\,(\frac{65}{1600})^2$. Substituant ces valeurs, il en résulte

Application de cette formule à une expérience de s' Gravesande.

$$\frac{\sigma}{j}(h+z) = \frac{3,14159 \cdot (\frac{65}{1600})^2 \cdot 0,765}{0,0000406} = 97,362;$$

d'où il résulte que l'expression $\frac{\sigma}{j}(h+x) = 97,362$, et qu'ainsi la proportion précédente devient $\pi : f :: 97,362 : 1$, c'est-à-dire que la sphere de cuivre tombant sur un corps mou, comme de l'argille, la plus grande force de percussion qui a eu lieu à l'instant de la plus grande impression étoit égale à 97 fois la gravité.

480. En conservant toujours l'immobilité du corps choqué, si le corps choquant est susceptible d'impression, l'équation qui donnera la valeur de la force de percussion sera

Percussion lorsque le corps choquant est susceptible d'impression.

$$\pi = 30,16\,m\,\frac{s\sigma}{\sigma I + sj}(h+x+z),$$

et l'on aura

$$f : \pi :: 1 : \frac{s\sigma}{\sigma I + sj}(h+x+z).$$

481. Si le corps choqué est immobile, et qu'on ait à-peu-près $s = \sigma$, $I = j$, et $x = z$, on aura $\pi = \frac{\sigma}{2j}(\frac{1}{2}mk^2 + 2fz)$; et lorsque f sera la gravité, $\pi = \frac{30,196\,m\sigma}{2j}(h+2z)$, et, dans ce cas, la percussion sera à la gravité comme $\frac{\sigma}{2j}(h+2z)$ est à 1.

Le même cas, en supposant de plus que le corps choqué est immobile.

482. Lorsque deux corps très durs, comme sont deux corps de fer, viennent à se choquer, l'impression j qui se fait dans chacun est presque infiniment petite par rapport à $\frac{1}{2}\sigma(h+2z)$; donc, dans ce cas, la force de percussion est presque infinie à l'égard de la gravité. Prenons pour exemple le coup de marteau sur une enclume; puisque j représente la grandeur de l'impression, qui doit être comme le produit de σ, par une quantité proportionnelle à sa profondeur, qu'on sait par

Application des formules de percussion au choc d'un marteau sur une enclume.

l'expérience être extrêmement petite, on pourra supposer $j = \sigma \frac{1}{\omega}$, ω exprimant un nombre quelconque tel que $\frac{1}{\omega}$ soit encore moindre que la profondeur de l'impression, supposée moins étendue dans le fond qu'à la surface. Cette profondeur, lorsqu'elle est la plus grande, ne peut guere être que de $\frac{1}{15000}$, ou $\frac{1}{12000}$ de pied. Substituant pour j sa valeur $\sigma \frac{1}{\omega}$, la force de gravité sera à celle de percussion, comme $1 : \frac{\sigma}{2 \cdot \frac{\sigma}{\omega}} (h + 2z)$, ou comme $1 : \frac{\omega}{2} (h + 2z)$, ou enfin, en négligeant $2z$ à cause de son extrême petitesse, comme $1 : \frac{1}{2} \omega h$. Maintenant si la vîtesse du marteau est équivalente à celle qu'il prendroit en tombant de 10 pieds, on aura $h = 10$, et faisant seulement $\omega = 12000$, il en résultera $\frac{1}{2} \omega h = 60000$, et la pesanteur du marteau sera à la force de percussion du même marteau, comme $1 : 60000$. Ainsi l'effet du marteau équivaudra à celui que pourroit causer, sur le même point où s'est donné le coup de marteau, un poids 60000 fois aussi grand que celui du marteau. Ceci suffit pour n'être pas étonné de l'effet prodigieux de la force de percussion.

Détermination de la durée du choc.

483. La détermination de la durée du choc étant un objet trop intéressant pour en priver les lecteurs, on va entrer dans quelques détails à son sujet.

On a trouvé ci-dessus (455) l'équation $dt = \frac{dx + dz}{u - v}$, et (459) l'équation $u - v = \pm \left[(k - x)^2 + \frac{(\mu f - m\theta)(x + z)}{\frac{1}{2} m\mu} - \frac{(m + \mu) \int \sigma dz}{\frac{1}{2} m\mu}\right]^{\frac{1}{2}}$. Si l'on substitue dans la premiere équation la valeur de $u - v$, tirée de la seconde, on aura

$$dt = \frac{dx + dz}{\pm \left[(k - x)^2 + \frac{(\mu f - m\theta)(x + z) - (m + \mu) \int \sigma dz}{\frac{1}{2} m\mu}\right]^{\frac{1}{2}}};$$

qu'on fasse $\frac{(m + \mu) t}{\frac{1}{2} m\mu} = \epsilon$, $(k - x)^2 = \gamma$, $\frac{\mu f - m\theta}{\frac{1}{2} m\mu} = \delta$, l'équation précédente deviendra $dt = \frac{dx + dz}{\pm (\gamma + \delta (x + z) - \epsilon \int \sigma dz)^{\frac{1}{2}}}$, équation dont l'intégration dépend de la valeur de σ et de la relation de x et z.

On peut d'abord supposer $x = 0$ et $dx = 0$, et l'équation deviendra $dt = \frac{dz}{\pm (\gamma + \delta z - \epsilon \int \sigma dz)^{\frac{1}{2}}}$. On peut aussi supposer $x = z$, et l'équation deviendra $dt = \frac{2 dz}{\pm (\gamma + 2\delta z - \epsilon \int \sigma dz)^{\frac{1}{2}}}$.

Il est évident qu'en intégrant, dans cette seconde hypothese seulement,

Digitized by Google

seulement, on en déduira aisément la valeur de t dans la premiere hypothese; il ne s'agira que de prendre la moitié du terme que contiendra $\int$, et après cela de prendre la moitié de toute la valeur de t.

La valeur de σ dépend de la figure, de la disposition, et de la dureté réciproque des deux corps choqués. Pour cela, on peut supposer $\int \sigma dz$ égal à une fonction quelconque de z avec des constantes; car, quoiqu'il ne soit pas possible que cette supposition convienne à tous les corps, il s'en trouvera toujours quelques uns auxquels elle conviendra.

Supposons $\int \sigma dz = Qz^2$, Q étant une quantité constante, on aura

$$dt = \frac{2dz}{\pm(\gamma + 2\delta z - cQz^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\frac{2}{\sqrt{cQ}}\,dz}{\pm\left(\frac{\gamma}{cQ} + \frac{2\delta z}{cQ} - z^2\right)^{\frac{1}{2}}};$$

ajoutant et retranchant du dénominateur la quantité $\frac{\delta^2}{c^2Q^2}$, on a

$$dt = \frac{\frac{2}{\sqrt{cQ}}\,dz}{\pm\left(\frac{\gamma}{cQ} + \frac{\delta^2}{c^2Q^2} - \frac{\delta^2}{c^2Q^2} + \frac{2\delta z}{cQ} - z^2\right)^{\frac{1}{2}}},$$

dans laquelle les trois derniers termes du dénominateur du second membre forment un quarré parfait, en changeant tous les signes, et affectant la totalité des trois termes du signe négatif. Faisant $\frac{\gamma}{cQ} + \frac{\delta^2}{c^2Q^2} = R^2$, et multipliant et divisant par R, on a

$$dt = \frac{2}{R\sqrt{cQ}} \cdot \frac{Rdz}{\pm\left[R^2 - \left(z - \frac{\delta}{cQ}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}} = \frac{2}{\sqrt{cQ}} \cdot \frac{\frac{dz}{R}}{\pm\left[1 - \left(\frac{z}{R} - \frac{\delta}{RcQ}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}}.$$

On sait que x étant un arc de cercle dont le rayon est l'unité, s son sinus, on a généralement $dx = \frac{ds}{(1-s^2)^{\frac{1}{2}}}$, et que l'élément du supplément de x est égal à $\frac{ds}{-(1-s^2)^{\frac{1}{2}}}$. D'après cela l'équation

$dt = \frac{2}{\sqrt{cQ}} \cdot \frac{\frac{dz}{R}}{\pm\left[1 - \left(\frac{z}{R} - \frac{\delta}{RcQ}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}}$ exprimera le produit de $\frac{2}{\sqrt{cQ}}$ par l'élément d'un arc de cercle dont le rayon $= 1$, et dont le sinus est égal à $\frac{z}{R} - \frac{\delta}{RcQ}$, ou par l'élément du supplément de cet arc, selon que le dénominateur du second membre aura le signe positif ou négatif. Ainsi l'intégrale de cette équation est

$$t = \frac{2}{\sqrt{cQ}} \text{ arc sin.}\left(\frac{z}{R} - \frac{\delta}{RcQ}\right) \pm M.$$

Pour déterminer la constante M, il faut remarquer que lorsque $t = 0$, la profondeur d'impression z est aussi zéro ; on aura donc, dans ce cas, en observant que les sinus négatifs répondent à des arcs négatifs,

$$\frac{-2}{\sqrt{\epsilon Q}} \text{ arc sin. } \frac{\delta}{R\epsilon Q} + M = 0, \text{ ou } M = \frac{2}{\sqrt{\epsilon Q}} \text{ arc sin. } \frac{\delta}{R\epsilon Q}.$$

Ainsi la valeur de t est

$$t = \frac{1}{\frac{1}{2}\sqrt{\epsilon Q}} \left[\text{arc sin.} \left(\frac{z}{R} - \frac{\delta}{R\epsilon Q}\right) + \text{arc sin.} \frac{\delta}{R\epsilon Q}\right].$$

Substituant pour ϵ, γ et δ, leurs valeurs $\frac{(m+\mu)\rho}{\frac{1}{2}m\mu}$, $(k - v)^2$ et $\frac{(\mu f - m\phi)}{\frac{1}{2}m\mu}$, on aura

$$t = \left(\frac{2m\mu}{Q\rho(m+\mu)}\right)^{\frac{1}{2}} \left[\text{arc sin.} \left(\frac{z}{R} - \frac{\mu f - m\phi}{RQ\rho(m+\mu)}\right) + \text{arc sin.} \frac{\mu f - m\phi}{RQ\rho(m+\mu)}\right].$$

Cette intégrale est dérivée de l'équation

$$dt = \frac{1}{\frac{1}{2}\sqrt{\epsilon Q}} \cdot \frac{\frac{dz}{R}}{\pm\left[1 - \left(\frac{z}{R} - \frac{\delta}{R\epsilon Q}\right)\right]^{\frac{1}{2}}},$$

en donnant le signe + au dénominateur du second membre, et alors elle exprime le temps écoulé depuis le commencement du choc jusqu'à la plus grande impression : on en a vu la raison (459) lorsqu'il s'est agi de chercher les vîtesses des deux corps dans un instant quelconque du choc. Pour avoir le temps qui s'écoule depuis le commencement du choc jusqu'à un des instants qui suit la plus grande impression, il faut substituer à arc $\sin.\left(\frac{z}{R} - \frac{\mu f - m\phi}{RQ\rho(m+\mu)}\right)$ le supplément de cet arc, qui, en nommant C la demi-circonférence, sera $C - \text{arc sin.}\left(\frac{z}{R} - \frac{\mu f - m\phi}{QR\rho(m+\mu)}\right)$, et l'on aura l'équation

$$t = \left(\frac{2m\mu}{Q\rho(m+\mu)}\right)^{\frac{1}{2}} \left[C - \text{arc sin.}\left(\frac{z}{R} - \frac{\mu f - m\phi}{QR\rho(m+\mu)}\right) + \text{arc sin.} \frac{\mu f - m\phi}{QR\rho(m+\mu)}\right].$$

Les deux expressions du temps doivent être égales lors de la plus grande impression. On a donc pour cet instant

$$\frac{1}{2}C = \text{arc sin.}\left(\frac{z}{R} - \frac{\mu f - m\phi}{QR\rho(m+\mu)}\right).$$

Substituant cette valeur dans l'une quelconque des deux expressions, on a, pour le temps écoulé depuis le commencement du choc jusqu'à l'instant de la plus grande impression,

$$t = \left(\frac{2m\mu}{Q\rho(m+\mu)}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}C + \text{arc sin.} \frac{\mu f - m\phi}{QR\rho(m+\mu)}\right).$$

Dans les corps parfaitement élastiques, l'impression diminue

Digitized by Google

au point que z devient $= 0$; donc, en substituant cette valeur de z dans la seconde équation du temps, on aura pour l'expression de toute la durée du choc, lorsque les corps sont parfaitement élastiques,

$$t = \left(\frac{2m\mu}{Q_f(m-\mu)}\right)^{\frac{1}{2}}\left(C + 2\,\text{arc sin.}\,\frac{\mu f - m\phi}{QR_f(m+\mu)}\right).$$

On voit que ce temps est double de celui qui s'écoule depuis le commencement du choc jusqu'à la plus grande impression.

Dans les corps qui n'ont aucune élasticité, la durée totale du choc est égale au temps qui s'écoule depuis le commencement du choc jusqu'à l'instant de la plus grande impression.

Si les corps n'étoient animés par aucune puissance, on auroit $f = 0$ et $\phi = 0$; alors le temps de la durée totale du choc seroit, pour les corps sans élasticité, $t = \frac{1}{2}\left(\frac{2m\mu}{Q_f(m+\mu)}\right)^{\frac{1}{2}} C$, et, pour les corps élastiques, $t = \left(\frac{2m\mu}{Q_f(m+\mu)}\right)^{\frac{1}{2}} C$.

La quantité R, qui contient les vîtesses initiales, n'entrant dans aucune de ces deux expressions, on voit que, lorsqu'aucune puissance n'anime les corps, le temps de la durée du choc est toujours le même, quelles que soient les vîtesses initiales. La valeur de R est, comme on a vu,

$$= \left(\frac{\gamma}{cQ} + \frac{\delta^2}{c^2Q^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{\frac{1}{2}m\mu(k-x)^2}{Q_f(m+\mu)} + \left(\frac{\mu f - m\phi}{Q_f(m+\mu)}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Si on avoit $k = 0$ et $x = 0$, c'est-à-dire que les corps ne fussent animés que par des puissances, la valeur de R deviendroit $= \frac{\mu f - m\phi}{Q_f(m+\mu)}$. Substituant cette valeur dans l'expression totale du temps, on a, pour les corps non élastiques,

$$t = \left(\frac{2m\mu}{Q_f(m+\mu)}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{2}C + \text{arc sin.}(1)\right] = \left(\frac{2m\mu}{Q_f(m+\mu)}\right)^{\frac{1}{2}} C;$$

et pour les corps élastiques, $t = \left(\frac{2m\mu}{Q_f(m+\mu)}\right)^{\frac{1}{2}} 2C$: il faut faire attention que sin.(1) = le rayon, et que arc sin.(1) = 90°.

Il suit de là 1°. que la durée du choc, lorsque les corps ne sont animés que par des puissances ou forces accélératrices, sans vîtesses initiales, est double de la durée du choc lorsque les corps ne sont animés que par des vîtesses; 2°. que la valeur de ces puissances ou forces accélératrices n'entrant point dans les équations ci-dessus, la durée du choc est la même, quelles que soient les puissances ou forces accélératrices qui animent

Digitized by Google

les corps. Il faut se rappeller que les forces accélératrices ont été supposées constantes.

Les valeurs de Q et de ρ, qui entrent dans les équations précédentes, étant embarrassantes dans le calcul, voici comment on aura des valeurs de t qui ne contiendront ni Q ni ρ, et au moyen desquelles on pourra évaluer immédiatement t d'après l'expérience.

Je nomme X la plus grande profondeur de l'impression, puisqu'on a fait $\int \sigma dz = Qz^2$, on aura $QX^2 = j$; et d'après l'hypothese de $x = z$, on aura $\rho = \frac{\frac{1}{2}\mu m(k-x)^2 + (\mu f - m\phi)2X}{(m+\mu)QX^2}$; d'où l'on tire $(m+\mu)\rho Q = \frac{\frac{1}{2}\mu m(k-x)^2 + (\mu f - m\phi)2X}{X^2}$. On a d'un autre côté

$$R^2 = \frac{\frac{1}{2}m\mu(k-x)^2}{Q\rho(m+\mu)} + \left(\frac{\mu f - m\phi}{Q\rho(m+\mu)}\right)^2.$$

Multipliant les deux termes par $[Q\rho(m+\mu)]^2$, il en résultera

$$R^2Q^2\rho^2(m+\mu)^2 = \frac{1}{2}m\mu Q\rho(m+\mu)(k-x)^2 + (\mu f - m\phi)^2.$$

Substituant pour $Q\rho(m+\mu)$ sa valeur, et réduisant tout en fraction, on a

$$R^2Q^2\rho^2(m+\mu)^2 = \frac{\frac{1}{4}\mu^2m^2(k-x)^4 + m\mu X(k-x)^2(\mu f - m\phi) + X^2(\mu f - m\phi)^2}{X^2};$$

et en extrayant la racine quarrée des deux membres, qui sont des quarrés parfaits,

$$RQ\rho(m+\mu) = \frac{\frac{1}{2}\mu m(k-x)^2 + X(\mu f - m\phi)}{X}.$$

Substituant les valeurs de $RQ\rho$ et de $Q\rho$ dans les valeurs trouvées précédemment pour t, on a, pour les corps non élastiques,

$$t = \left(\frac{2m\mu X^2}{\frac{1}{2}\mu m(k-x)^2 + (\mu f - m\phi)2X}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{2}C + \text{arc sin.}\frac{(\mu f - m\phi)X}{\frac{1}{2}\mu m(k-x)^2 + X(\mu f - m\phi)}\right];$$

et pour les corps parfaitement élastiques,

$$t = \left(\frac{2m\mu X^2}{\frac{1}{2}\mu m(k-x)^2 + (\mu f - m\phi)2X}\right)^{\frac{1}{2}}\left[C + 2\,\text{arc sin.}\frac{(\mu f - m\phi)X}{\frac{1}{2}\mu m(k-x)^2 + X(\mu f - m\phi)}\right]:$$

équations où l'on ne trouve ni Q, ni ρ, ni R, et qui ne renferment que les éléments donnés immédiatement par l'expérience.

Lorsque $f = 0$ et $\phi = 0$, les équations précédentes deviennent $t = \frac{XC}{k-x}$ et $t = \frac{2XC}{k-x}$.

Soit, par exemple, la vîtesse relative $k - x$ avec laquelle

Digitized by Go

se choquent deux corps sphériques d'un pied par seconde. Puisque $C = 3,14$, on aura $t = 3,14X$; et si l'on suppose que la profondeur de l'impression faite en eux pendant le choc soit de $\frac{1}{314}$ de pieds, ou d'un peu moins d'une demi-ligne, t sera $= \frac{1}{100}$ de seconde $= 36''$, temps véritablement trop court pour qu'il puisse jamais être sensible. Si la dureté des deux corps étoit plus grande, l'impression seroit alors moins profonde, et par conséquent le temps plus court; en sorte que si la dureté étoit très grande, le temps seroit presque infiniment petit.

Il faut faire attention que, dans l'équation $t = \frac{XC}{k - x}$, la différence $k - x$ peut rester la même, quoique les valeurs absolues de k et x varient, sans quoi cette équation paroîtroit en contradiction avec ce qu'on a dit plus haut, que lorsque les puissances sont zéro, les temps sont indépendants des vîtesses initiales.

Si les corps n'étoient animés que par des puissances, ou n'agissoient que par la pression, on auroit $k = 0$, et $x = 0$, et la valeur de t deviendroit $t = \left(\frac{m\mu X}{\mu f - m\varphi}\right)^{\frac{1}{2}} C$, et $t = \left(\frac{m\mu X}{\mu f - m\varphi}\right)^{\frac{1}{2}} 2C$; le corps choqué étant immobile, ces équations deviendront $t = \left(\frac{mX}{f}\right)^{\frac{1}{2}} C$, et $t = \left(\frac{mX}{f}\right)^{\frac{1}{2}} 2C$. Supposant que f soit la gravité, on a $f = 30,196m$, et $t = \left(\frac{X}{30,196}\right)^{\frac{1}{2}} C$.

Supposons qu'un corps posé sur un autre fasse une impression dont la profondeur soit de $\frac{1}{19,7192}$ de ligne $= \frac{1}{2 \cdot (3,14)^2}$ = un peu plus d'un vingtieme de ligne; ce qui fait $\frac{1}{144 \cdot 2 \cdot (3,14)^2}$ de pied. Le temps dans lequel se formera la plus grande impression sera

$$= \left(\frac{1}{2 \cdot 30,196 \cdot \frac{1}{144} \cdot 2 \cdot (3,14)^2}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot 3,14 = 0,010723 = 38'',6.$$

En conservant l'hypothèse de l'immobilité du corps choqué, on a $\mu = \infty$, et par conséquent $x = 0$, l'expression du temps pendant lequel se formera la plus grande impression devient

$$t = \left(\frac{2mX^2}{\frac{1}{2}mk^2 + 2fX}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}C + \text{arc sin.} \frac{fX}{\frac{1}{2}mk^2 + fX}\right).$$

Si le corps choquant est animé par la pesanteur, h étant la hauteur due à la vîtesse k, on aura $k^2 = 60,39\,h$, et $f = 30,196\,m$. Substituant ces valeurs de k^2 et f, il en résulte

$$t = \frac{X}{\sqrt{[15,09(h + 2X)]}} \left(\frac{1}{2}C + \text{arc sin.} \frac{X}{h + X}\right).$$

Digitized by Google

Si X étoit susceptible d'être négligé à l'égard de h, l'équation se réduiroit à $t = \frac{\frac{1}{2}CX}{\sqrt{(15,09h)}} = \frac{CX}{7,769\sqrt{h}} = \frac{3,14X}{7,769\sqrt{h}}$. Si donc un corps de fer, tombant sur une enclume, y faisoit une impression dont la profondeur fût de $\frac{1}{3,14}$ de pied, ou un peu moins d'une demi-ligne, le temps qu'il emploieroit à former cette impression seroit $t = \frac{3,14 \cdot \frac{1}{3,14}}{7,769\sqrt{h}} = \frac{1}{776,9\sqrt{h}}$; en sorte que si le corps étoit tombé de 36 pieds de hauteur, on auroit $t = \frac{1}{4661,4} = 46''$.

On peut trouver de la même maniere les temps dans lesquels se forment les plus grandes impressions. Dans la supposition de $x = 0$ et $dx = 0$, on a vu qu'il falloit, pour cela, prendre la moitié du terme multiplié par $\delta = \frac{\mu f - m\varphi}{\frac{1}{2}m\mu}$, et après cela prendre la moitié de toute la valeur de t; ainsi on aura

$$t = \left(\frac{m\mu X^2}{m\mu(k-z)^2 + 2(\mu f - m\varphi)X}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}C + \text{arc sin.}\ \frac{(\mu f - m\varphi)X}{\mu m(k-z)^2 + (\mu f - m\varphi)X}\right).$$

Il en sera de même pour tout autre cas, en intégrant l'expression générale

$$dt = \frac{dx + dz}{\pm\left[(k-z)^2 + \frac{(\mu f - m\varphi)(x+z) - (m+\mu)\int f\varphi dz}{\frac{1}{2}m\mu}\right]^{\frac{1}{2}}}.$$

On a eu précédemment (459) l'équation

$$m\mu(du - dv) = [\mu f - m\varphi - (m+\mu)\pi]\,dt;$$

si on suppose π constant dans cette équation, elle aura pour intégrale $m\mu(u-v) = [\mu f - m\varphi - (m+\mu)\pi]t + F$ lorsque $t = 0$, $u = k$, et $v = z$; on a donc alors $m\mu(k-z) = F$, et par conséquent $m\mu[(u-v) - (k-z)] = [\mu f - m\varphi - (m+\mu)\pi]t$; d'où $t = \frac{m\mu[(u-v)-(k-z)]}{[\mu f - m\varphi - (m+\mu)\pi]}$. Lorsque la plus grande impression s'acheve, $u - v = 0$, et la valeur de t est $t = \frac{-m\mu(k-z)}{\mu f - m\varphi - (m+\mu)\pi} = \frac{m\mu(k-z)}{(m+\mu)\pi - (\mu f - m\varphi)}$.

Si le corps choqué est immobile, $\mu = \infty$; $z = 0$ et $\varphi = 0$, et alors on a $t = \frac{mk}{\pi - f}$.

Considérations sur les différentes formes que peut prendre l'impression, suivant la nature des corps.

484. L'application des calculs précédents dépend principalement de la détermination de l'impression. Cette détermination présente quelquefois des difficultés; car, malgré que quelques auteurs aient supposé généralement que la figure de

l'impression est la même que celle du corps choquant, il est clair que cette opinion ne peut se soutenir pour les corps durs et tenaces. Dans un grand nombre de ces derniers, l'amplitude de l'impression est toujours beaucoup plus grande ; car les parties contiguës à la surface de contact, ne se détachant point avec facilité de leurs voisines, cedent à l'impulsion en même temps que cette surface, entraînent avec elles celles qui les touchent, et ainsi successivement. Par-là le diametre de l'impression réelle est plus grand que le diametre de la surface de contact ; ce qui fait qu'il est difficile d'avoir une mesure exacte de l'impression réelle.

Au reste cette observation, toute vraie qu'elle est, ne peut cependant être appliquée à tous les cas sans aucune modification ; car il y a telle forme du corps choquant, telle que la sphérique, et en général la forme convexe, qui doit diminuer beaucoup l'excès du diametre de l'impression réelle sur le diametre de la surface de contact ; cet excès même peut s'évanouir entièrement si le corps choqué n'est pas d'une dureté et d'une tenacité extrême.

485. On voit, par tout l'exposé de ce chapitre, que la théorie vient à l'appui des faits avancés dans l'art. (440), et leur sert d'explication. On voit que, lorsqu'on connoît les circonstances physiques d'une percussion, on peut toujours assigner une pression équivalente à cette percussion, et qui lui feroit équilibre. Ce n'est donc point une chose absurde de dire qu'on pese un coup de masse, un coup de marteau ; il faut seulement observer qu'un coup de marteau ou de masse n'a pas un poids absolu, mais que ce poids dépend de la dureté de la forme, et enfin de la nature des corps frappants et frappés. Ainsi en général, lorsqu'une résistance de pression est équivalente à un poids très considérable, elle doit résister au choc d'une masse dont le poids seroit très petit en comparaison du premier, et dont la vîtesse seroit due à une hauteur médiocre. Conclusion de ce chapitre.

Nous aurons occasion d'appliquer la théorie précédente à différents objets de pratique. Par exemple, ceux qui ont traité de la statique des voûtes n'ont point fait entrer en considération les chocs auxquels elles sont exposées, de l'effet desquels on pourroit se faire une idée au-dessus ou au-dessous de la réalité.

Digitized by Google

Du choc des corps dans des directions qui ne passent pas par leurs centres de gravité.

486. Nous allons donner un exemple simple de ces sortes de questions, qui pourra servir d'exemple et d'introduction à ceux qui voudront en traiter de semblables.

Exemple de la solution d'une question sur les chocs qui s'exercent dans des directions qui ne passent pas par le centre de gravité des corps.

Un corps Q (*fig.* 121) étant supposé libre et en repos, un corps P animé d'une vîtesse V, vient le choquer en L dans la direction LR, qui ne passe point par son centre de gravité, et qui est perpendiculaire à la surface de contact des deux corps. On demande la vîtesse des centres de gravité après le choc, et la vîtesse de rotation du corps Q. Les deux corps sont supposés parfaitement durs.

Soit u la vîtesse du corps P après le choc, la quantité de mouvement qu'il aura perdue sera $P(V-u)$; ce sera donc la quantité de mouvement imprimée au corps Q, ou gagnée par ce corps; ainsi la vîtesse du centre de gravité G sera égale (389) à $\frac{P(V-u)}{Q}$.

Nommant w la vîtesse angulaire autour du centre de gravité G, a la distance NG, et Qh^2 le moment d'inertie par rapport à un axe perpendiculaire au plan de la figure et passant par le centre de gravité, on a, pour la vîtesse angulaire (423), l'équation $w = \frac{aP(V-u)}{Qh^2}$.

Lorsque le choc cesse, la vîtesse du point L de contact du corps Q, décomposée dans le sens LR, doit être égale à la vîtesse u du corps P après le choc, sans quoi il y auroit une action et une réaction qui détruiroient la supposition que cette vîtesse u a réellement lieu; mais la vîtesse qu'a ce point L autour de G, ou perpendiculairement à GL, est égale à la vîtesse angulaire, multipliée par la distance GL, c'est-à-dire à $\frac{aP(V-u)}{Qh^2} \times$ GL. Pour la décomposer dans le sens de LR, il faut la multiplier par $\frac{GN}{GL}$, ou par $\frac{a}{GL}$; ainsi la vîtesse de rotation, prise dans le sens de LR, est $\frac{a^2P(V-u)}{Qh^2}$; ajoutant à cette vîtesse celle du centre de gravité, la somme qui sera la vîtesse totale de L doit, par ce qui vient d'être dit, être égale à u: ainsi on a $u = \frac{a^2P(V-u)}{Qh^2} + \frac{P(V-u)}{Q}$; ce qui donne $u = \frac{VP(a^2+h^2)}{Qh^2+Ph^2+Pa^2}$.

Nommons v la vîtesse du centre de gravité de Q, on a, d'après ce

ce qui a été dit, $v = \frac{P(V-u)}{Q}$, qui, en substituant la valeur de u, devient $v = \frac{VPh^2}{Qh^2+Ph^2+Pa^2}$. Enfin substituant encore la valeur de u dans celle de w, on a $w = \frac{VPa}{Qh^2+Ph^2+Pa^2}$. Ainsi les vîtesses cherchées u, v et w, sont exprimées en quantités connues.

En supposant la distance a égale à zéro, on trouve $v = u$ et $w = 0$, ainsi que cela doit être.

Du mouvement considéré dans les machines.

Nécessité d'entrer dans quelques détails particuliers sur la théorie des machines.

487. Les principes donnés dans cette section sont très suffisants pour déterminer les loix du mouvement dans les machines décrites à la fin de la section précédente, et dans toutes celles qui en sont dérivées: mais l'objet de cet ouvrage exige que nous entrions dans quelques détails sur la meilleure maniere d'appliquer ces principes à la construction et à l'emploi des machines; nous allons, dans ce chapitre, présenter des considérations générales propres à établir des notions exactes sur l'étendue des effets qu'elles peuvent produire, sur l'idée qu'on doit se faire de leur utilité, sur leur perfection, et sur les limites que comporte cette perfection. Ce que nous dirons, étant applicable à toutes les machines sans exception, pourra servir à diriger les inventeurs et les constructeurs, et à donner de la circonspection aux faiseurs d'essai, en arrêtant les écarts d'une imagination, souvent trop prompte à se flatter d'un espoir chimérique, quand elle n'est pas guidée par une saine théorie.

Deux sortes de mouvement dans les machines; savoir, le mouvement uniforme, et le mouvem. alternativement accéléré et retardé.

La premiere espece de mouvement peut servir à mesurer la seconde.

488. Le mouvement qui se produit dans les machines est de deux sortes; ou il est entièrement uniforme, ou il est alternativement accéléré et retardé. Les horloges et les machines qui se meuvent par l'action d'un balancier se rapportent à la seconde classe; presque toutes les autres especes de machines doivent être rangées dans la premiere. Observons que quoique le mouvement d'une machine soit alternativement accéléré et retardé, il peut néanmoins être mesuré par un mouvement uniforme, à cause de la répétition périodique et réguliere qui doit exister dans l'accélération et le retardement.

Exemple de la seconde espece de mouvem.

Ainsi le mouvement d'un pendule à secondes, considéré dans une seule oscillation, est accéléré pendant la premiere demi-seconde, et retardé pendant l'autre demi-seconde; mais ce même mouvement, pris pendant plusieurs oscillations, peut être considéré, quant à l'effet, comme uniforme. Supposons, par

Digitized by Google

exemple, que l'étendue de chaque oscillation soit de cinq pouces, et que le pendule ait fait dix oscillations ; son effet total sera d'avoir parcouru cinquante pouces en dix secondes ; et comme l'espace parcouru pendant chaque seconde est le même, on pourra comparer l'effet à celui produit par un mobile qui se seroit mu pendant dix secondes, avec une vîtesse uniforme de cinq pouces par seconde.

La théorie des machines à mouvement uniforme conduit à celle des machines à mouvem. alternativement accéléré et retardé.

489. On voit donc que la théorie des machines à mouvement uniforme conduit naturellement à l'évaluation des effets produits par les machines à mouvement alternativement accéléré et retardé ; nous allons nous occuper principalement des premieres.

De l'accélération qui a lieu avant que les machines soient parvenues à l'uniformité.

490. Lorsqu'un moteur est appliqué à une machine, l'uniformité n'a pas lieu dès le premier instant ; elle n'est produite qu'après un espace de temps plus ou moins court, pendant lequel le mouvement de la machine s'accélere et passe par toutes les gradations intermédiaires, depuis le repos jusqu'à la plus grande vîtesse, que comportent la machine et les puissances qui y sont appliquées.

Cas où l'on peut observer cette accélération.

L'expérience journaliere nous offre des exemples de ce phénomene : il faut quelque attention pour les saisir dans la communication du mouvement aux machines mues par des hommes ou par des chevaux, parceque le plus souvent ce mouvement parvient rapidement à l'uniformité ; mais on les saisit plus aisément dans les machines mues par les fluides. Lorsqu'on leve la vanne d'un coursier destiné à amener l'eau contre une roue à aubes, quelque impétuosité qu'ait le fluide, la gradation du passage du repos au mouvement est très sensible dans les premiers instants, et ce n'est qu'après un temps sensiblement appréciable qu'elle parvient à acquérir une vîtesse uniforme.

On supposera dans la théorie suivante que les machines sont parvenues à l'uniformité.

Nous ferons abstraction, dans ce chapitre, de l'accélération graduelle du mouvement, qui a lieu dans les premiers instants de sa communication, et nous supposerons que la machine est parvenue à l'uniformité.

Développement de la signification des mots *moteur* et *résistance*.

491. Nous avons expliqué (60 et 86) ce que nous entendions par *moteur* et *résistance*. Le moteur est, dans l'acception la plus générale, la cause quelconque du mouvement ; la *résistance* est ce qui s'oppose à l'action du *moteur* quand ce dernier est considéré comme appliqué à une machine.

Lorsque, dans la section précédente et dans celle-ci, nous avons considéré les moteurs en général, nous les avons représentés par l'effet qu'ils étoient censés produire dans un corps :

Digitized by Google

cet effet est la vîtesse qu'acquiert le corps par l'action du moteur. Ainsi M étant le moteur, et m la masse, Mm est la quantité de mouvement résultante de l'action du moteur sur cette masse. Cette quantité de mouvement est proportionnelle à M lorsque m est supposée constante.

Différentes espèces de moteurs qu'on applique aux machines.

Les moteurs que nous avons à considérer dans les machines sont les hommes, les animaux, l'eau, soit dans son état naturel, soit réduite en vapeur, l'air, etc., et nous allons les prendre dans l'acception générale des articles ci-dessus cités. Cela posé, l'un quelconque de ces moteurs étant supposé appliqué à une machine, il faut considérer deux choses. La premiere est la vîtesse du point auquel il est appliqué ; cette vîtesse est supposée parvenue à l'uniformité ; nous la nommerons *vîtesse du moteur* (*). La seconde est l'effort qu'il faut que le moteur fasse à chaque instant, afin que la vîtesse du point auquel il est appliqué se conserve uniforme et constante ; nous appellerons cet effort l'*effort du moteur*.

Ce qu'on entend par *vîtesse* et *effort* du moteur.

Exemple.

Par exemple, si un homme, appliqué à la manivelle d'un treuil, est occupé à enlever un poids, la *vîtesse du moteur* sera, en prenant la seconde pour unité de temps, proportionnelle au nombre de tours faits par la manivelle pendant une seconde; l'*effort du moteur* sera l'effort que l'homme est obligé de faire à chaque instant pour détruire les résistances combinées de la pesanteur du frottement, etc., qui tendent à diminuer la vîtesse ascensionnelle uniforme qu'il a imprimée au poids. En général, l'*effort du moteur* peut toujours se comparer à un poids.

Ce qu'on entend par *vîtesse* et *effort* de la résistance.

492. Nous nommerons, par analogie, *vîtesse de la résistance* la vîtesse du point auquel la résistance est censée appliquée ; et l'*effort de la résistance*, celui que le moteur est obligé de détruire à chaque instant pour conserver l'uniformité du mouvement.

Ces définitions établies, nous allons poser les deux principes suivants, qui renferment le fondement de toute la théorie des machines.

Principes fondamentaux de la théorie des machines.

493. PREMIER PRINCIPE. *L'effort du moteur doit toujours faire équilibre à l'effort de la résistance.*

(*) Cette expression, *vîtesse du moteur*, ne doit être envisagée que comme une maniere abrégée de nommer celle-ci *vîtesse du point auquel est appliqué le moteur*. En effet, cette derniere vîtesse n'est pas toujours la même que la vîtesse effective du moteur, considérée indépendamment de son action sur la machine. Par exemple, une roue à aubes, mue par un courant, ne prend qu'une partie de la vîtesse de ce courant. Tout ceci sera éclairci dans les sections suivantes.

Digitized by Google

SECOND PRINCIPE. *Le produit de l'effort du moteur, par sa vitesse, est toujours égal au produit de l'effort de la résistance par sa vîtesse.*

Démonstrations de ces principes.

Le premier principe est une conséquence immédiate de ce qui est dit dans les articles précédents. En effet, l'effort du moteur n'étant employé qu'à contre-balancer à chaque instant celui de la résistance, ces deux efforts doivent évidemment se faire équilibre.

La démonstration du second principe se déduit directement du principe des vîtesses virtuelles, ou plutôt n'est qu'une énonciation de ce même principe, adaptée à la théorie des machines. Pour bien entendre ceci, il faut faire attention que, dans une machine de construction donnée, le rapport de la vîtesse du moteur à la vîtesse de la résistance est aussi une quantité donnée, égale au rapport des vîtesses virtuelles. Nommant f l'effort du moteur, f' celui de la résistance, v et v' les vîtesses virtuelles, u et u' les vîtesses effectives du moteur et de la résistance; on a, d'après le principe des vîtesses virtuelles, $fv = f'v'$, et, d'après ce qu'on vient de dire, $\frac{u}{u'} = \frac{v}{v'}$; la combinaison de ces deux équations donne $fu = f'u'$, C. Q. F. D.

Nous allons d'abord faire abstraction de la résistance du frottement, roideur des cordes, etc.; mais nous verrons dans la cinquieme section comment on y applique les principes que nous venons d'établir, qui comprennent, sans exception, toutes les circonstances physiques des machines.

L'effet d'une machine se mesure par le produit de la vîtesse du moteur, de son effort et du temps.

494. L'effet d'une machine se mesure par la durée de l'action du moteur (nous ferons commencer cette action à l'instant où le mouvement a commencé à être uniforme), multipliée par l'effort de la résistance et par sa vîtesse. On conçoit en effet fort aisément que, deux de ces trois choses étant regardées comme constantes, l'effet de la machine sera proportionnel à la troisieme, et que par conséquent cet effet est en raison composée des trois ensemble. Si, par exemple, une machine est employée à faire monter un poids, le travail opéré par le moyen de cette machine sera, toutes choses égales d'ailleurs, proportionnel au temps pendant lequel elle agira; ensuite, pendant un temps déterminé, ce travail sera d'autant plus grand, que le poids à soulever, ou l'effort de la résistance, sera plus considérable; enfin le temps et le poids restant les mêmes, le poids sera élevé d'autant plus haut, que sa vîtesse sera plus considérable.

Cela posé, si on emploie un moteur tel que le produit de son

effort par sa vîtesse soit toujours le même, quelle que soit la machine à laquelle on applique ce moteur, l'effet de cette machine sera simplement proportionnel au temps. Ceci est une conséquence de l'équation $fu = fu'$ (493); car fu étant supposé constant, $f'u'$ le sera aussi; or t étant le temps, l'effet sera $f'u't$, qui, dans l'hypothese actuelle de $f'u'$ constant, est proportionnel à t.

Le produit de l'effort par la vîtesse étant constant, l'effet est proportionnel au temps.

495. Remarquons que, toutes les fois que le moteur ne sera pas la gravité, il y aura une certaine relation entre l'effort du moteur et sa vîtesse, telle que, le dernier élément augmentant, le premier diminuera, et que cet effet aura lieu indépendamment de toute résistance.

Relation entre la vîtesse et l'effort du moteur.

Ainsi, sans avoir une connoissance particuliere de la théorie des fluides, on voit aisément qu'un corps soumis à l'action d'un courant d'eau ou d'air en recevra une impulsion d'autant moins forte, que sa vîtesse, dans le sens de la direction du courant, sera plus grande. Cette impulsion sera nulle lorsque la vîtesse du corps sera égale à celle du courant. Il ne faut pas perdre de vue que c'est ici la vîtesse du corps qui représente celle du moteur, d'après la définition de l'art. (491 et la note.)

Application aux fluides.

L'effort dont les hommes et les animaux sont capables, dépend aussi de la vîtesse avec laquelle ils se mouvent. Lorsque cette vîtesse est nulle, alors ils peuvent exercer tout l'effort que comporte leur constitution; mais lorsqu'ils sont en mouvement, l'effort qu'ils sont obligés de faire pour conserver ce mouvement diminue celui qu'ils pourroient employer à mouvoir la machine, et il y a un certain degré de vîtesse avec lequel ils ne sont plus capables d'aucun effort. Il y a pareillement un certain degré d'effort avec lequel ils ne sont capables d'aucune vîtesse, et qui ne leur permet simplement que de faire équilibre à l'effort de la résistance.

Application aux hommes et aux animaux.

Lorsque les hommes ou les animaux employés à mouvoir une machine, sont parvenus à rendre le mouvement uniforme, et ont, de la part de la résistance, un effort constant à surmonter, ils ne peuvent conserver que pendant un certain temps l'égalité de leur propre effort, et par conséquent l'uniformité de leur vîtesse; la fatigue du travail les oblige tôt ou tard à diminuer cet effort; leur vîtesse est, par-là, graduellement altérée; et si, lors de cette diminution, ils ne réparent pas leurs forces par la nourriture et le repos, ils tomberont bientôt de fatigue et d'épuisement, et ne seront capables d'aucun effort.

Effet de la fatigue dans ces dernieres especes de moteur.

La cinquieme section de ce traité renfermera les expériences

Digitized by Google

et les calculs relatifs à la force des hommes et des animaux, et au travail dont ils sont capables relativement à la maniere dont on les emploie; nous ne donnons ici que les notions nécessaires pour l'intelligence de la théorie générale des machines.

Expression analytique de la relation entre l'effort du moteur et sa vîtesse.

496. Supposons qu'un moteur capable d'un effort F, quand sa vîtesse u est nulle, ne soit plus capable d'aucun effort quand cette vîtesse u devient égale à U. Soit f l'effort répondant à la vîtesse u; on pourra assez généralement faire l'effort du moteur égal à $\mathrm{F}\left(1-\frac{u}{\mathrm{U}}\right)^2$: nous verrons dans la suite les modifications dont cette expression est susceptible dans certains cas; mais nous pouvons, en attendant, l'adopter comme sensiblement exacte.

Différentes équations qui donnent les valeurs des vîtesses de la résistance, du moteur, et celle de l'effet d'une machine.

497. Si on substitue la valeur précédente de f dans l'équation $fu = f'u'$ trouvée (493), on a $f'u' = u\mathrm{F}\left(1-\frac{u}{\mathrm{U}}\right)^2$, ou $f' = \frac{u}{u'}\,\mathrm{F}\left(1-\frac{u}{\mathrm{U}}\right)^2$. On a eu de plus, article cité, l'équation $\frac{u}{u'} = \frac{v}{v'}$, v et v' étant les vîtesses virtuelles que comporte la machine : ainsi $1-\frac{u}{\mathrm{U}} = \sqrt{\frac{v'f'}{v\mathrm{F}}}$; d'où $u = \mathrm{U} - \mathrm{U}\sqrt{\frac{v'f'}{v\mathrm{F}}} = \mathrm{U}\left(1-\sqrt{\frac{v'f'}{v\mathrm{F}}}\right)$; c'est l'expression de la vîtesse du moteur. En multipliant cette vîtesse par $\frac{v'}{v}$, on aura celle de la résistance, et par conséquent l'équation

$$u' = \mathrm{U}\,\frac{v'}{v}\left(1-\sqrt{\frac{v'f'}{v\mathrm{F}}}\right).$$

Le rapport des vîtesses du moteur et de la résistance étant supposé variable, trouver une équation entre ce rapport et l'effort de la résistance, laquelle équation convienne au plus grand effet de la machine.

498. L'effet de la machine étant, d'après ce qu'on a dit (494), égal à $u'f't$, on a donc, pour évaluer cet effet, l'équation

$$u'f't = \mathrm{U}\,\frac{v'}{v}\left(1-\sqrt{\frac{v'f'}{v\mathrm{F}}}\right)f't.$$

On voit, par cette équation, que le poids f' à mouvoir étant donné, la quantité de l'effet produit par la machine, pendant un temps déterminé t, dépendra des trois quantités U, F et $\frac{v'}{v}$. Les deux premieres tiennent à la nature du moteur et à son intensité, c'est-à-dire à l'espece d'agents qu'on emploie, comme hommes, animaux ou fluides, et à la quantité de ces agents, ou au nombre d'hommes, etc. employés à faire mouvoir la machine. Ces choses sont supposées données. Quant à la troisieme $\frac{v'}{v}$, qui est le rapport des vîtesses virtuelles, elle tient à la construction de la machine, et est par conséquent susceptible d'une valeur de laquelle il résulte le plus grand effet.

Digitized by Google

Cette valeur se trouve en faisant $d(u'f't) = 0$, ou $d\left[U\frac{v'}{v}\left(1-\sqrt{\frac{v'f'}{vF}}\right)f't\right] = 0$, qui, en supprimant les facteurs constants, se réduit à $d\left[\frac{v'}{v}\left(1-\sqrt{\frac{v'f'}{vF}}\right)\right] = 0$. Faisons $\frac{v'}{v} = zz$, et différencions, il viendra $2z = 3z^2\sqrt{\frac{f'}{F}} = 0$; d'où $z = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{F}{f'}}$, et par conséquent $z^2 = \frac{v'}{v} = \frac{4}{9}\cdot\frac{F}{f'}$. Ainsi, pour le plus grand effet, la vîtesse du moteur doit être égale à celle de la résistance, comme $9f'$ est à $4F$.

Ce rapport doit être considéré comme celui dont on doit approcher autant qu'on pourra; car on n'est pas sûr de pouvoir toujours l'obtenir exactement. Mais comme il appartient à une quantité qui est un *maximum*, on peut, par la propriété de ces sortes de quantités, s'en écarter un peu, sans que la valeur de l'effet change sensiblement.

On peut s'éloigner un peu de ce rapport sans que la valeur de cet effet soit changée sensiblement.

499. La détermination précédente du rapport des vîtesses suppose que la résistance oppose une résistance donnée f', ou qu'on a, par exemple, une masse d'un poids déterminé à élever tout à la fois, et que les quantités U et F sont également données. Mais les relations entre les sept quantités $\frac{v'}{v}$, u, u', f, f', F et U, sont exprimées par quatre équations, qui sont $\frac{v'}{v} = \frac{u'}{u}$, $fu = f'u'$, $f = F\left(1-\frac{u}{U}\right)^2$, et $\frac{u'}{u} = \frac{4}{9}\cdot\frac{F}{f'}$, dont les deux premieres expriment des propriétés fondamentales applicables à toutes les machines; la troisieme, la relation entre f et u, dérivée de la valeur de F et de U; la quatrieme, la condition d'où résulte le plus grand effet de la machine; et trois de ces quantités étant données, les quatre autres sont par conséquent déterminées. En effet, la combinaison des deux équations $fu = f'u'$, et $\frac{u'}{u} = \frac{4}{9}\frac{F}{f'}$ donne $f = \frac{4}{9}F$, et cette valeur de f, substituée dans l'équation $f = F\left(1-\frac{u}{U}\right)^2$, donne $u = \frac{1}{3}U$.

Au moyen de cette équation, et de trois autres posées précédemment, la vitesse et l'effort du moteur sont déterminés.

500. Si les quantités F, U, $\frac{v'}{v}$, étoient données, c'est-à-dire qu'on fût assujetti à se servir d'une machine construite, à laquelle on ne pût appliquer qu'un certain nombre d'hommes, d'animaux, ou un courant d'eau invariable, on pourroit chercher quelle doit être la résistance ou le poids à mouvoir, pour qu'il en résulte le plus grand effet; et par conséquent, dans cette circonstance, c'est f' qu'il faut rendre variable. On a donc $d(u'f't)$, ou $d\left[U\frac{v'}{v}\left(1-\sqrt{\frac{v'f'}{vF}}\right)f't\right] = 0$. En différenciant

En supposant le rapport des vitesses constant, et l'effort de la résistance variable, on trouve, pour le plus grand effet de la machine les mêmes valeurs que ci-dessus.

Digitized by Google

par rapport à f', il vient, toutes réductions faites, $f = \frac{4}{9} F$, $f' = \frac{4v}{9v'} F$, ou $\frac{v'}{v} = \frac{4F}{9f'}$; ce qui est le même résultat trouvé ci-devant.

Résultats des calculs précédents pour la production du plus grand effet dans une machine.

501. Concluons de ce qui précede, que, le moteur à appliquer une machine étant donné, si l'on peut disposer d'une des deux choses suivantes; savoir, l'effort de la résistance, ou la construction de la machine, il faudra, pour produire le plus grand effet, modérer le premier de maniere que le moteur puisse avoir le tiers de la vîtesse, à laquelle étant parvenu, il ne seroit plus capable d'aucun effort, ou bien construire la machine de maniere que le rapport des vîtesses du moteur et de la résistance soit égal au rapport de neuf fois l'effort donné de la résistance, à quatre fois l'effort, pareillement donné, que le moteur peut exercer quand sa vîtesse est nulle.

Du plus grand effet quand le moteur est supposé variable.

502. La recherche du plus grand effet, en supposant F seul variable, se réduit à faire cette quantité infinie dans l'expression $U \frac{v'}{v} \left(1 - \sqrt{\frac{v'f'}{vF}}\right) f't$, qui est la valeur de l'effet (498), et qui devient alors $\frac{v'}{v} U f't$.

Le moteur peut être infini sans que l'effet le soit.

On voit par-là que la somme des agents employés à mouvoir la machine peut être infinie sans que, pour cela, l'effet soit infini: cela vient de ce que les variations de F, qui est proportionnelle à cette somme, n'influent point sur la quantité U. En effet, quel que soit, par exemple, le nombre d'hommes employés à mouvoir une machine, la vîtesse U étant celle qu'un homme doit avoir pour n'être plus capable d'aucun effort, ne doit point changer de valeur pour un nombre quelconque d'hommes.

Conséquence de la théorie précédente. Limite de l'effet des machines quand le produit de l'effort du moteur par sa vîtesse est constant.

503. La théorie que nous venons d'établir renferme, comme on voit, la solution de toutes les questions qu'on s'étoit proposé de résoudre, art. (487). D'abord il suit de cette théorie, que, quelque machine qu'on emploie pour mouvoir un corps, si le produit de l'effort du moteur, par sa vîtesse, est une quantité donnée, l'effet de cette machine, c'est-à-dire le produit de la masse (proportionnelle au poids), par la vîtesse et par le temps, ne peut jamais être plus grand que celui qu'on produiroit en appliquant immédiatement à ce corps, et sans l'intermede d'aucune machine, un moteur de même produit analogue que le précédent. Ainsi, par exemple, un homme se mouvant avec une vîtesse de deux pieds et demi par seconde, et faisant un effort de vingt livres, ne peut pas, de quelque maniere qu'on l'emploie,

Digitized by Google

l'emploie, élever une masse avec une vîtesse uniforme, qui, multipliée par cette masse, fasse un produit plus grand que cinquante, la seconde étant l'unité de temps.

Dans les machines considérées physiquement, on est toujours au-dessous de l'effet dont on vient de parler, parceque l'inertie, le frottement, la roideur des cordes, etc., absorbent une partie de l'effort du moteur, qui, par conséquent, ne peut détruire dans la résistance qu'un effort moindre que celui qu'il détruiroit sans de pareils obstacles. On doit donc considérer le produit de l'effort du moteur, par sa vîtesse et par la durée de son action, comme la limite de la valeur de l'effet de la machine, limite dont elle approchera d'autant plus, qu'elle sera plus parfaite, ou présentera moins d'obstacles à vaincre, indépendants de l'effort du moteur.

Dans les machines considérées physiquement, on est toujours en-deçà de cette limite.

C'est faute de bien se pénétrer de ces vérités que, chaque jour, des hommes dénués d'une saine théorie imaginent des projets de machine extravagants, et s'engagent inconsidérément dans des essais infructueux, et souvent très dispendieux, sans compter l'ennui qu'ils causent et le temps qu'ils font perdre aux compagnies savantes ou aux ingénieurs chargés d'examiner leurs projets.

Causes principales des erreurs commises dans l'invention et la construction des machines.

504. De pareilles erreurs, indépendamment des tentatives inutiles auxquelles elles donnent lieu, contribuent encore à éloigner de l'esprit la notion exacte de l'utilité réelle que nous retirons des machines, notion qui présente le vrai point de vue sous lequel on doit les envisager pour travailler à leur perfection et les appliquer plus utilement à nos besoins.

Sous quel point de vue on doit considérer les machines pour travailler fructueusement à leur perfection.

Le premier objet d'utilité des machines est celui que nous avons déja fait appercevoir plusieurs fois, qui consiste à fournir le moyen de donner au moteur la direction la plus commode, et de pouvoir appliquer son action immédiate ailleurs que sur le corps à mouvoir. Cet avantage est infiniment précieux ; car il arrive bien rarement, dans la pratique, qu'on puisse appliquer immédiatement à un corps les agents destinés à la faire mouvoir.

Premier objet d'utilité des machines.

Les inventions qui ont pour but de perfectionner cet avantage dans les différentes machines, offrent au génie une carriere intéressante et utile : mais ce n'est encore là qu'une chose de simple commodité ; l'avantage essentiel des machines, celui qui appartient proprement à la théorie de la mécanique, consiste à augmenter, ou plutôt à modifier l'énergie du moteur, de maniere à lui faire produire des effets qu'il ne produiroit pas sans elles.

Second objet d'utilité des machines.

Digitized by Google

Nous les avons envisagées sous ce point de vue, art. (50, 61, 98, et autres.) C'est ici le lieu de donner une signification exacte à ce que nous entendons par modifier l'énergie du moteur, et de rectifier les fausses idées que cette expression mal entendue n'a que trop souvent fait naître, et que nous regardons comme les sources de presque toutes les fausses spéculations faites sur les machines.

Développement de ce second objet d'utilité.

L'énergie d'un moteur peut être représentée par l'effort qu'il est en état de faire; ce n'est qu'au moyen de cet effort qu'il met d'abord la résistance en mouvement, et qu'il la conserve ensuite dans cet état. Mais pour que le mouvement puisse avoir lieu, il faut que, dans les premiers instants, l'effort du moteur, quoique moindre que celui de la résistance, puisse néanmoins l'emporter sur ce dernier, puisse ensuite lui faire équilibre dans les moments suivants, et c'est précisément l'avantage que procurent les machines; elles n'augmentent pas la valeur de l'effort du moteur, mais elles donnent le moyen d'employer cet effort à en contre-balancer un autre qui seroit beaucoup plus grand.

Autre maniere de l'énoncer.

Pour redire la même chose d'une autre maniere plus précise, observons que $f'u'$ représente, pendant l'unité de temps, l'effet qui résulte du mouvement de la résistance, supposé uniforme, ce mouvement étant produit d'une maniere quelconque. S'il est produit en appliquant immédiatement le moteur à la résistance, il faut que le produit fu, qui appartient au moteur, soit tel qu'on ait $f = f'$, et $u = u'$; et si, ce qui arrive très souvent, f' est plus grand que f, alors il sera impossible de mettre la résistance en mouvement en lui appliquant immédiatement le moteur. Or les machines donnent le moyen de disposer le produit fu, de maniere que ce produit restant toujours égal au produit $f'u'$, néanmoins chacun des facteurs de fu puisse différer des facteurs analogues du produit $f'u'$, et de mettre la machine en mouvement, quel que soit l'excès de f' sur f.

Exemple de ce second objet d'utilité.

Généralement, les machines servent à disposer les facteurs de fut, de maniere que ce produit restant le même, ses facteurs aient entre eux le rapport qu'on desire. Supposons qu'un homme, appliqué immédiatement à une masse de 25, puisse la faire monter verticalement avec une vîtesse de 5 pieds par seconde; ce même homme, appliqué à une masse de 1000 livres, ne pourra lui procurer aucun mouvement vertical, même en y employant tout l'effort dont il est capable, s'il est dépourvu de machines, et obligé d'agir immédiatement sur le corps;

mais il est capable de produire un effet égal à $25 \times 5 \times t$ (*): ainsi on a $25 \times 5 \times t = 1000 \times u' \times t$; d'où on tire $u' = 0,1$. Cet homme pourra donc, avec une machine, un levier, par exemple, faire monter de $\frac{1}{10}$ de pied une masse de 1000 livres dans le même temps qu'il feroit, sans machines, monter de 5 pieds une masse de 25 livres, ou bien faire monter la premiere à la même hauteur que la seconde, en y employant cinquante fois autant de temps. On voit, par cet exemple, que, lorsqu'il s'agit de remuer de grandes masses, on perd beaucoup sur le temps; mais les machines ne nous offrent pas moins de ressources précieuses, puisqu'elles procurent la possibilité de produire d'une maniere quelconque, dans tous les cas, un mouvement qui, sans elles, seroit souvent impossible.

Ce qui résulte du cas où le produit de l'effort du moteur par sa vîtesse est constant.

505. D'après ce que nous avons dit sur l'étendue des effets qu'on doit attendre des machines, on voit que, toutes les fois qu'un moteur exercera un effort déterminé avec une vîtesse pareillement déterminée, ou que le produit de ces deux choses sera constant, l'effet de la machine sera toujours le même; ainsi, sous cet aspect, en supposant la prépondérance de l'effort du moteur, et abstraction faite de la plus ou moins grande commodité, du frottement, etc., toutes les machines sont également parfaites. Mais, d'après ce que nous avons dit art. (495), un moteur peut, en diminuant sa vîtesse, augmenter son effort et réciproquement. Il y a donc un certain effort du moteur, tel que son produit, par la vîtesse que comporte cet effort, est le plus grand possible, et répond par conséquent au plus grand effet possible. La recherche de l'effort et de la vîtesse qui comportent le *maximum* d'effet dépend de la loi qui lie ces deux choses, et nous avons trouvé qu'en supposant $f = \mathrm{F}\left(1 - \frac{u}{\mathrm{U}}\right)^2$, on devoit avoir, pour le plus grand effet, $u = \frac{1}{3}\mathrm{U}$, ou $f = \frac{4}{9}\mathrm{F}$, ces deux valeurs devant avoir lieu ensemble, et le produit $\frac{4}{27}\mathrm{UF}$ étant la valeur du plus grand effet rapporté à l'unité de temps.

Cas où ce produit est variable, et est par conséquent susceptible de donner un *maximum* d'effet.

Si le rapport de f à u étoit soumis à une autre loi, on trouveroit d'autres expressions que les précédentes; mais il n'en est pas moins généralement vrai qu'en employant un moteur dont l'effort et la vîtesse sont susceptibles de variations, il y a une maniere d'en tirer le plus grand parti. On a deux moyens pour parvenir à ce but, suivant qu'on a à sa disposition la construc-

(*) On sent que si le travail est continu, la valeur de t n'est pas indéfinie, mais renfermée dans de certaines limites; mais cette observation est indifférente à l'application dont il s'agit.

tion de la machine, ou la valeur de l'effort de la résistance. L'équation $\frac{v'}{v} = \frac{4}{9}\frac{F}{f''}$, dans laquelle on voit que $\frac{v'}{v}$ dépend de la construction de la machine, et qui contient f', est, dans l'hypothese adoptée (496), celle d'où on pourra tirer les valeurs qui conviennent, dans l'un ou l'autre cas, au plus grand effet, ou qui seront telles que le moteur n'aura besoin, pour conserver le mouvement, que d'exercer l'effort qui convient à ce plus grand effet (*).

Conséquences générales de l'analyse des deux cas précédents.

506. Ainsi lorsque le produit de l'effort du moteur, par sa vîtesse, a une valeur constante, c'est ce produit qui mesure le plus grand effet, ou plutôt le seul effet à produire dans un temps donné; et lorsque ce produit est susceptible de variation, le plus grand effet a une valeur déterminée qui dépend de celles de U et de F. Cet effet a donc, dans tous les cas, des limites posées par la nature elle-même, et que toute l'industrie humaine ne sauroit franchir.

Le mouvement uniforme est le plus favorable à l'effet des machines.

507. Observons que le mouvement uniforme est celui qu'on doit le plus rechercher dans la construction des machines; car c'est celui d'où, toutes choses égales d'ailleurs, résulte le plus grand effet : nous donnerons par la suite plus de développement à cette vérité.

Conclusion de ce chapitre, où l'on a fait un usage aussi utile qu'intéressant du principe des vîtesses virtuelles.

Nous croyons en avoir assez dit pour guider tous les bons esprits, soit dans la construction des machines, soit dans le jugement à porter sur leur plus ou moins de perfection et de mérite; les détails et les applications qu'on verra dans le cours de cet ouvrage feront bien sentir la vérité et la généralité des principes que nous venons de poser. Finissons par faire remarquer combien celui des vîtesses virtuelles nous a été utile dans les recherches les plus importantes de la mécanique; ce qui justifie pleinement la prédilection que nous lui avons accordée.

(*) Il y a une considération à faire dans la recherche de ce *maximum*, relative au temps pendant lequel un moteur peut exercer un certain effort avec une certaine vîtesse; nous y aurons égard quand nous traiterons de la force des hommes et des animaux; mais elle est indifférente aux conséquences que nous avons à tirer des principes précédents. Voyez ce qu'on a dit à la fin de l'art. (495).

SECTION III.

DE L'HYDROSTATIQUE.

Introduction, et caracteres qui distinguent les fluides des corps solides.

508. Nous avons dit, dans la récapitulation des principes généraux de la mécanique qui termine les notions préliminaires de ce traité, que la théorie des fluides dérivoit des mêmes sources que celle des corps solides; cette section et la suivante fourniront la preuve et le développement de cette vérité. On sentira de plus, en voyant combien l'intelligence de ces deux sections aura été préparée par la lecture de celles qui les précedent, qu'il étoit avantageux de mettre à la tête de cet ouvrage un traité qui présentât l'ensemble de toutes les parties de la mécanique. Le rapprochement de ces parties, qui, chacune en particulier, ne sont que le développement d'un petit nombre de principes communs; ce rapprochement, dis-je, forme un tout d'où il résulte une lumiere et une instruction qu'on ne trouveroit pas dans une étude isolée qui ne seroit point assujettie à une méthode uniforme et comparative.

La théorie des fluides se déduit des mêmes principes que celle des corps solides : avantages de la méthode suivie dans ce traité.

Ces avantages sont grands, sans doute, puisqu'ils favorisent la marche de l'esprit et le développement des idées; mais il en est d'autres dans le parti que nous avons pris de réunir dans ce volume toutes les parties de la mécanique, qu'on ne trouvera pas moins précieux, et qui sont de préparer les lecteurs à la discussion des questions théoriques que l'architecture hydraulique peut offrir, quelles que soient ces questions. On verra en effet que les travaux hydrauliques en présentent autant sur la théorie des corps solides que sur celle des fluides : ainsi nous ne pouvions pas trouver d'occasion plus favorable de rassembler en un seul corps de doctrine toutes les connoissances de mécanique théorique que doit avoir un ingénieur constructeur.

509. La science des fluides peut être regardée aujourd'hui comme la partie des sciences naturelles qui a fourni matiere aux

Point de vue sous lequel il faut considérer les fluides en mécanique.

Digitized by Google

recherches les plus délicates et aux découvertes les plus sublimes; les seules découvertes de la composition et de la décomposition de l'eau suffiroient pour constater la prééminence de notre siecle sur tous ceux qui l'ont précédé, et pour lui assurer la gloire d'avoir arraché à la nature des secrets sur lesquels toute l'antiquité n'avoit pas même osé l'interroger. Le point de vue sous lequel nous les allons considérer n'est pas, à beaucoup près, aussi étendu que celui que comportent la plupart des sciences dont on vient de parler, telles que la physique particuliere ou la chymie. Il suffit, en mécanique, d'avoir égard à leur équilibre ou à leur mouvement, et par conséquent de les regarder comme matériels, pesants, et compressibles ou incompressibles.

Il est nécessaire de leur assigner une propriété qui les distingue des corps solides, et qui puisse donner prise au calcul.

Mais ces qualités étant celles qui sont communes à tous les corps, tant fluides que solides, il est nécessaire d'en assigner une particuliere aux fluides, qui, quoique dérivée des premieres, établisse néanmoins, entre eux et les corps solides, une ligne de démarcation absolue, et soit susceptible d'être mesurée facilement. On ne rempliroit pas entièrement ces conditions, en disant que les fluides sont composés de parties infiniment tenues, mobiles, et faciles à séparer : de pareilles propriétés, quoique suffisantes pour distinguer les fluides des corps solides, ne fournissent pas assez immédiatement une équation; mais elles donnent lieu à un phénomene très propre à caractériser les corps éminemment doués de ces propriétés, et qui en même temps donne prise au calcul. Nous nous conformerons, sur cet objet fondamental et important, à ce qu'a écrit le célebre Euler dans le 13e volume des *Nouveaux Commentaires de Saint-Pétersbourg.*

510. Ce grand géometre choisit pour phénomene primordial la propriété suivante. « Si un fluide, pressé par une puissance « quelconque, demeure en équilibre, la pression se distribue « dans toute la masse de ce fluide d'une maniere telle que toutes « ses parties sont également pressées. »

Quelle est la propriété qu'Euler a choisie pour cet effet.

Développement de cette propriété.

Pour éclaircir cette proposition générale par des exemples, soit (*fig.* 122) un vase DB rempli d'un fluide non pesant, auquel on suppose d'abord une ouverture *ab* fermée par un bouchon ou *piston* A (*), auquel est appliquée une puissance P dirigée perpendiculairement à l'orifice *ab;* ce fluide étant en

(*) On nomme *piston* un corps cylindrique qui glisse dans le vuide intérieur d'un cylindre creux, de maniere à le boucher avec la plus grande exactitude. Cette notion suffit à présent ; car nous exposerons, dans la suite de ce traité, le mécanisme des pistons avec le plus grand détail.

Digitized by Google

équilibre, il en résultera les propriétés suivantes : 1°. Tous les éléments de la surface intérieure du vase, supposés égaux, éprouveront, normalement, des pressions égales. 2°. S'ils ne sont pas supposés égaux, ils éprouveront des pressions proportionnelles à leur étendue : ainsi le vase étant supposé avoir latéralement une ouverture *de*, si on applique à cette ouverture un piston B, il faudra, pour empêcher le fluide de s'échapper par cette ouverture, appliquer au piston une puissance Q qui soit à l'ouverture *de*, comme la puissance P est à l'ouverture *ab*. 3°. Si un corps M est plongé dans le fluide, la pression des différentes parties de la surface de ce corps sera soumise aux mêmes loix que celle des différentes parties des parois intérieures du vase. Ainsi, en supposant (*fig.* 123) que le corps M, plongé dans le fluide, soit un vase vuide percé d'un trou *de*, auquel seroit adapté un piston B, il faudroit, pour empêcher le fluide de s'introduire dans le vase M, appliquer au piston B une puissance Q qui soit à l'orifice *de*, comme la puissance P est à l'orifice *ab*.

Si le vase DB qui renferme le fluide (*fig.* 124) est fermé de tous les côtés, mais que le vase M vuide, plongé dans ce fluide, soit percé de deux orifices *ab*, *cd*, auxquels soient adaptés deux pistons A et B, poussés du côté du fluide par deux puissances P et Q, il est évident qu'il faudra, entre ces puissances et les orifices auxquels sont adaptés les pistons, les mêmes proportions que ci-dessus.

Euler la regarde comme caractérisant spécialement les fluides.

511. Voilà donc la propriété caractéristique des fluides déduite d'un phénomene d'où résulte une propriété mensurable. *Ex hoc phænomeno,* dit Euler, *colligimus naturam fluidorum aptissimè in ea proprietate collocari, quòd quælibet pressio iis applicata per totam eorum massam ita diffundatur, ut omnes eorum partes eamdem sentiant pressionem, quatenus scilicet fluidum in æquilibrio persistit;* c'est-à-dire, « Nous concluons de ce phénomene « qu'on peut très bien faire consister la nature des fluides dans « la propriété suivante ; savoir que, lorsqu'ils éprouvent une « pression quelconque, cette pression se distribue dans toute « leur masse, de maniere que, tant qu'ils demeurent en équi- « libre, toutes leurs parties sont également pressées. »

Détails dans lesquels il est entré à son sujet.

512. Euler entre dans des détails pour faire voir que cette propriété distingue absolument les fluides de tous les autres corps ; qu'aussitôt qu'une portion de matiere en est douée, elle doit être à l'instant rangée dans la classe des fluides, et que nul corps ne peut être censé tel, s'il n'en jouit pas pleinement. Il

Digitized by Google

ajoute que le principal avantage de cette propriété est qu'on en peut déduire toutes les loix tant de l'équilibre que du mouvement des fluides (*).

La portion plus ou moins grande qu'ont de cette propriété tous les corps de la nature, peut servir à les classer; et sous cet aspect, la chaîne qu'ils forment a les corps parfaitement durs à une de ses extrémités, et les fluides parfaits à l'autre extrémité.

513. Tous les différents corps participent plus ou moins de cette propriété, selon qu'ils approchent plus ou moins de la nature des fluides. Sous cet aspect, ils forment une longue chaîne non interrompue, dont les corps, parfaitement durs, occupent une des extrémités, et les fluides parfaits l'autre extrémité. Si un corps dur est posé sur un plan, ou renfermé dans un vase, et qu'il soit poussé par une puissance, il ne pourra presser le plan ou le fond du vase que dans une seule direction. Supposons ce corps susceptible de compression, ou substituons un amas de molécules tel que seroit un monceau de sable: alors, en supposant la puissance qui comprime dirigée contre le fond du vase, ce fond éprouvera, à la vérité, la plus grande compression; mais l'expansibilité de la matiere lui fera exercer une pression latérale contre les parois du vase, qui sera telle que, s'il y avoit un trou à ces parois, il en sortiroit du sable. Cette pression latérale augmentera à mesure que les particules de la matiere renfermée dans le vase seront plus tenues, plus divisibles, etc., et s'approchera d'être égale à celle qu'éprouve le fond du vase. Les substances qu'on peut appeller *demi-fluides*, comme sont les matieres visqueuses ou gluantes, seront encore plus près de l'égalité de pression que les précédentes. Ainsi cette égalité de pression est comme la limite dont les différentes substances approchent à mesure qu'elles participent davantage de la nature des fluides, qui seuls jouissent de cette propriété dans toute son étendue.

Les substances qui forment les points extrêmes de la chaîne précédente n'existent pas, rigoureusem. parlant, dans la nature: cas où cette considération doit engager à modifier, d'après l'expérience, la théorie des fluides.

514. Les corps parfaitement durs, qui forment une des extrémités de la chaîne dont nous venons de parler, n'existent pas dans la nature; et, rigoureusement parlant, on en peut dire autant des fluides qui forment l'autre extrémité de la chaîne. Néanmoins il faut dire que les fluides que nous connoissons approchent infiniment plus de l'état de fluidité parfaite, que les corps les plus durs n'approchent de la parfaite dureté. Ainsi, dans un grand nombre de cas, on peut, pour la pratique, adopter les résultats de la théorie tels qu'on les a déduits des notions ci-dessus établies: cette possibilité a lieu principalement lorsqu'il s'agit de l'équilibre. Dans les autres cas qui ont principalement

(*) Euler n'est pas le seul qui ait pris cette propriété pour base de la théorie des fluides; plusieurs auteurs l'ont également adoptée, et entre autres M. d'Alembert, dans son *Traité de l'équilibre et du mouvement des fluides.*

rapport

Digitized by Google

rapport au mouvement des fluides, il faut que l'expérience vienne à l'appui de la théorie, et nous y aurons en effet recours toutes les fois que cela sera nécessaire.

Division des fluides en compressibles et incompressibles ; mesure de leur densité.

515. Les principaux fluides auxquels nous aurons à appliquer les principes établis dans cette section et la suivante, sont l'eau et l'air. Ces deux substances, parmi toutes les qualités qui les distinguent, ont chacune une propriété principale qu'il faut exposer.

L'eau et l'air ont chacun une propriété principale qui les distingue.

Si une quantité d'eau est renfermée dans un vase de capacité et de forme quelconque, et qu'on l'y comprime avec toute la force qu'on voudra, jamais on ne pourra la réduire à occuper un espace moindre que celui qu'elle occupoit d'abord. Tout le monde connoît les expériences qu'on a faites pour constater cette propriété ; on sait que l'eau étant renfermée dans des globes de métal, quelque percussion ou quelque pression qu'on emploie pour la faire diminuer de volume, on n'y parvient jamais, et que lorsque la résistance qu'elle oppose à de pareils efforts ne lui fait pas briser son enveloppe, elle se fait jour à travers les pores du métal, d'où elle sort en forme de rosée.

Les plus grandes percussions ou pressions qu'on a pu employer n'ont pas été suffisantes pour diminuer le volume d'une portion d'eau donnée.

516. Il n'en est pas de même de l'air ; il est susceptible de compression et de dilatation d'une maniere sensiblement indéfinie. S'il est renfermé dans un vase supposé cylindrique fermé par un piston, on pourra, en employant la force convenable, enfoncer le piston autant qu'on voudra, et réduire l'air à un volume beaucoup plus petit que celui qu'il occupoit d'abord. Au contraire, si le cylindre a la longueur convenable, et qu'on tire le piston en sens contraire, la même portion d'air, qui occupoit d'abord un très petit volume, se répandra uniformément dans tout l'espace parcouru par le piston, quelque grand que soit cet espace.

L'air est au contraire susceptible de condensation et de dilatation d'une maniere sensiblement indéfinie.

517. Pour peu qu'on ait étudié la physique, on connoît les machines dont on se sert pour condenser l'air et pour le raréfier, ou pour faire le vuide ; quelques auteurs appellent la premiere *condensateur*, et la seconde se nomme *machine pneumatique*.

Machines avec lesquelles on condense et on dilate l'air.

518. Le vin, le mercure, et plusieurs autres liqueurs, ont, comme l'eau, la propriété de ne point diminuer de volume, quelque pression qu'on leur fasse éprouver, et toutes ces especes de fluides se nomment *fluides incompressibles*.

Ce qu'on entend par fluides incompressibles.

Digitized by Google

L'incompressibilité absolue des fluides n'est pas démontrée.

519. Il faut cependant observer que cette *incompressibilité* ne doit pas être regardée comme absolue ; d'abord en considérant les expériences qu'on a faites sur les fluides regardés comme incompressibles, on ne peut en conclure autre chose, sinon que les plus grandes forces de percussion ou de pression qu'on a pu y employer n'ont pas diminué le volume du fluide en expérience d'une quantité physiquement appréciable, mais que rien ne prouve que cette quantité ait été absolument nulle: ensuite cette diminution de volume, que nos machines n'ont pu opérer, s'opere très sensiblement par le changement de température ou par l'action du froid et du chaud. Tout le monde connoît l'instrument appellé *thermometre*, au moyen duquel on mesure les degrés de chaleur et de froid par la dilatation ou la condensation de l'esprit de vin ou du mercure.

La chaleur et le froid changent sensiblement leur volume ; instrument avec lequel on mesure ce changement.

Ce qu'on entend par fluides élastiques. L'élasticité de l'air ne doit être regardée que comme sensiblement indéfinie.

520. Les fluides qui, comme l'air, sont susceptibles de dilatation et de condensation, se nomment *fluides élastiques*. Cette élasticité ne doit pareillement être regardée que comme sensiblement ou physiquement indéfinie ; car il y a vraisemblablement un terme de condensation auquel l'air ne seroit plus susceptible d'être réduit à un moindre volume, tout comme il y a un degré d'expansion ou de raréfaction auquel son élasticité l'abandonne, et où une portion d'air déterminée étant parvenue n'est plus capable d'occuper un plus grand espace.

La chaleur et le froid changent aussi sensiblement le volume des fluides élastiques, et ont une influence très active sur l'élasticité de l'air.

521. L'air est aussi, comme l'eau et les autres fluides incompressibles, susceptible d'être raréfié et condensé par l'action de la chaleur et du froid, indépendamment de l'action de toute autre puissance. On a même éprouvé que ces derniers agents sont bien plus puissants sur l'air que la compression : ce fluide, contenu dans un vase fermé, se dilate ou tend à se dilater très promptement par l'action de la chaleur, son élasticité augmente et le fait agir avec plus de force contre les parois du vase qui le contient.

La masse de l'air, sous un volume donné, dépend de sa pression et de sa température.

522. Nous avons vu (176) que la densité d'un corps étoit le quotient de sa masse par son volume, ou qu'en nommant δ la densité, m la masse, u le volume, on avoit $\delta = \frac{m}{u}$.

Si on suppose le volume u constant, égal par exemple à un pied cube, la densité δ sera proportionnelle à la masse m, et cette masse sera généralement, d'après ce qu'on vient de dire, une fonction de la pression qu'éprouve le fluide, et de la température à laquelle il se trouve.

523. On sait par expérience que la densité de l'air est sensi-

Digitized by Google

blement proportionnelle à la pression qu'il éprouve lorsque sa température est constante, et que, la pression demeurant la même, sa densité diminue de 0,005028, ou $\frac{1}{200}$ environ, lorsque le thermometre de Réaumur monte d'un degré.

Relation entre la variation de la densité de l'air et celle de sa température.

Cette derniere propriété de l'air est variable ; car sa dilatabilité par la chaleur est plus ou moins grande, selon son degré d'humidité ou de sécheresse : ainsi, à la rigueur, la densité de l'air devroit être fonction de trois variables ; savoir, sa pression, sa température, et son état hygrométrique : mais, pour ne pas jeter dans les calculs une complication dont les objets de pratique que nous avons en vue ne retireroient pas de grands avantages, nous lui avons assigné une dilatabilité, par la chaleur, moyenne entre celles qui résultent de plusieurs expériences authentiques.

L'état hygrométrique de l'air modifie cette relation ; la densité de l'air, fonction de trois variables.

524. D'après les résultats précédents, pour être en état d'assigner la pesanteur d'un volume donné d'air dont la pression et le degré de chaleur sont connus, il faut avoir pour terme de comparaison un autre volume d'air dont le poids aura été déterminé par expérience à une pression et à une température données.

La pression d'une couche d'air atmosphérique libre se mesure, par la hauteur du mercure, dans un barometre placé dans cette couche : nous en verrons bientôt la raison. Or, en prenant une valeur moyenne entre les résultats de plusieurs expériences faites avec grand soin, on trouve que le barometre, étant à près de 28 pouces, et le thermometre de Réaumur à environ 11 degrés, un pied cube d'air pese 0,085456 de livre, ou 1 once 2 gros 67 $\frac{56}{100}$ grains (*).

Instrument avec lequel on mesure la pression de l'air ; poids moyen d'un pied cube d'air à une pression et à une température donnée.

525. La densité de l'eau n'est susceptible de variation que relativement à la température, puisqu'on a vu précédemment qu'elle doit être rangée dans la classe des fluides incompressibles.

Cause qui peut faire varier la densité de l'eau ; loi de cette variation.

La variation due à cette cause est, d'après une expérience de M. l'abbé Nollet, de 0,04, ou $\frac{1}{25}$, depuis 0 du thermometre de Réaumur jusqu'à 80 degrés ; en sorte que 25 pouces cubes

(*) Voici les résultats des expériences les plus authentiques faites sur le poids de l'air et sur sa dilatabilité par la chaleur : le mérite des physiciens et des chymistes à qui nous les devons est un sûr garant de leur exactitude. Ces résultats pouvant être nécessaires en bien des circonstances, nous avons cru être utiles à ceux qui n'ont pas les différents ouvrages d'où ils sont tirés, en les rapportant. De plus, pour en faciliter la comparaison, nous les avons réduits à des quantités et à des mesures communes : ainsi l'unité de mesure pour la hauteur du barometre est le pouce du pied-de-roi, la graduation du thermometre est celle de Réaumur, et

Digitized by Google

d'eau à la glace en font 26 au terme de l'ébullition. Les différences successives des dilatations correspondantes aux degrés intermédiaires ne sont point égales : elles sont très petites vers le terme de la glace, et vont en augmentant à mesure qu'on s'approche du terme de l'ébullition. (Voyez la note de l'article ci-après.)

Poids du pied cube d'eau douce et d'eau de mer.

526. Nous fixerons à 70 livres le poids moyen d'un pied cube d'eau douce, et à 72 livres le poids moyen d'un pied cube d'eau

l'unité de poids est la livre poids de marc : les poids indiqués sont constamment ceux d'un pied cube de fluide.

Table des poids d'un pied cube d'air à différentes hauteurs du barometre et à différentes températures.

	Hauteur du barometre.	Degré du thermometre.	Poids d'un pied cube d'air.
M. de Lavoisier, *Mémoires de la société royale de médecine*, année 1782, page 569	28, 00	10, 00	0, 086244
M. Brisson a évalué le poids de l'air, d'après cette expérience, dans son *Traité des pesanteurs spécifiques des corps.*			
M. Monge, *Mémoires de l'académie des sciences*, année 1783, page 81.	27, 42	15, 00	0, 082897
M. le chevalier George Schuckburg, dont les expériences sont rapportées dans l'*Essai sur le phlogistique* de M. Kirwan, traduit de l'anglois en françois, avec des notes de MM. de Morveau, Lavoisier, de la Place, Monge, Bertholet, et de Fourcroy, page 37 de l'édition françoise	28, 15	12, 44	0, 085656
		8, 00	0, 087539
	27, 68	12, 44	0, 084205
		8, 00	0, 086193
Poids d'un pied cube d'air rapporté à une hauteur du barometre et à une température moyenne			0, 085456

Les 0, 085456 de livre ci-dessus valent 1 once 2 gros 67, 56 grains.

La dilatation d'un volume donné d'air, correspondante à un degré de variation dans la température, a été évaluée par M. le colonel Roy, cité par M. de Saussure dans ses *Essais sur l'hygrométrie*, second essai, chap. 5, à 0, 005807

Par M. de Saussure lui-même, dans l'endroit ci-dessus cité, à 0, 004244

Par M. Lavoisier, cité dans les notes de l'ouvrage de Kirwan, susmentionné, à $\frac{1}{215}$, ou, en fractions décimales, à 0, 004651

Par MM. Vandermonde, Bertholet et Monge, dans un mémoire sur le fer, inséré dans les recueils de l'académie des sciences, à $\frac{1}{184, 83} =$ 0, 005410

Dilatation moyenne pour un degré de variation dans la température, et applicable principalement depuis dix degrés jusqu'à vingt degrés 0, 005028

Les différences qu'on apperçoit dans les quatre résultats dont la dilatation moyenne de 0, 005028 a été déduite, doivent être attribuées à la plus ou moins grande quantité d'eau que l'air tenoit en dissolution lorsqu'on a fait les expériences. Cette quantité d'eau influe sur la

Digitized by Google

de mer; ce sont les nombres entiers qui approchent le plus des résultats donnés par plusieurs expériences (*).

527. Nous ne parlons pas encore de la densité et des autres propriétés de l'eau réduite en vapeurs; lorsqu'elle est parvenue à cet état, elle sort entièrement de la classe des fluides incompressibles, et produit des effets dont la théorie sera traitée en son lieu avec toute l'attention qu'elle mérite.

De l'eau réduite en vapeurs.

légèreté de l'air et sur la dilatabilité par la chaleur: ainsi, d'une part, elle modifie immédiatement sa densité, et devient, sous cet aspect, comme on le verra après, la principale cause des variations barométriques; de l'autre, elle peut faciliter à la chaleur le moyen de raréfier l'air. On voit en effet, d'après l'expérience du colonel Roy, que la plus grande dilatabilité a été trouvée en Angleterre, où, le barometre étant plus élevé, l'air se trouve plus comprimé et tient plus d'eau en dissolution qu'à Paris: celle qui en approche le plus résulte de l'expérience de M. Monge, faite à Paris: enfin celle de M. de Saussure, faite dans la partie la plus élevée de la France, differe plus de celle de M. Monge que cette derniere ne differe de celle du major Roy; ce qui est conforme à la différence des élévations au-dessus du niveau de la mer.

Ainsi, à la rigueur, la densité de l'air est, comme on l'a dit dans le texte, fonction de trois variables, qui sont la pression, la chaleur et l'humidité; et pour déterminer la loi de cette densité, il faudroit réunir les observations hygrométriques à celles du barometre et du thermometre; mais cette discussion appartient spécialement à la physique et à la chymie.

L'histoire des premieres tentatives faites pour découvrir la pesanteur et les autres propriétés de l'air renferme une des époques les plus intéressantes des progrès de l'esprit humain: il seroit trop long de la rapporter ici; mais il faut consulter les *OEuvres de Pascal*, édition de M. l'abbé Bossut; l'*Histoire des mathématiques*, de M. de Montucla, part. IV, liv. 5; les *Recherches sur les modifications de l'atmosphere*, de M. de Luc, etc.

Il est intéressant d'ajouter que, long-temps avant les premieres découvertes qui ont donné naissance à la saine physique expérimentale, il existoit un manuscrit du docteur Jean Rey, qui vivoit à la fin du quinzieme siecle, dans lequel l'auteur soutient que l'air est pesant, qu'il peut se combiner avec les autres corps, augmenter leur poids, etc. On y trouve encore les principes de physique et de chymie dont la découverte a honoré les temps postérieurs. Le manuscrit est déposé à la bibliotheque du Roi, et l'ouvrage a été imprimé à Paris, en 1777, sous le titre d'*Essais de Jean Rey*, docteur en médecine, etc.

(*) M. Monge évalue (*Mém. de l'acad.*, année 1783) le poids du pied cube d'eau de pluie filtrée, à la température de douze degrés, à. 69, 379232

On trouve, dans l'*Almanach des monnoies* de 1785, qu'un pied cube d'eau, distillée à la température de dix degrés, pese 69, 973524

Une table des pesanteurs spécifiques, faite avec beaucoup de soin, et insérée dans une édition des *Récréations mathématiques d'Ozanam*, totalement refondue, et publiée chez Didot, rue Dauphine, en 1778, porte le poids du pied cube d'eau distillée à. 69, 946200

Poids moyen du pied cube d'eau distillée, rapporté à une température moyenne 69, 766318

Le rapport de ce poids avec celui de l'air précédemment évalué à 0, 085456, est, par conséquent, $\frac{69,766}{0,085456} = 816,39$.

On peut, pour l'eau douce ordinaire, porter le poids du pied cube à 70 livres: la table des pesanteurs spécifiques, insérée à la fin de ce volume, contiendra celles de quelques eaux potables de France.

Le poids de 72 livres, attribué au pied cube d'eau de mer, est également le nombre entier qui

Digitized by Google

Rapports du poids de l'eau à celui de l'air sous un même volume.

528. Le rapport du poids de l'eau au poids de l'air, à volume égal et à des hauteurs de barometre et température moyennes, est celui de 816:1. Il est ordinaire, dans les tables de pesanteur spécifique, de prendre l'eau distillée pour terme général de comparaison, en supposant sa pesanteur spécifique égale à l'unité ou à 10000, 100000, etc. C'est d'après cette méthode qu'est formée la table qu'on trouvera à la fin de ce volume, et qui renferme en outre les poids absolus du pied cube de chaque substance.

La pesanteur spécifique de l'eau distillée, prise pour unité ou terme de comparaison.

De l'équilibre des fluides, abstraction faite de la pesanteur et de toute autre puissance analogue.

État où on considerera les fluides dans ce chapitre.

529. L'état où nous allons considérer les fluides est le même que celui dans lequel nous les avons envisagés lorsque nous avons assigné les caracteres qui les distinguent des corps solides: ils seront supposés renfermés dans des vases, et pressés uniquement par l'action d'un piston adapté à un orifice, ainsi que le représente l'une quelconque des figures 122, 123, ou 124. Nous supposerons d'abord le fluide incompressible, et les parois du vase qui le contient inflexibles et inextensibles.

Double mouvement qui tend à produire une puissance poussant un piston adapté à un vase.

530. La force ou la puissance qui pousse le piston tend à

approche le plus des résultats donnés par l'expérience : cette eau pese différemment, suivant les climats; elle est plus pesante dans la zone torride et loin des côtes que dans les mers septentrionales et près des terres. L'eau du lac Asphaltite ou de la mer morte s'éloigne beaucoup des résultats moyens ; car elle pese, suivant M. Brisson, 86, 820963 livres par pied cube.

Quant à la dilatabilité de l'eau relativement à la température, M. l'abbé Nollet a trouvé que, depuis la glace qui fond, jusqu'à l'eau bouillante, l'augmentation totale de volume étoit de 0,04. Les variations de cette augmentation ne suivent pas, comme celles de l'air, une progression arithmétique de degré en degré: M. de Luc ayant comparé un thermometre de mercure avec un thermometre d'eau commune, divisés chacun en 80 parties, depuis la glace qui fond, jusqu'à l'eau bouillante, a trouvé à différentes températures, observées de cinq en cinq degrés sur le thermometre de mercure, les correspondances suivantes:

Mercure.	Eau.	Diff.	Mercure.	Eau.	Diff.	Mercure.	Eau.	Diff.
80	80, 0		55	38, 5		25	7, 3	
75	71, 0	9, 0	50	32, 0	6, 5	20	4, 1	3, 2
70	62, 0	9, 0	45	26, 1	5, 9	15	1, 6	2, 5
65	53, 5	8, 5	40	20, 5	5, 6	10	0, 2	1, 4
60	45, 8	7, 7	35	15, 9	4, 6	5	— 0, 4	0, 6
55	38, 5	7, 3	30	11, 2	4, 7	0	0, 0	—0, 4
			25	7, 3	3, 9			

En adoptant, d'après M. l'abbé Nollet, le résultat de 0, 04 pour l'augmentation de volume depuis la glace qui fond, jusqu'à l'eau bouillante, et faisant attention que chaque degré du

Digitized by Google

produire deux effets; savoir, un mouvement total de translation, tant du vase que du fluide qui y est contenu, et un mouvement intérieur des parties du fluide et des corps qui y seroient plongés.

La considération du premier de ces mouvements, celui de translation du vase, inutile à notre objet; moyen de l'éluder.

Le premier de ces effets est étranger à l'objet que nous avons en vue, et, pour en rendre la considération nulle dans les recherches de l'espece d'équilibre dont il s'agit ici, on peut supposer que le piston A (*fig.* 125) est pressé par un ressort dont l'extrémité opposée à ce piston est contre-buttée par un arrêt *ab* tenant au vase VZ par les deux brides inextensibles *ad*, *be*. Dans cet état, il est évident que le piston étant supposé immobile, le vase n'aura aucun mouvement; ce qui n'arriveroit pas si l'effort du ressort en B étoit contre-butté par un corps qui ne tînt pas au vase.

531. La question ainsi établie, il s'agit 1°. de démontrer que soit le vase, soit les corps plongés dans le fluide, soit enfin les parties du fluide, seront dans l'état d'équilibre ou de repos, quelle que soit l'action du ressort contre le piston; 2°. de déterminer la pression qu'éprouvera une portion quelconque de la surface de la paroi intérieure du vase, ou de la surface d'un corps plongé dans le fluide.

La démonstration de la premiere proposition se déduit de la propriété dans laquelle nous avons fait consister le caractere

thermometre d'eau représente $\frac{1}{80}$ ou 0, 0125 de cette augmentation, et par conséquent 0, 0125 × 0, 04, ou 0, 0005 du volume primitif d'eau à la température de la glace qui fond, on pourra avoir les rapports de ce volume à ses différents accroissements. A 10° l'augmentation de volume est à peine sensible, n'étant que 0, 2 divisions, ou 0, 0001 du volume total; à 20°, cette augmentation est de 4, 1 divisions, ou 0, 00205 du volume total : on pourroit donc, depuis 10 degrés jusqu'à 20 degrés, c'est-à-dire à la température moyenne, prendre 0, 000205 pour le rapport moyen de la variation du volume correspondante à une variation d'un degré du thermometre.

Pour parvenir sur cet objet à une détermination bien exacte, il auroit fallu avoir égard à la contraction et à la dilatation du tube et de la boule de verre dans laquelle l'eau étoit renfermée. C'est à ces dernieres causes qu'on doit attribuer l'irrégularité de la variation du volume qui a lieu aux environs du terme de la glace. En effet, M. Monge pense, avec toute apparence de raison, que la diminution du volume de l'eau est graduelle depuis l'eau bouillante jusqu'à la glace; mais qu'aux approches de ce terme, les variations de sa diminution de volume devenant presque nulles, et la contraction du vase qui la renferme variant dans un plus grand rapport, le volume du fluide s'accroît en apparence par l'effet combiné de ces deux causes.

Lorsque la congélation s'effectue, l'augmentation de volume a lieu, et peut être évaluée à $\frac{1}{80}$; mais cet effet doit être censé s'opérer dans un instant. Les physiciens sont assez d'accord de l'attribuer au dégagement de l'air, que l'eau, parvenue à la température de la glace, n'est plus capable de tenir en dissolution : cet air reprend alors son état atmosphérique, et forme, en développant son élasticité dans l'eau, des bulles qui augmentent le volume de ce fluide.

Nous parlerons, quand il en sera temps, de la dilatation et de la force expansive de l'eau réduite en vapeurs.

Digitized by Google

Lorsque tous les éléments de la surface d'un corps seront pressés normalement par des puissances proportionnelles à ces éléments, ce corps demeure en équilibre.

distinctif des fluides, et de laquelle il résulte, comme on a vu (510), que tous les éléments de la surface des corps en contact avec le fluide éprouvent normalement des pressions proportionnelles à la grandeur de ces éléments : or, tout corps ainsi pressé doit demeurer en équilibre, comme on va le voir.

Démonstration de cette proposition, de laquelle il résulte qu'un corps plongé dans un fluide en équilibre est aussi en équilibre, quelle que soit la pression du fluide.

Soit (*fig.* 126, n° 2) PR le profil d'un corps qui a tous les points de sa surface rapportés à trois co-ordonnées x, y, z, de la même maniere que nous l'avons fait en plusieurs endroits de cet ouvrage (287); ce profil est supposé parallele au plan des (x, z), et par conséquent perpendiculaire au plan YAX, n° 1, des (x, y), AP étant x, et PM, y. Faisons $PP' = dx$, et $Mm = dy$, le petit rectangle $MM'm'm$ sera égal à $dxdy$. La coupe PR, n°. 2, étant supposée faite par un plan qr qui divise par moitié l'élément de surface $MM'm'm$, cet élément sera la projection commune des éléments de la surface du corps, profilés en os et $o's'$, n° 2, et que nous nommerons s et s'.

Soient σ et σ' les angles que font, avec le plan YAX, les directions des puissances qui pressent normalement les surfaces élémentaires s et s', et qui sont les compléments de ceux formés par ces surfaces avec le même plan, on aura, par la propriété connue des projections orthogonales,

$s : MM'm'm\ (dxdy) :: 1 : \sin.\sigma$, et $s' : dxdy :: 1 : \sin.\sigma'$; d'où $s = \frac{dxdy}{\sin.\sigma}$, et $s' = \frac{dxdy}{\sin.\sigma'}$. Maintenant nommons P et P' les pressions normales qu'éprouve chacune des surfaces s et s'; ces pressions, décomposées perpendiculairement au plan YAX, seront égales à $P \sin.\sigma$ et $P' \sin.\sigma'$; mais, par la propriété fondamentale des fluides, on a $P : P' :: s : s'$; donc $P' = \frac{Ps'}{s}$, ou, en substituant les valeurs de s et s', $P' = \frac{P \sin.\sigma}{\sin.\sigma'}$; d'où on tire $P' \sin.\sigma' = P \sin.\sigma$.

Les deux pressions P et P' deviennent donc égales lorsqu'on les décompose perpendiculairement au plan des (x, y); et comme, sous cet aspect, elles sont de plus directement opposées, elles ne peuvent produire aucun mouvement de translation perpendiculairement à ce plan, ni aucun mouvement de rotation autour des lignes paralleles à l'axe des x et à celui de y.

Le raisonnement qu'on vient de faire est toujours juste, quelque part que soit l'élément os, vu qu'il y aura toujours un élément $o's'$ qui lui sera diamétralement opposé par rapport au plan des (x, y) : on peut donc affirmer que toutes les pressions qui

qui s'exercent sur les éléments du corps profilé en PR ne pourront donner à ce corps aucun mouvement de translation perpendiculairement au plan des (x, y), ni de rotation parallèlement à ce plan.

Mais toute la démonstration précédente peut s'appliquer au mouvement considéré tant par rapport au plan des (x, z), que par rapport à celui des (y, z) : donc le corps sera dans un équilibre ou repos absolu par rapport à trois plans co-ordonnés. C. Q. F. D.

Évaluation de la pression absolue qu'éprouve une portion de la surface d'un corps plongé dans un fluide.

532. La pression absolue qu'éprouve la surface, ou une portion de la surface du corps, est aisée à évaluer ; car soit S la surface profilée en *or* (*fig.* 125), formant l'extrémité intérieure du piston A, et Π la valeur absolue de la puissance qui pousse ce piston ; un élément de la surface d'un corps en contact avec le fluide est, comme on a vu, égal à $\frac{dxdy}{\sin.\sigma}$, σ étant le complément de l'angle qu'il forme avec le plan des (x, y) ; si on nomme p la pression normale qu'éprouve cet élément, on a $S : \Pi :: \frac{dxdy}{\sin.\sigma} : p = \frac{\Pi}{S} \cdot \frac{dxdy}{\sin.\sigma}$; ainsi $\frac{\Pi}{S} \int \frac{dxdy}{\cos.\sigma} +$ A exprimera la pression de la surface ou de la portion de surface donnée, l'intégrale étant prise entre les limites que comporte leur étendue.

σ étant supposé fonction de x, ou y, on pourra d'abord intégrer $\frac{\Pi}{S} \frac{dxdy}{\sin.\sigma}$ par rapport à y seulement, et on aura la pression de la zone projetée en PMM'P' (*fig.* 126), qui, intégrée ensuite par rapport à x, donnera la pression de la portion de surface projetée dans l'espace APMN.

Cas où la portion de surface pressée est plane.

533. Si la surface dont on veut évaluer la pression est plane, alors, nommant S' cette surface, la pression cherchée sera $\frac{\Pi}{S} S'$.

La théorie précédente s'applique également aux fluides incompressibles et aux fluides élastiques ; effets qui distinguent les derniers des premiers lors de la compression.

534. Tout ce que nous venons de dire sur les fluides incompressibles s'applique, sans restriction, aux fluides élastiques lorsque le piston est supposé parvenu à l'état de repos. C'est dans la maniere dont il y parvient que consiste la différence entre les deux especes de fluides. Dans le cas des fluides incompressibles, le vase étant supposé plein, le piston s'arrête à l'orifice même, quelque grande que soit la puissance qui le pousse ; mais lorsque le fluide est élastique, le piston entre jusqu'à ce que l'espace occupé par la partie de ce piston, introduite dans le vase, diminue assez l'espace occupé par le fluide pour que l'élasticité de ce fluide, ainsi augmentée par

Digitized by Google

la compression, puisse faire équilibre à la puissance qui pousse le piston.

On voit que, suivant la plus ou moins grande élasticité du fluide, ou dans le cas où il seroit comprimé par d'autres agents que le piston, l'enfoncement de ce piston peut être positif, nul ou négatif.

L'élasticité de l'air est proportionnelle à la puissance comprimante, la réaction résultante de cette élasticité est égale à la même puissance comprimante; comme on peut mesurer l'élasticité.

535. L'élasticité de l'air est, ainsi que sa densité, proportionnelle à la puissance comprimante (la chaleur étant supposée constante), et la réaction qui résulte de cette élasticité est, dans le cas de l'équilibre, précisément égale à cette puissance: ainsi l'élasticité peut, comme la densité, s'évaluer, dans tous les cas, par relation avec l'état de l'air, supposé comprimé par un poids donné, son état étant, dans ce cas particulier, pris pour terme de comparaison avec les différents états où il peut être dans tout autre cas.

Des cas où les fluides sont renfermés dans des vases flexibles et extensibles.

536. Nous avons supposé dans tout ce chapitre que les parois du vase étoient inflexibles et inextensibles: si elles ne l'étoient pas, elles prendroient d'abord la forme convenable à l'équilibre, et alors les choses pourroient être considérées dans le même état où nous les avons supposées.

La recherche de la courbure que prendroient dans ce cas les parois du vase fournit matiere à des problêmes curieux qui ont de l'analogie avec ceux que nous avons résolus sur la caténaire (art. 274 et suivants): le peu d'application que nous aurions à en faire dans la suite de cet ouvrage nous engage à les supprimer; d'ailleurs ceux qui voudront s'en occuper pourront profiter de l'esprit de la méthode employée dans les articles qu'on vient de citer, ou consulter l'*Hydrodynamique* de M. l'abbé Bossut, édition de 1786, tome I, page 49 et suivantes.

De l'équilibre des fluides dont les parties sont soumises à l'action de puissances quelconques.

Chaque particule d'un fluide soumis à l'action de puissances variables, est sollicitée par deux especes d'impulsion, l'une provenant des puissances, l'autre de la pression du fluide, qui doivent se détruire dans le cas d'équilibre.

537. Lorsque les différentes parties d'un fluide sont soumises à l'action de puissances supposées variables d'un point à l'autre, chaque élément de la masse de ce fluide doit être considéré comme sollicité au mouvement par deux especes d'impulsion: la premiere est due à l'action des puissances qui agissent immédiatement sur cet élément; la seconde dérive de la pression qu'exerce sur lui la masse fluide dont il est environné. Or, dans l'état d'équilibre, ces deux impulsions doivent se détruire, et c'est ce qu'il s'agit d'exprimer analytiquement, afin d'avoir une

Digitized by Google

équation qui exprime aussi généralement qu'il est possible les conditions de l'équilibre des fluides.

Recherche d'une équation qui exprime la condition précédente.

538. Supposons que chaque point d'une masse fluide soit rapporté à trois co-ordonnées x, y, z; plaçons en A (*fig.* 127) l'origine de ces co-ordonnées. Soient AX l'axe des x, AY celui des y, et AZ, supposée perpendiculaire au plan YAX, celui des z; YAX sera le plan des (x, y), ZAY le plan des (y, z), et ZAX celui des (x, z). Faisons $AP = x$, $PM = y$, et $M''N = PQ = z$.

Soit $MM'm'm$ le plan d'une portion infiniment petite du fluide, supposée un parallélipipede, dont les faces sont paralleles aux plans co-ordonnés, $NN'n'n$ son élévation sur le plan des (y, z), et $QQ'q'q$ son élévation sur le plan des (x, z): on aura $PP' = MM' = dx$, $M''m'' = NN' = dy$, $Nn = Qq = dz$, et la solidité du parallélipipede sera $dxdydz$; ainsi δ étant sa densité, sa masse sera égale (176) à $\delta dxdydz$.

Les puissances qui agissent sur l'élément $\delta dxdydz$ peuvent toujours se réduire à trois, dont les directions seroient paralleles aux axes des x, des y et des z, et que nous nommerons p, p', p'': d'après cela, les produits $p\delta dxdydz$, $p'\delta dxdydz$, et $p''\delta dxdydz$, représenteront les efforts faits parallèlement aux axes des x, des y et des z, par l'élément $\delta dxdydz$, en vertu des puissances qui l'animent.

D'un autre côté, nommons P la pression qui s'exerce à un point quelconque du fluide, c'est-à-dire l'équivalent du poids qui supporteroit l'unité de surface sur un plan horizontal, chargé de maniere que chacun de ses points fût autant pressé que celui auquel on attribue la pression P dans le fluide. On voit que P varie d'un point à l'autre du fluide, et on pourra généralement le regarder comme une fonction des trois co-ordonnées x, y et z; et nommant $\varphi(x, y, z)$ cette fonction, on aura $dP = d[\varphi(x, y, z)]$; mais on sait que la différentielle d'une quantité P, composée de trois variables x, y et z, est la somme de trois produits; le premier produit est celui de dx par une quantité variable que nous nommerons $\left(\frac{dP}{dx}\right)$, c'est-à-dire *différentielle de* P *par rapport à* x *divisée par* dx; les deuxieme et troisieme produits sont ceux de dy et dz, par des quantités variables analogues à la premiere, et que nous nommerons $\left(\frac{dP}{dy}\right)$ et $\left(\frac{dP}{dz}\right)$, c'est-à-dire *différentielle de* P *par rapport à* y *divisée par* dy, et *différentielle*

Digitized by Google

de P *par rapport à z divisée par z* (*); ainsi on aura $dP = \left(\frac{dP}{dx}\right) dx + \left(\frac{dP}{dy}\right) dy + \left(\frac{dP}{dz}\right) dz$.

D'après la notion que nous venons de donner des différentes parties de cette différentielle, on voit que $\left(\frac{dP}{dx}\right) dx$ exprime la quantité dont la pression P varie parallèlement à l'axe des x, c'est-à-dire depuis M jusqu'en M': elle est donc l'excès de la pression qui s'exerce en M' sur celle qui s'exerce en M, c'est-à-dire la partie de l'impulsion due à l'action du fluide ambiant qui doit contre-balancer la partie de l'action des puissances qui agit parallèlement à l'axe des x. Or cet excès de pression $\left(\frac{dP}{dx}\right) dx$ agit sur un rectangle qui a $Mm = NN'$ pour base, et Nn pour hauteur : l'effort qui en résulte est donc égal à $\left(\frac{dP}{dx}\right) dx\,(NN' \times Nn) = \left(\frac{dP}{dx}\right) dxdydz$. Cet effort doit, d'après ce qu'on vient de dire, contre-balancer celui qu'exercent les puissances parallèlement à AX, qui est, comme on l'a vu plus haut, $p\delta dxdydz$: on a donc $\left(\frac{dP}{dx}\right) dxdydz = p\delta dxdydz$, ou $\left(\frac{dP}{dx}\right) = p\delta$.

On prouvera, par un raisonnement absolument semblable, que $\left(\frac{dP}{dy}\right) = p'\delta$, et que $\left(\frac{dP}{dz}\right) = p''\delta$, et, substituant ces valeurs dans l'équation $dP = \left(\frac{dP}{dx}\right) dx + \left(\frac{dP}{dy}\right) dy + \left(\frac{dP}{dz}\right) dz$, on aura, pour l'équation fondamentale de l'équilibre des fluides, dont les parties sont soumises à l'action de puissances quelconques,

Équation générale de l'équilibre des fluides.

539. $dP = \delta\,(pdx + p'dy + p''dz)$.

Il y a une infinité de cas où l'équilibre des fluides ne peut exister.

540. Il faut, pour que l'équilibre ait lieu, que l'équation $dP = \delta\,(pdx + p'dy + p''dz)$ soit possible ; et comme, à cause du nombre de variables, cette possibilité ne peut avoir lieu que sous certaines conditions, on voit qu'il y a une infinité de cas où l'équilibre ne peut exister.

Intégrabilité qui a lieu lorsque les puissances tendent à un ou plusieurs centres, et sont fonctions des distances à ces centres.

En général, lorsque les parties du fluide tendent à un ou plusieurs centres, et que les puissances qui les animent sont fonctions des distances à ces centres, l'expression $pdx + p'dy$

(*) Cette explication n'est ici que pour les lecteurs qui n'ont du calcul intégral que les notions les plus élémentaires : car tous les autres verront sur-le-champ que la notation dont il s'agit ici est celle adoptée en pareil cas par tous les géomètres, et qu'on doit à M. Fontaine.

Digitized by Google

$+ p''dz$ est toujours une différentielle exacte : en sorte qu'on a $\left(\frac{dp}{dy}\right) = \frac{dp'}{dx}$, $\left(\frac{dp}{dz}\right) = \left(\frac{dp''}{dx}\right)$, et $\left(\frac{dp'}{dz}\right) = \left(\frac{dp''}{dy}\right)$; ce qui est la propriété générale des différentielles exactes exprimées au moyen de la notation indiquée art.(538).

La densité, fonction des trois co-ordonnées de l'équation générale.

541. La densité δ est généralement, comme on l'a vu précédemment (522), fonction de la pression et de la chaleur, qui elles-mêmes peuvent varier pour chaque point du fluide, et par conséquent être fonctions des trois co-ordonnées x, y et z. Lorsque le fluide est incompressible, la densité ne dépend que de la chaleur qu'on peut supposer constante.

Cas où le fluide en equilibre est renfermé dans un vase ; ce qu'on doit entendre généralement par surface *de niveau*.

542. On a supposé, dans ce qui précede, que le fluide étoit indéfini, parceque la condition d'être contenu dans un vase n'influe pas sur la détermination de la pression, mais empêche seulement que le fluide s'écoule. On peut, si l'on veut, le supposer circonscrit dans des limites, ou renfermé dans un vase, et alors, d'après la détermination des conditions de l'équilibre, on évaluera la pression latérale qu'éprouve chaque point de la surface intérieure du vase, et réciproquement la force que doit avoir le vase ou tuyau qui renferme le fluide pour résister à cette pression, et la puissance qu'il faudroit appliquer à un piston fermant une ouverture pour empêcher le fluide de s'écouler : nous ferons ces évaluations dans le cas des fluides pesants. Il peut arriver que, quelque part, la pression s'évanouisse, de maniere que le fluide n'ait pas besoin d'être retenu et se tienne naturellement en équilibre ; sa surface, en cet endroit, se nommera *surface de niveau*, et sera considérée comme une de ses surfaces extrêmes.

Équation de l'équilibre des fluides animés par des puissances dirigées à un centre fixe, et fonctions des distances à ce centre.

543. La chaleur étant constante, faisons la puissance qui anime chaque particule du fluide fonction de la distance de cette particule à un centre fixe vers lequel elle est supposée dirigée ; nommons φ cette fonction, r la distance variable, et supposons l'origine des co-ordonnées au centre fixe ; on voit aisément que, pour décomposer φ parallèlement à l'axe des x, il faut faire la proportion $r : \varphi :: x : \frac{x\varphi}{r} = -p$; on fait p négative, parceque sa direction doit être opposée à celle de $\frac{x\varphi}{r}$. On trouvera d'une maniere semblable $p' = -\frac{y\varphi}{r}$ et $p'' = -\frac{z\varphi}{r}$. Substituant ces valeurs dans l'équation $d\mathrm{P} = \delta(pdx + p'dy + p''dz)$, il vient $d\mathrm{P} = -\frac{\delta\varphi}{r}(xdx + ydy + zdz)$.

544. Pour déterminer dans ce cas, et en supposant δ fonc-

Digitized by Google

Dans le cas précédent les points également éloignés du centre fixe sont également pressés, et la surface de *niveau* est une surface sphérique.

tion de r, tous les points du fluide qui éprouvent la même pression, il faut faire P constante, ou $dP = 0$; alors φ et r sont aussi constantes, puisque P est une fonction φ de r, δ l'est pareillement; ainsi tous les points également pressés sont à une même distance du centre fixe, et réciproquement: c'est ce que confirme le calcul; car $dP = 0$ donne $xdx + ydy + zdz = 0$, et en intégrant, $x^2 + y^2 + z^2 = A^2$, équation qui appartient à une surface sphérique dont A seroit le rayon. Il suit de là que la surface extrême ou *de niveau* qui termine le fluide, et où la pression devient nulle, est celle d'une sphere.

La même chose a lieu pour les fluides élastiques; application des loix précédentes à la pesanteur.

545. Cette conclusion a lieu, soit que le fluide soit compressible ou non, et, quelle que soit la fonction de la distance par laquelle on exprime les puissances, elle ne suppose d'autre condition que la tendance de la direction de ces puissances à un centre fixe. On voit donc qu'en supposant la pesanteur dirigée vers un point qui seroit le même pour toute la terre, la surface des fluides doit, d'après la loi indiquée art. (167), affecter une forme sphérique. C'est en effet ce qui a lieu d'une maniere assez approchée pour être regardée comme vraie dans bien des cas (*). Nous allons, parmi ceux qu'on pourroit traiter, en choisir un qui fournit une application très intéressante pour la pratique de l'architecture hydraulique.

Application de la théorie précédente aux niveaux à bulle d'air et à la pratique du nivellement.

Théorie du tube du niveau à bulle d'air, et évaluation de sa sensibilité.

546. ABCD (*fig.* 128) est le profil d'un vase entièrement fermé, dont la partie ABC est courbée intérieurement en arc de cercle, le centre de ce cercle étant en O. Ce vase renferme une liqueur dont la surface de niveau est profilée en NEn, et qui laisse par conséquent dans le vase le vuide NBnEN. La ligne VOT est une verticale aboutissant au point T, que nous supposerons le centre de la terre et passant par le milieu B de l'arc Nn; XVZ est une droite dont la position est fixe par rapport au rayon BO, et conséquemment par rapport au vase ABCD.

(*) Si on suppose une section de la terre faite dans le plan d'un méridien, le *lieu géométrique* des intersections des normales à la courbe de ce méridien, ou des directions de la pesanteur, sera une courbe que M. Bouguer a nommée *gravicentrique* ou *barocentrique*. Voyez la *Figure de la terre*, premiere et sixieme section, ou, au défaut de cet ouvrage, le *Manuel de trigonométrie pratique*, de l'abbé de la Grive.

Digitized by Google

D'après ce qui a été dit dans l'article précédent, la courbe NEn doit être un arc de cercle qui a son centre en T : faisons le rayon On = r, le rayon Tn = R, et l'arc Bb = a.

Dans la situation où on a supposé le vase, la verticale VT se confond avec le rayon BO : mais si on fait un peu changer ce vase de position, ou que le rayon BO s'incline et prenne la position bO ; alors il fera, avec la verticale eT, un angle OeT, que nous supposerons de 1″, et qu'on pourra regarder comme égal à l'angle ObT, vu que be est censé infiniment petit par rapport à bO. L'angle XVT, formé par la ligne XZ et la verticale VT, deviendra l'angle X′V′T, et variera d'une quantité égale à ObT, puisque XZ, devenu X′Z′, doit toujours avoir la même position par rapport au vase. Enfin en prenant NN′ et nn' égaux à Bb, on aura les points N′ et n' qui, dans la nouvelle position du vase, deviendront les points de rencontre de la surface supérieure du fluide et de la paroi intérieure du vase, et remplaceront, sous cet aspect, les points N et n.

Tout cela posé, on voit qu'il y a une relation entre les rayons BO, ET, la longueur Bb, ou l'un des arcs égaux NN′ et nn', et les angles ObT, bTE, et cette relation peut très aisément s'exprimer par une équation. Nommons l'angle BTb, ω, on aura BOb = 1″ + ω, et la proportion 1″ + ω : ω : : bT : bO : : R : r ; d'où $r = \frac{R\omega}{1'' + \omega}$. Substituons aux angles 1″ et ω des arcs de même valeur angulaire, qui aient le rayon pour unité, le produit Rω sera alors égal à l'arc Ee, pour lequel on peut prendre l'arc Bb ; et comme, dans cette hypothese, 1″ = 0,000004848 1, on aura $r = \frac{a}{0,000004848 1 + \omega} = \frac{a}{0,000004848 1}$, vu que, dans les applications que nous ferons, BO sera très petit par rapport à ET, et qu'ainsi l'angle ETe pourra être négligé par rapport à l'angle OeT.

547. Supposons que la longueur Bb, ou que chacune des longueurs NN′, nn' soit d'une ligne ou de 0 toise, 001157, on aura la longueur du rayon BO, ou $r = \frac{0,001157}{0,000004848} = 238$ toises, 65 : ainsi un dérangement du vase, qui fera varier d'une minute de degré la position du rayon BO ou de la ligne XZ, fera parcourir à chacun des points N et n un espace de 60 lignes ou 5 pouces le long de l'arc ABC, c'est-à-dire le même espace que parcourroit l'extrémité d'un perpendicule ou à-plomb de 1432 pieds de longueur, en s'écartant de la verticale d'une minute de degré. Application de la formule à un exemple.

548. Cette propriété fournit un moyen de rendre extrême-

Digitized by Google

Quelques détails sur le niveau à bulle d'air ; travail intérieur du tube pour rendre sa section longitudinale circulaire.

ment sensibles les plus petits changements de position d'une ligne XZ par rapport à la verticale, et de n'exiger pour cela qu'un appareil très simple et très portatif. L'instrument appellé *niveau à bulle d'air* remplit cet objet : il est composé d'une lunette AB (*fig.* 129) dont l'axe optique représente la ligne YZ; au-dessus ou au-dessous de cette lunette est attaché un tube de métal CD qui renferme un tube de verre travaillé intérieurement, de maniere que la section longitudinale de sa paroi intérieure soit un arc de cercle. Ce tube de verre est entièrement recouvert par celui de métal, à l'exception d'une partie qu'on voit paroître par une ouverture ou fenêtre *de* faite à ce tube de métal. Le tube de verre, scellé hermétiquement aux deux bouts, contient une liqueur qui est ordinairement de l'esprit-de-vin ou de l'éther, et qui n'en remplit pas entièrement la capacité, mais laisse un petit vuide *a b* occupé par l'air : l'instrument doit être disposé de maniere que, lorsque les extrémités N et *n* de la bulle d'air sont également distantes d'un point *m* qui a une position constante sur le tube (*), l'axe optique XZ soit horizontal. Nous donnerons, dans la suite de cet ouvrage, la description et l'usage d'un niveau à bulle d'air, très exact et très commode dans la pratique : l'abondance des matieres que ce volume doit renfermer nous oblige de renvoyer de semblables détails aux volumes suivants (**).

(*) Ce point milieu n'est pas ordinairement marqué sur le tube : mais il y a de chaque côté, et dans l'espace où les extrémités de la bulle se trouvent renfermées dans les différentes températures, un certain nombre de divisions égales, qui sont numérotées, et on regle l'instrument de maniere que l'axe optique de la lunette soit horizontal quand les extrémités de la bulle sont à deux divisions de même numéro.

(**) Nous allons ajouter quelques réflexions propres à faire juger du degré de précision des niveaux à bulle d'air.

Il sembleroit, d'après ce qu'on a dit dans le texte, qu'un niveau à bulle d'air pourroit servir à mesurer les petits angles avec une précision égale à celle d'un secteur dont le rayon seroit égal à celui de la courbure du tube de verre, ou d'un perpendicule de même longueur : mais plusieurs causes l'empêchent d'avoir entièrement cette précision. Voici les deux principales. 1°. Lorsque les extrémités de la bulle d'air ont été une fois rapportées dans une position déterminée du tube à un point intermédiaire *m* également distant de ces extrémités, et que le tube, après avoir été dérangé, revient ensuite à cette même position, on n'est pas sûr que la bulle y revienne aussi ou soit toujours partagée en deux parties égales par le point *m*. Cette petite irrégularité peut être produite par l'adhésion ou le frottement de la bulle contre la paroi du tube : elle dépend de la grandeur de la bulle, de la masse de liqueur que contient le tube, etc. 2°. La coïncidence des points N et *n* qui terminent la bulle, avec des points marqués sur la surface du tube, à égale distance du point *m*, ne peut pas être estimée avec autant de précision que la coïncidence d'un fil à-plomb très fin avec un trait tracé sur du cuivre ou de l'ivoire. Malgré ces inconvénients, comme la coïncidence du fil à-plomb ne peut pas elle-même être estimée avec une rigueur mathématique, et que le balancement insensible du fil, sa grosseur, une petite parallaxe inévitable, rendent toujours l'estime sujette à quelque erreur, on peut, en comparant les erreurs présumables, ou les incertitudes que laissent les

549.

549. Nous parlerons aussi de la pratique du nivellement; et comme la plupart des opérations de ce genre qu'on a à faire pour les travaux hydrauliques exigent beaucoup de précision, il ne faut pas omettre une réduction à faire aux hauteurs données immédiatement par le niveau, et qu'on nomme *réduction du niveau apparent au niveau vrai :* c'est ici le lieu d'en traiter, vu que cette réduction forme une seconde application de la théorie exposée dans le chapitre précédent.

Du niveau apparent, et du niveau vrai.

Soit BD (*fig.* 130) un arc de cercle ayant son centre en D et représentant une petite portion de la courbure de la terre : d'après ce qui est dit art.(545), tous les points de cet arc seront de niveau. Menons au point B l'horizontale BC qui rencontre en C le prolongement de la verticale AD, cette ligne sera celle du niveau *apparent* au point B, et la ligne CD est ce qu'on nomme *la dépression du niveau vrai,* ou son abaissement au-dessous du niveau apparent au point D. On comprend en effet aisément que l'œil placé en B, et regardant dans la direction de l'horizontale BC, menée à ce point B, voit sur la ligne AC

observations faites avec les niveaux à bulle d'air et à perpendicule, déterminer leurs avantages respectifs.

L'expérience a prouvé que, dans un niveau bien fait, dont la bulle a une marche d'environ quinze lignes pour une minute d'inclinaison, l'incertitude sur le vrai lieu de la bulle n'alloit pas à une demi-ligne; ce dont on peut s'assurer aisément en pointant la lunette sur un objet très éloigné. D'un autre côté, la coïncidence d'un fil à-plomb ne peut pas laisser une incertitude moindre que $\frac{1}{30}$ de ligne, c'est-à-dire environ double de l'incertitude que laisse la coïncidence observée avec une alidade, et qu'on évalue à $\frac{1}{15}$ de ligne à-peu-près. D'après cela, le rayon du tube, dont la bulle a quinze lignes de marche pour une minute d'inclinaison, étant de 358 pieds, pour connoître quelle est la longueur du perpendicule qui donneroit la même précision, il faut faire la proportion $\frac{1}{30} : \frac{1}{15} :: 358$ est à la longueur cherchée qu'on trouve être de 14,32 pieds.

Cette longueur de perpendicule est beaucoup trop grande pour pouvoir être adaptée à un instrument portatif, et la mobilité qu'on a supposée à la bulle du niveau à bulle d'air, de même précision, n'est point trop grande, et peut même être augmentée. On voit donc que, malgré les causes d'irrégularité de ce dernier niveau, il est encore très préférable au niveau à perpendicule pour la commodité et la précision : cette vérité sera encore développée dans la description détaillée que nous ferons de cet instrument.

Il ne faut pas perdre de vue que les avantages que nous attribuons au niveau à bulle d'air supposent que la courbe longitudinale du tube est circulaire; sans cela, lorsque le froid ou la chaleur, en condensant ou en raréfiant la liqueur, agrandiroit ou diminueroit la bulle, elle ne s'étendroit ou ne se raccourciroit pas uniformément des deux côtés; alors le point qui la sépare en deux ne pourroit pas servir à remettre la lunette dans la position horizontale. Cette source d'erreurs est trop considérable pour pouvoir être négligée; et tant qu'on a employé les tubes de verre tels qu'ils sortoient des verreries, les niveaux à bulle d'air ont été, pour la plupart, assez imparfaits. M. de Chezy, inspecteur général des ponts et chaussées, a, le premier, donné une méthode pour donner intérieurement aux tubes de verre la forme convenable, que tout ouvrier un peu adroit peut mettre en pratique. Cette méthode consiste à user, avec de l'émeri, la paroi intérieure des tubes sur un cylindre de verre : les procédés de cette opération, les précautions qu'elle exige, la théorie du niveau à bulle d'air, et d'autres objets qui y sont relatifs, se trouvent très bien exposés dans un mémoire de M. de Chezy, inséré parmi ceux présentés à l'académie par les savants étrangers, tome V, page 254.

Digitized by Google

le point C de niveau apparent, au lieu du point D de niveau vrai. Cette longueur CD doit toujours être retranchée des hauteurs observées, avec les modifications dont nous parlerons ci-après, afin d'avoir les vraies différences de niveau ou les vraies différences des distances de deux ou plusieurs points de la surface de la terre au centre de courbure A.

Formule pour trouver l'élévation du niveau apparent au-dessus du vrai.

Pour trouver l'expression de DC, on a $\overline{AC}^2 = \overline{CB}^2 + \overline{AB}^2$: nommant AB, R; BC, a; et CD, x; faisant attention que AC $= R + x$; et substituant, on a l'équation $R^2 + 2Rx + x^2 = a^2 + R^2$. La valeur de l'arc DB est toujours assez petite pour que CD puisse être regardé comme infiniment petit par rapport à AD ou AB : ainsi x^2 peut être censé nul dans l'équation précédente, qui donne, dans ce cas, $x = \frac{a^2}{2R}$.

La valeur moyenne de R peut être considérée (169, *note*) comme égale à 3271794 toises (*): ainsi celle de x pourra être déduite de l'équation $x = \frac{a^2}{2 \times 3271794} = \frac{a^2}{6543588}$, a étant exprimé en toises. On voit que l'élévation du niveau apparent au-dessus du vrai est proportionnelle au quarré de la distance, et, en supposant cette distance de mille toises, on a $x = 0{,}15283 =$ 11 pouces.

Recherche d'une autre formule pour le même objet, où l'on a égard à la réfraction; ce que c'est que la réfraction.

550. La formule que nous venons de donner suppose que le rayon visuel CB est une ligne droite : mais l'inégale densité de l'air, à différentes distances de la surface de la terre ou de la mer, fait parcourir une courbe à un rayon de lumiere réfléchi d'un point inférieur à un supérieur, et réciproquement : cet effet est ce qu'on nomme *la réfraction*. Quoique ce phénomene soit étranger à l'objet de ce chapitre, cependant, comme l'application que nous avons à en faire, ne suppose pas de grandes notions préliminaires, nous allons en dire un mot, afin de rassembler en un seul article ce qui a rapport à la théorie du nivellement.

Détails sur l'effet de la réfraction.

Pour bien comprendre l'effet de la réfraction, soit supposé un observateur au point A (*fig.* 131) d'un arc terrestre AM, dont le centre est en C, et regardant dans la direction de l'horizontale AO; le point O étant plus élevé que le point A, de la hauteur OM, et l'air, comme nous le verrons bientôt, étant moins dense à mesure qu'il se trouve dans une couche plus

(*) A la latitude de Paris, un degré du méridien a 57069 toises de longueur (173), qui, divisées par 0,01745329, valeur de l'arc d'un degré, qui a l'unité pour rayon, donnent 3269814 toises pour la valeur du rayon de courbure ou de R dans le sens du méridien. On pourra donc, à la latitude de Paris, faire 2R égal à 6539628 toises.

éloignée de la surface de la terre, sera plus rare en O qu'en M, et par conséquent qu'en A. D'après cela le rayon lumineux, qui partira du point O dans la direction OA, devant, pour arriver au point A, traverser toutes les couches d'air de densité variable et croissante, qui se trouvent dans la hauteur OM, ne suivra point la ligne droite OA, mais une ligne courbe On, à laquelle OA sera tangente, et l'extrémité O de la verticale MO ne sera pas vue du point A, comme on le suppose ordinairement, dans les tables qui donnent la différence des niveaux vrai et apparent.

Pour déterminer le point de la verticale MO, qui sera vu du point A, il faut tracer une courbe Ao d'une nature analogue à la courbe On, et son point d'intersection o, avec la verticale OM, sera celui qu'on verra du point A : ce sera donc la hauteur Mo qu'il faudra prendre pour la dépression du niveau vrai, au lieu de la hauteur MO que donne la formule $x = \frac{a^2}{6543588}$ qu'on est dans l'usage d'employer. Cherchons la valeur de Mo.

Courbe que décrit dans l'atmosphère le rayon réfracté

La petitesse des arcs AM et Ao, par rapport aux rayons de courbure AC et AE, peut les faire considérer comme des arcs de cercle : ensuite on sait, par la géométrie, que l'angle formé par AO et par la corde de l'arc AM est égal à $\frac{1}{2}$ ACO, et que l'angle formé par AO et par la corde de Ao, que nous nommerons *angle de réfraction*, est égal à $\frac{1}{2}$ AEo : mais, à cause de la petitesse de l'angle ACO, la corde AM peut être censée perpendiculaire sur CM, et les lignes MO, Mo, sont proportionnelles aux tangentes des angles OAM, oAM ; et comme, dans les petits arcs, les différences des angles sont proportionnelles aux différences des tangentes, on a MO : oO :: OAM : OAo :: $\frac{1}{2}$ ACO : $\frac{1}{2}$ AEo :: AE : AC ; d'où on tire $o\mathrm{O} = \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AE}} \times \mathrm{MO}$. Faisons $o\mathrm{O} = z$, AC = R, AE = R′, MO = x ; on aura $z = \frac{\mathrm{R}}{\mathrm{R}'} x = \frac{a^2}{2\mathrm{R}'}$, en substituant pour x sa valeur $\frac{a^2}{2\mathrm{R}}$.

Exposition de la formule cherchée.

Si on nomme δ l'angle de réfraction OAo, et Ψ l'angle ACO, on a $\delta = \frac{1}{2}$ AEo, qui, substitué dans la proportion précédente, donne $\frac{1}{2}$ ACO : δ :: AE : AC :: R′ : R ; d'où $\delta = \frac{\mathrm{R}}{2\mathrm{R}'} \Psi = \frac{a}{2\mathrm{R}'}$; car on a, R Ψ = AM = a ; l'angle de réfraction est donc proportionnel à la distance à laquelle on observe l'objet.

L'angle de réfraction est proportionnel à la distance des objets observés.

R est le rayon de la terre dont nous avons la valeur ; x est, comme on a vu art. (549), égal à $\frac{a^2}{2\mathrm{R}}$; a est la distance de l'observateur au point observé : il ne reste donc, pour déterminer

Digitized by Google

Maniere de déterminer par expérience le rayon de courbure de la courbe de réfraction.

oO, qu'à connoître R′ ou AE. On peut le déterminer par des observations astronomiques ou terrestres : nous indiquerons, parmi les dernieres, celles qu'on peut faire avec le niveau, et qui constituent ce qu'on appelle *le nivellement réciproque*. Cette opération se fait en donnant un coup de niveau de A en M, dans le même temps qu'un autre observateur donne un coup de niveau de M en A : on peut donner successivement les deux coups de niveau, en mettant entre eux le moins d'intervalle de temps possible. Ces deux observations donneront les hauteurs égales Mo, Ao', d'où on déduira la hauteur Oo, ou la quantité z.

Si les niveaux se trouvent dans les deux observations, à différentes hauteurs N, N′ (*fig.* 132), il sera aisé d'y avoir égard : les hauteurs NO′ et N′O, comptées de l'axe optique des lunettes, seront données ; les triangles O′N′M′ et ONM sont égaux et semblables, vu que les hauteurs NO′ et MO sont infiniment petites par rapport aux rayons des arcs qui composent ces triangles. Faisant $M'O' = MO = y$, $NO' = a$, $N'O = b$; on aura $NO' = O'M' + NM'$ et $MO = OM - MN'$, ou $a = y + NM'$ et $b = y - NM'$; ajoutant ces deux équations, et faisant attention que $NM' = MN'$, à cause des arcs concentriques M′N′ et NM, il vient $y = \frac{a+b}{2}$, dans laquelle a et b peuvent être positifs ou négatifs, suivant les circonstances.

En répétant de pareilles expériences dans différents états de l'atmosphere, et avec de bons instruments, on aura une valeur moyenne de R′, d'après les formules $R' = \frac{R}{z}x$, et $z = x - y$.

Ce rayon de courbure peut être considéré, valeur moyenne, comme égal à sept fois le rayon terrestre.

551. M. Lambert, dans un ouvrage très curieux, intitulé *les Propriétés remarquables de la route de la lumiere par les airs*, etc., imprimé à la Haye en 1758, fixe, d'après des observations exactes, la valeur moyenne de R′ à sept fois celle du rayon terrestre, ou de R; ce qui donne $R' = 7R$, d'où $z = \frac{x}{7}$, et par conséquent $Oo = \frac{1}{7}OM$: il faut donc diminuer de $\frac{1}{7}$ la hauteur du niveau apparent au-dessus du niveau vrai, telle que la donnent les tables ordinaires de nivellement. On trouvera, à la fin de ce volume, une table de la dépression du niveau vrai, à différentes distances, calculée d'après les principes qu'on vient d'établir (*).

(*) Nous allons donner d'une maniere plus générale les formules de M. Lambert, qui peuvent être très utiles dans bien des cas : nous supprimerons les démonstrations, pour abréger.

Soient (*fig.* 133) AD et HB deux couches horizontales, à différentes hauteurs, dont la

Digitized by Google

De l'équilibre des fluides incompressibles et pesants.

552. Nous avons prouvé (545) que la surface des fluides pesants et en équilibre étoit sphérique lorsque les directions de la pesanteur tendoient à un centre commun ; ce qui est sensiblement vrai dans un espace beaucoup plus grand que ceux

Les fluides pesants, considérés dans un petit espace, peuvent être considérés comme soumis à des puissances parallèles, et leur surface, de niveau, peut être regardée comme plane.

distance AH ou DB soit connue. Supposons que, du point A, on observe le point B, et réciproquement, le rayon lumineux, allant d'un point à l'autre, parcourra le petit arc AB ; le point B sera vu du point A en G dans la direction de la tangente AG, et le point A sera vu du point B en F dans la direction de la tangente BF.

Soit C le centre de la terre, R le centre de l'arc AB ; menons la perpendiculaire RE sur AC prolongée ; M. Lambert démontre que, quelque part que soit le point B sur l'arc HB, le centre de l'arc AB sera toujours sur un des points de la ligne ER.

Menons les perpendiculaires CP et CQ sur les rayons AR et BR, et faisons

$$\text{Angles} \begin{cases} \text{GAH} = \gamma \\ \text{FBC} = \omega \end{cases}, \text{ et rayons} \begin{cases} \text{AC} = 1 \\ \text{CB} = r \\ \text{AR} = x \end{cases} ; \text{ on aura} \quad \begin{matrix} \text{CP} = \cos.\gamma & \text{CQ} = r\cos.\omega \\ \text{AP} = \sin.\gamma & \text{BQ} = r\sin.\omega \\ \text{PR} = x - \sin.\gamma & \text{QR} = x - r\sin.\omega \end{matrix} ;$$

et pour la valeur de x, $x = \frac{(r+1)(r-1)}{2(r\sin.\omega - \sin.\gamma)} = \frac{rr-1}{2(r\sin.\omega - \sin.\gamma)}$.

La verticale AE, que M. Lambert nomme *rayon horizontal*, et dont la connoissance sert de base à toutes ses déterminations, a pour valeur $x \sin.\gamma$: ainsi, nommant cette verticale R', on a $R' = \frac{(r+1)(r-1)\sin.\gamma}{2(r\sin.\omega - \sin.\gamma)}$. On trouvera de plus $CE = R' - 1$, $ER = x\cos.\gamma$, $CR = \sqrt{(x^2 - 2x\sin.\gamma + 1)}$, $\text{cot.ECR} = \frac{EC}{ER}$, $\text{sin.BCR} = \frac{x\cos.\omega}{\sqrt{(x^2 - 2x\sin.\gamma + 1)}}$; d'où enfin on aura l'angle ACB qui donne la distance horizontale des deux endroits, et de là l'angle AgF, qui est le double de chaque réfraction terrestre.

Si cet angle ACB étoit donné immédiatement, on auroit $AgF = \omega - \gamma + \text{ACB}$; et, dans ce cas, si l'angle GAH ne differe pas beaucoup d'un angle droit, les longueurs des arcs AB et AD sont sensiblement les mêmes, et leurs rayons réciproquement proportionnels à leur valeur angulaire ; ce qui donne $AR = AC \times \frac{ACB}{FgA}$.

M. Lambert applique les formules précédentes à deux exemples, qui donnent chacun $R' = 7AC$, à peu de chose près : mais on observe que les angles rapportés dans le deuxieme exemple doivent avoir été mal transcrits ; car ils ne fournissent pas le résultat qu'il en tire.

Il donne ensuite une formule pour déduire le rayon horizontal des réfractions astronomiques, qui, en nommant γ l'angle d'inclinaison avec la verticale, et z la réfraction astronomique qui répond à cette inclinaison, est, pour les angles près de l'horizon, $R' = \frac{d\gamma}{dz}$.

On a différentes tables qui donnent les rapports entre γ et z, à des intervalles plus ou moins rapprochés, et on peut, par la méthode des interpolations, trouver des expressions qui donneront la valeur de $\frac{d\gamma}{dz}$. La formule d'interpolation pour trois termes est $y = A + ax + \frac{x(x-1)}{2}b$, A étant le premier terme à interpoler, et a, b, ses différences premieres et secondes : la distance constante d'un de ces termes à l'autre est prise pour unité. Cette équation donne $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{a + \frac{2x-1}{2}b}$, qui, à l'origine, ou lorsque $x = 0$, devient $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{a - \frac{1}{2}b}$.

Supposons que les distances γ au zénith sont les x, les réfractions z les y, et faisons va-

Digitized by Google

que nous aurons à considérer dans la suite de cet ouvrage; et nous avons eu égard, dans les recherches précédentes, aux angles que forment entre eux les rayons de courbure de la surface des fluides pesants : mais lorsqu'on considere ces fluides, relativement à leur équilibre, dans un petit espace, leur surface peut être regardée comme plane, mais la direction des puissances qui animent leurs parties peut être censée parallele, et les forces accélératrices qui résultent de ces puissances sont sensiblement constantes à une distance assez considérable au-dessus et au-dessous de la surface de la terre.

553. Nous avons rapporté (art. 166 et suiv.) les preuves de faits qui viennent à l'appui de ces assertions : on y a vu (173)

rier γ de 30′ en 30′, ou prenons le demi-degré pour unité ; les tables de réfraction de Bradley, qui sont le plus communément suivies, et qui ont été construites pour une température et un état de l'air moyens, c'est-à-dire en supposant le thermometre de Réaumur à 10 degrés, et le barometre à 28 pouces, à peu de chose près ; ces tables, dis-je, donnent

Distances au zénith.	Réfractions.	Différences premieres.	Différence seconde.
90°. 0′	0°. 33′. 0″	4′. 38″	0′. 45″
89 . 30	0 . 28 . 22	3 . 53	
89 . 0	0 . 24 . 29		

On a donc $d\gamma = dx$, $dz = dy$, $a = 4'.38''$, $b = 45''$. Substituant dans l'équation $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{a - \frac{1}{2}b}$, et faisant attention que le demi-degré représente l'unité, on a $\frac{d\gamma}{dz} = \frac{30'}{4'.38'' - 22'',5} = \frac{30'}{4'.15'',5} = 7$, en nombre entier : ainsi les observations astronomiques s'accordent avec les observations terrestres pour donner au rayon horizontal sept fois la valeur du rayon terrestre. Nous nous sommes étendus sur cette derniere application parcequ'elle est importante et qu'elle n'est pas dans l'ouvrage de M. Lambert.

Lorsqu'on a calculé la distance à laquelle un objet de hauteur donnée, un vaisseau, par exemple, pouvoit commencer à être apperçu en mer, on a toujours supposé que le rayon visuel alloit en ligne droite : la théorie et les expériences précédentes détruisent cette hypothese ; et en nommant y la hauteur de l'objet, et R′ le rayon horizontal, la distance à laquelle l'objet peut être vu est égale à $\sqrt{\frac{2R'y}{R'-1}}$ exprimée en parties, dont le rayon de la terre est l'unité.

La distance à laquelle on pourroit voir un objet sans la réfraction, est égale à $\sqrt{2y}$, et par conséquent à la distance trouvée $\sqrt{\frac{2R'y}{R'-1}}$, comme $\sqrt{(R'-1)} : \sqrt{R'}$, ou comme $\sqrt{\left(1 - \frac{1}{R'}\right)} : 1$; ce qui donne, à très peu près, le rapport de $(2R'-1) : 2R'$. Ainsi le rayon horizontal étant $= 7$, ce rapport sera $= 13 : 14$, et la réfraction augmentera la distance à laquelle un objet peut être vu, de la treizieme partie.

L'expression $\sqrt{\frac{2R'y}{R'-1}}$ donne évidemment la distance à laquelle se termine l'horizon apparent d'un observateur élevé à une hauteur y au-dessus de la surface de la mer : l'angle

Digitized by Google

que, pour trouver une variation d'une minute de degré dans la direction de la pesanteur, il falloit une distance de 951 toises, et (169) qu'à 2000 toises de distance de la surface de la terre, l'intensité de cette puissance ne diminuoit pas de $\frac{1}{600}$. On peut donc, dans la pratique, considérer avec confiance les fluides comme soumis à des puissances constantes et paralleles.

Les puissances paralleles dont on vient de parler peuvent de plus être regardées comme constantes.

554. L'équation générale de l'équilibre des fluides est (539) $dP = \delta(pdx + p'dy + p''dz)$, P exprimant la pression d'une molécule, p, p' et p'' les puissances paralleles aux x, y et z, et δ la densité. Dans l'hypothese que nous venons d'admettre, nous n'avons qu'une seule puissance, qui est la pesanteur : nommons-la φ, et supposons qu'elle agit parallelement aux z,

Application de l'équation générale de l'équilibre des fluides au cas de la pesanteur.

de réfraction pour cet observateur, c'est-à-dire celui formé par la tangente et la corde de l'arc formé par le rayon visuel, depuis son œil jusqu'à l'extrémité de l'horizon apparent, est égal à la $\frac{1^{mo}}{2R'}$ partie de l'arc terrestre intercepté entre les mêmes points, ou autrement à $\sqrt{\frac{y}{2R'(R'-1)}}$; enfin l'angle d'abaissement de l'horizon apparent, ou celui formé à l'œil de l'observateur, par les rayons de courbure de la terre et du rayon visuel, est égal à $\sqrt{\frac{2y(R'-1)}{R'}}$; ce qui est la $\frac{R'-1^{mo}}{R'}$ partie de la distance de l'observateur à l'extrémité visible.

Soit ϖ l'angle d'abaissement, on aura $\sqrt{\frac{2y(R'-1)}{R'}} = \varpi$; d'où $y = \frac{R'}{2(R'-1)}\varpi^2$.

Appliquons ceci à un exemple qui nous a été communiqué par M. de Chezy, inspecteur général des ponts et chaussées. Il a observé que, sur les plus hautes falaises de Fécamp, le rayon visuel, tangent à l'horizon de la mer, s'écartoit de l'horizontale de 1 pied 9 pouces, à une distance de 50 toises : la valeur angulaire de la dépression étoit donc de $20'.\ 3''$, qui, exprimées en parties décimales du rayon, valent 0,00583230 ; on a donc $\varpi = 0,00583230$; d'où $y = \frac{R'}{2(R'-1)}(0,00583230)^2 = \frac{1}{2}(0,00583230)^2 = 0,000019843$. Ce nombre, multiplié par 3271794 toises, longueur du rayon de la terre, qui a été pris pour unité, donne, pour la hauteur des falaises de Fécamp, 64,92 toises, ou 389 pieds 6 pouces.

Finissons cette note par donner la formule pour trouver la hauteur d'une montagne, son angle d'élévation apparente, et sa distance horizontale étant donnée. Soit A (*fig.* 133) l'endroit de l'observation, B le sommet de la montagne : on connoît l'angle HAG, qui est sa distance apparente du zénith, et l'angle ACB de son éloignement horizontal ; le rayon horizontal est supposé $= 7$, et on a $BC = \frac{AC \cdot \sin.(CAG - \frac{1}{2}ACB)}{\sin.(FBC - \frac{1}{2}ACB)}$; autrement, en cherchant la distance CG, qui sera $= AC\,\frac{\sin.HAG}{\sin.(HAG - ACB)}$, il faudra en soustraire la distance GB, qui est $= \frac{1}{2}(\text{séc.}ACB - AC)\,\text{cosec.}HAG$, ou que, pour abréger, on déterminera par la méthode de l'art. (550), vu que $\text{cosec.}HAG = 1$, à peu de chose près.

Nous n'avons pas craint de donner quelque étendue à cette note, vu que les formules qu'elle contient peuvent être utiles en bien des circonstances, et particulièrement, pour l'objet qui nous intéresse, dans certains points, de l'examen général qu'on fait d'un pays où l'on veut établir de grands canaux : nous ferons, par la suite, sentir cette vérité par des exemples.

Ceux qui desireront voir ailleurs que dans l'ouvrage de M. Lambert une théorie très satisfaisante des réfractions terrestres, consulteront *le Traité analytique du mouvement apparent des corps célestes*, de M. Dionis du Séjour, édition de 1786, tome I, page 662.

Digitized by Google

on aura $\varphi = p''$, $p = 0$, $p' = 0$, et l'équation deviendra $dP = \delta \varphi dz$. Comme φ est constante, et que, dans les fluides incompressibles, la densité δ l'est aussi, on a, en intégrant, $P = \delta \varphi (z + a)$, a étant la constante introduite par l'intégration.

Toutes les couches de niveau sont également pressées dans tous leurs points.

555. Soit BCDE (*fig.* 134) un vase contenant un fluide incompressible pesant, et la verticale AZ l'axe des z dont A est l'origine, z sera la distance variable du plan horizontal AX à une molécule quelconque du fluide. On voit que toutes les molécules qui se trouveront à une même hauteur At au-dessus du point A, ou dans le plan horizontal $t\nu$, seront également pressées : car dans l'équation $P = \delta \varphi (z + a)$, lorsque z est constante, P l'est aussi. AZ étant la hauteur à laquelle la pression devient nulle, le plan horizontal ZE sera, d'après ce qu'on vient de dire, la surface supérieure du fluide, c'est-à-dire la partie où la pression de chaque point étant égale à zéro, le fluide n'a pas besoin d'être contenu.

Le fluide se met de niveau dans les branches de plusieurs siphons qui se communiquent.

556. Comme cette propriété est indépendante de la forme du vase, on peut dire généralement, que *si un fluide incompressible et pesant est contenu dans un siphon, à un nombre de branches quelconques, qui se communiquent entre elles, il s'élevera à la même hauteur dans chaque branche.*

Recherche de la pression exercée par un fluide incompressible pesant sur une portion différencio-différentielle de surface.

557. On voit par l'équation $P = \delta \varphi (z + a)$ que, lorsqu'un fluide en équilibre est soumis à la pesanteur, l'égalité de pression a lieu dans un plan horizontal, ou plutôt dans une couche horizontale infiniment mince (*). Soit ω une surface infiniment petite, prise dans une couche, et ayant une inclinaison quelconque, la pression P qui a lieu dans cette couche se distribuant également dans toutes ses parties, et étant rapportée à l'unité de surface (537); la petite surface ω sera pressée perpendiculairement d'une quantité ωP. Supposons que l'origine des z, dans l'équation $P = \delta \varphi (z + a)$, soit à la surface supérieure du fluide, où la pression est nulle ; on aura P et z égaux à zéro en même temps, et par conséquent la constante $a = 0$; ce qui réduit l'équation à $P = \delta \varphi z$, et la pression de la surface ω a pour valeur $\ddot{\omega} \delta \varphi z$.

Nommons π la pesanteur spécifique du fluide : on sait que p exprimant le poids d'une masse m dont le volume est u, on

(*) La différence de pression d'une couche à l'autre ne contredit point le principe général énoncé art. (510) : car si un fluide dont les parties pesent l'une sur l'autre est, en outre, comprimé par un piston, cet excédent de pression se distribue également à toutes ses parties, et c'est en cela qu'on retrouve dans les fluides pesants la propriété caractéristique des fluides en général.

Digitized by Google

a (174) $\varphi = \frac{p}{m}$, et (176), $\delta = \frac{m}{u}$; donc $\varphi\delta = \frac{p}{u} = \pi$ (175): l'expression $\omega\delta\varphi z$ peut donc se changer en $\pi\omega z$, qui exprime le poids absolu d'un prisme de fluide qui auroit pour base la surface ω, et pour hauteur la distance de cette surface à la surface supérieure du fluide. Donc

Évaluation de cette pression.

558. *La pression qu'éprouve une portion de surface infiniment petite, prise dans une tranche horizontale et infiniment mince, d'un fluide incompressible et en équilibre; cette pression,* disons-nous, *est égale au poids d'un prisme du même fluide qui auroit pour base la surface pressée, et pour hauteur la distance de cette surface à la surface extrême supérieure du fluide.*

Cas où la surface n'est infiniment petite que dans une dimension.

Cette surface peut être ou infiniment petite dans ses deux dimensions; alors elle est ce qu'on appelle une *différencio-différencielle*, et peut être considérée comme un plan. La pression qu'elle éprouve doit toujours être considérée comme perpendiculaire au plan dont elle fait partie, ou bien cette surface n'est infiniment petite que dans une de ses dimensions: tel est l'élément ou la zone de la paroi du vase contenant le fluide qui termine une des tranches horizontales élémentaires de ce fluide. Dans ce cas, la pression est égale à la somme de toutes les pressions perpendiculaires qui s'exercent sur les *différencio-différencielles* qui composent la surface élémentaire qu'on considere.

Recherche de la pression sur une portion finie de surface.

559. Il est aisé, d'après cela, de trouver la valeur de la pression totale qu'éprouve une portion finie S de surface prise, soit sur la paroi du vase qui renferme le fluide, soit sur la surface d'un corps qui y seroit plongé. Supposons que cette surface soit coupée par des plans horizontaux infiniment près et équidistants, tellement que l'intervalle qui les sépare soit par-tout égal à dz, la pression qu'éprouvera une des zones comprise entre deux plans paralleles sera égale (558) à $\pi z dS$, et la pression totale de la surface sera $= \pi \int z dS$. Nommons Z la distance du centre de gravité de la surface dont on cherche la pression à la surface supérieure du fluide; on aura (179) $Z = \frac{\int z dS}{S}$; d'où $\pi \int z dS = \pi ZS$. Donc

Évaluation de cette pression.

560. *La pression totale qu'éprouve une surface plongée dans un fluide en équilibre, est égale au poids d'un prisme du même fluide qui auroit une base égale à la surface en question, et pour hauteur la distance du centre de gravité de cette surface à la surface extrême et supérieure du fluide.*

On doit toujours entendre par pression totale la somme des

Digitized by Google

pressions perpendiculaires qu'éprouvent les *différencio-différencielles* qu'on considere.

Application de la théorie précédente à la pression d'une surface courbe dans le sens vertical seulement.

561. Soit ABCD le profil ou section verticale (*fig.* 135) d'un vase contenant un fluide en équilibre, et dont un des côtés DC est courbe dans le sens vertical seulement, de maniere que toutes les sections horizontales de la surface profilée en DC sont des lignes droites perpendiculaires au plan ABCD; proposons-nous de trouver à quelle distance, tant de la surface supérieure du fluide que d'un plan vertical perpendiculaire à la section ABCD, et passant par l'axe PZ, se trouve un des points de la direction de la résultante des pressions qui s'exercent contre le côté profilé en DC, considérées quant à l'effet qu'elles peuvent produire parallèlement au plan ABCD, et d'assigner en outre la direction et la valeur de cette résultante.

Plaçons l'origine des co-ordonnées au point P commun à la surface supérieure du fluide et à la verticale PZ : nommons PQ, z; l'horizontale QR, y; $Qq = Rt$, dz; DR, s; on aura $tr = dy$ et $Rr = ds$; et si on égale à λ la longueur de l'élément horizontal profilé en Rr, la surface de cet élément sera λds: on suppose que λ est fonction de z.

La pression normale qui s'exerce sur l'élément λds est égale à $\pi\lambda z ds$ (558), et en décomposant cette pression parallèlement aux z, on a $\frac{dy}{ds}\pi\lambda z ds = \pi\lambda z dy$ pour la poussée verticale de l'eau sur l'élément de surface profilé en Rr, et la résultante de toutes les poussées élémentaires verticales se trouvera dans un plan vertical distant de l'axe PZ, ou plutôt d'un plan vertical passant par cet axe, et perpendiculaire au plan ou section ABCD, d'une quantité égale à $\frac{\pi\int\lambda z y dy}{\pi\int\lambda z dy} = \frac{\int\lambda z y dy}{\int\lambda z dy}$.

On trouvera, par un procédé entièrement semblable, que la somme des poussées horizontales élémentaires est égale à $\pi\int\lambda z dz$, et que la résultante de ces poussées horizontales passe à une distance de la surface AD du fluide, égale à $\frac{\int\lambda z^2 dz}{\int\lambda z dz}$; et menant dans le plan ABCD deux lignes aux distances qu'on vient de déterminer, leur intersection donnera le point cherché. Les valeurs de ces distances contiennent trois variables, λ, z et y, sous le signe d'intégration : mais comme λ est une fonction de z, c'est-à-dire qu'on a une équation particuliere entre λ et z, et qu'on en a une autre entre z et y, qui est celle de la courbe DRC, on pourra éliminer λ et celle qu'on voudra

Digitized by Google

des variables z et y. La même observation a lieu pour les valeurs qu'on va déterminer.

Détermination de l'angle qui fait, avec la verticale, la résultante des pressions de tous les éléments de la surface précédente.

562. Le sinus de l'angle que fait la perpendiculaire à la courbe, avec la verticale, est égal à $\frac{dz}{ds}$, et le cosinus du même angle est $\frac{dy}{ds}$: ensuite la pression sur l'élément, dont ds est le profil, ayant pour valeur $\pi\lambda z ds$, la résultante de toutes les pressions fera (263), avec la verticale, un angle dont la tangente aura pour valeur $\frac{\pi\int\lambda z ds\frac{dz}{ds}}{\pi\int\lambda z ds\frac{dy}{ds}} = \frac{\int\lambda z dz}{\int\lambda z dy}$.

En quoi cette résultante diffère de ce qu'on doit appeller la *pression totale*.

563. La valeur de cette résultante est (263)

$$\sqrt{\pi^2\left[(\int\lambda z dz)^2 + (\int\lambda z dy)^2\right]}.$$

Il ne faut pas confondre cette résultante avec la pression totale de la surface déterminée plus haut (560) : cette dernière pression est la somme de tous les efforts que le fluide exerce normalement sur chaque élément *différencio-différenciel*, et la résultante que nous venons de déterminer est une puissance de direction et quantité telle qu'elle puisse faire, parallèlement au plan ou section ABCD, le même effet que toutes les pressions normales dont on vient de parler.

Observations à faire sur cette résultante ; recherche du cas où elle est unique, et du cas contraire.

564. Il faut bien remarquer la restriction que nous mettons ici, qui limite, ainsi que nous nous l'étions proposé, la résultante ci-dessus trouvée à remplacer la somme des pressions normales seulement dans l'effort qu'elles font parallèlement au plan ABCD, lequel effort ne peut produire d'autre effet qu'un mouvement de translation parallele à ce plan, et un mouvement de rotation autour d'un axe qui lui seroit perpendiculaire. Pour que cette résultante pût remplacer, sous tous les aspects, les efforts du fluide sur la surface profilée en DRC, il faudroit, outre sa direction parallèlement au plan ABCD, trouver encore sa distance à ce plan.

Pour cela il faut, par le centre de gravité de tous les éléments horizontaux λds, profilés en Rr, lequel centre est au milieu de chacun de ces éléments, faire passer une courbe qui sera sur la surface profilée en DC, et dont chaque élément représentera la pression de l'élément de cette surface qui y répond. Nommant x la distance d'un des éléments de la courbe au plan ABCD, la résultante des poussées horizontales passera

Digitized by Google

à une distance de ce plan $= \frac{\int \lambda x z dz}{\int \lambda z dz}$, et la résultante des poussées verticales à une distance $= \frac{\int \lambda x z dy}{\int \lambda z dy}$.

565. Lorsque ces deux distances seront égales et de même signe, il sera toujours possible de trouver une puissance qui soit, sous tous les aspects, la résultante unique des pressions exercées par le fluide sur la surface profilée en BC. Dans le cas contraire, il y aura deux résultantes, auxquelles on ne pourra substituer une seule puissance que relativement au mouvement de translation parallele au plan ABCD, et de rotation autour d'un axe horizontal perpendiculaire à ce plan. L'intelligence de ceci n'a aucune difficulté pour ceux qui ont vu la théorie détaillée de l'équilibre, que nous avons donnée dans la premiere section de ce traité.

Cas particulier où cette résultante est unique.

566. Il est évident que si les éléments horizontaux, profilés en Rr, peuvent être tous divisés en deux parties égales par un seul plan vertical, on pourra toujours trouver une résultante unique de toutes les pressions de la surface profilée en DRC: car, en rapportant à ce plan les distances $\frac{\int \lambda x z dz}{\int \lambda z dz}$ et $\frac{\int \lambda x z dy}{\int \lambda z dy}$, elles seront égales à zéro, et la résultante sera dans ce plan même.

Application de la théorie de la pression des fluides à une surface courbe dans le sens horizontal.

567. Le plan PBDC (*fig.* 136, n° 1) est une partie de la section ou coupe verticale d'un vase contenant un fluide en équilibre; DC est le profil d'un des côtés de ce vase, dont la surface intérieure est courbe dans le sens horizontal seulement, de maniere que toutes les sections verticales de cette surface sont des lignes droites terminées, d'un côté, à la surface supérieure du fluide, et, de l'autre, à un même plan horizontal, qu'on peut supposer être le fond du vase; le plan ARMX (n° 2) est une section de la coupe horizontale de cette surface, qui est la même à toutes les hauteurs, mais qu'on suppose faite sur la ligne QR (n° 1), et la ligne QR (n° 2) est celle sur laquelle est prise la coupe verticale PBCD, le point Q répondant à l'axe PZ. Proposons-nous de trouver à quelle distance, tant du plan PBCD que d'un plan vertical qui lui seroit perpendiculaire, et qui passeroit par la ligne AQX (n° 2), se trouve un des points de la direction de la résultante des pressions qui s'exercent contre la surface qui a AMX pour base et PQ pour hauteur, considérées quant à l'effet qu'elles peuvent produire parallèlement au plan ARMX, et d'assigner en outre la direction et la valeur de cette résultante.

Plaçons l'origine des co-ordonnées au point de la surface supérieure du fluide, qui répond verticalement au point X;

Digitized by Google

supposons AX et QR perpendiculaires entre elles ; faisons PQ $= z$, XM $= s$, XN $= x$, NM supposée parallele à QR $= y$, R$r = dz$, M$q = dx$; on aura $qm = dy$, M$m = ds$.

La pression de l'élément différencio-différenciel de surface, qui a pour hauteur Rr (n° 1), et pour base Mm (n° 1), est égale à $zdzds$ (558). Cette pression, décomposée parallèlement à l'axe AX, donne $zdzds\frac{ds}{dy}$, et parallèlement à QR, $zdzds\frac{ds}{dx}$; on a donc, pour la distance à l'axe AX de la résultante des pressions paralleles à cet axe, $\frac{\int yzdz\frac{ds^2}{dy}}{\int zdz\frac{ds^2}{dy}}$, et pour la distance de la résultante des pressions paralleles à QR, à une ligne XV parallele à cet axe, $\frac{\int xzdz\frac{ds^2}{dx}}{\int zdz\frac{ds^2}{dx}}$. Il faut d'abord intégrer ces expressions par rapport à z, afin d'avoir les valeurs qui conviennent à l'élément vertical dont PQ (n° 1) est la hauteur, et Mm (n° 2) la base, et qui sont $\frac{\frac{1}{2}z^2y\frac{ds^2}{dy}}{z^2\frac{ds^2}{dy}}$, et $\frac{z^2x\frac{ds^2}{dx}}{z^2\frac{ds^2}{dx}}$. Il n'y a point de constante arbitraire à ajouter, vu que, la section horizontale étant partout la même, la relation entre x et y est aussi toujours la même, quelle que soit la valeur de z : on pourra donc, dans ce cas, regarder z comme une constante ; ce qui, pour la surface courbe, réduit les valeurs des distances des résultantes à $\frac{\int y\frac{ds^2}{dy}}{\int\frac{ds^2}{dy}}$ pour la distance à l'axe AX de la résultante des pressions paralleles à cet axe, et à $\frac{\int x\frac{ds^2}{dx}}{\int\frac{ds^2}{dx}}$ pour la distance à l'axe XV de la résultante des pressions paralleles à cet axe.

Chacune de ces intégrales doit être prise dans toute l'étendue de la courbe AMX, et pour achever de résoudre le problème, on se servira des distances trouvées et des pressions totales auxquelles elles appartiennent, comme on a fait dans le problème précédent.

568. Puisque la pression qui a lieu sur l'élément profilé en Rr (n° 1), et Mm (n° 2), est la même que celle qui a lieu sur chaque élément semblable, dans l'étendue d'un même profil horizontal ARMX, la distance commune des résultantes des pressions, à la surface supérieure du fluide, sera $\frac{\int z^2dzds}{\int zdzds}$, ou, en

Digitized by Google

regardant ds comme constant, $\frac{\int z^2 dz}{\int z dz} = \frac{\frac{1}{4}z^3 + A}{\frac{1}{2}z^2 + B}$. Supposons que la surface dont on considere la pression commence à une distance a au-dessous de l'origine des z; lorsqu'on aura $z = a$, la somme des moments des pressions $\int z^2 dz ds$, et la somme des pressions $\int z dz ds$, s'évanouissent chacune; ce qui donne $\frac{1}{3}a^3 + A = 0$, et $\frac{1}{2}a^2 + B = 0$; d'où $A = -\frac{1}{3}a^3$, et $B = -\frac{1}{2}a^2$; et l'intégrale complete sera $\frac{2(z^3 - a^3)}{3(z^2 - a^2)}$, qui se réduit à $\frac{2}{3}z$ lorsque la surface dont on considere la pression commence à la surface supérieure du fluide.

Expression générale qui donne la hauteur à laquelle passe la résultante des pressions d'une surface dont les sections horizontales sont par-tout les mêmes.

569. L'expression $\frac{2(z^3 - a^3)}{3(z^2 - a^2)}$ donne généralement la distance verticale de la surface du fluide, à la résultante des pressions, pour toutes les surfaces dont les sections horizontales sont par-tout les mêmes.

Perte de poids que fait un corps plongé dans un fluide.

570. Un corps plongé dans un fluide en équilibre éprouve une pression totale parfaitement égale à celle de la portion de fluide dont il occupe la place. Cette portion de fluide déplacée étoit, par l'hypothese, en équilibre avec les pressions qu'elle éprouvoit; par conséquent ces pressions faisoient verticalement, de bas en haut, un effort précisément égal au poids de la masse de fluide déplacée et passant par le centre de gravité de cette masse (163): elles feront donc le même effort sur le corps plongé, lequel effort passera également par son centre de gravité, en le supposant homogene comme le fluide, et son poids ou l'énergie avec laquelle il tend à descendre sera diminuée de tout cet effort. Ainsi

571. *Un corps plongé dans un fluide perd une partie de son poids égale au poids du volume de fluide qu'il déplace.*

Des corps qui flottent au-dessus des fluides; loix dérivées de cette propriété.

572. Soit P la la pesanteur spécifique du corps, V son volume, qui sera aussi celui du fluide déplacé, et π la pesanteur spécifique du fluide; les poids du corps et du fluide déplacés seront PV et πV (175), et le corps tendra à descendre avec une énergie qui aura pour valeur PV $-$ πV, ou V(P $-$ π). Lorsqu'on aura $\pi >$ P, alors l'expression précédente deviendra négative, et le corps tendra à monter : ainsi, lorsque la pesanteur spécifique du corps sera moindre que celle du fluide, si on suppose le corps entièrement plongé, l'effort du fluide ambiant l'emportera sur la pesanteur du corps plongé et le fera remonter; il s'élevera hors de l'eau jusqu'à ce qu'il ne déplace plus qu'une portion de fluide d'un poids égal au sien, et par conséquent d'un volume plus petit: nommant u le volume de fluide déplacé

Digitized by Google

dans ce dernier cas, on aura $PV = \pi u$; et $P : \pi :: u : V$; d'où on conclut que

573. *Lorsqu'un corps surnage au-dessus d'un fluide, il déplace une partie de ce fluide d'un poids absolu égal au sien, et la pesanteur spécifique du corps est à la pesanteur spécifique du fluide, comme le volume du fluide déplacé, ou de la partie du corps plongée dans le fluide, est au volume total du corps.*

Usage de cette propriété pour soulever de grands fardeaux à dessous de l'eau.

574. L'équation $PV = \pi u$ sert de base à la théorie des *aréometres* ou *pese-liqueurs*, comme nous le verrons bientôt. On emploie aussi l'effort que font les fluides pour soulever les corps spécifiquement plus légers, à retirer des masses d'un poids considérable, du fond des rivieres ou de la mer. Pour cet effet, on charge un grand bateau, et on le fait enfoncer jusqu'à ce qu'il déplace, outre son tirant d'eau ordinaire, un volume d'eau d'un poids plus considérable que celui de la masse qu'on veut soulever; alors on l'attache fortement à cette masse, et ôtant ensuite le poids dont on l'avoit chargé, l'eau agit de bas en haut pour le soulever avec un effort qui, dès le premier instant, l'emporte sur la résistance du corps à soulever.

Conditions de l'équilibre des corps flottants.

575. Nous avons supposé, dans les art. (572 et 574), que le corps n'avoit aucun mouvement de rotation ou d'oscillation, c'est-à-dire que la verticale, passant par son centre de gravité, passoit aussi par le centre de gravité du fluide déplacé : ces deux conditions donnent les équations nécessaires pour déterminer la position que doit avoir, pour l'équilibre absolu, un corps flottant sur un fluide. Nous ne nous occuperons pas de ces équations : mais on peut voir sur cette branche de théorie l'*Hydrodynamique* de M. l'abbé Bossut, édition de 1786, tome I, page 140 et suivantes.

Applications de la théorie précédente à quelques exemples; de la stabilité des digues qui soutiennent des eaux stagnantes, et de la poussée des terres.

De la pression d'une ligne verticale plongée dans un fluide.

576. Le vase ou réservoir qui contient de l'eau ou un fluide quelconque, ayant la paroi intérieure d'un de ses côtés plane et verticale; si on imagine une ligne verticale tirée sur ce plan, dont la longueur soit b, et la distance de son centre de gravité à la surface du fluide, q; la pression exercée sur cette ligne sera représentée par πbq (560). Si on nomme a la distance de l'extrémité supérieure de cette ligne à la surface du fluide, et qu'on fasse $a + b = f$, au moyen de quoi f sera la distance de l'extrémité

Digitized by Google

inférieure à la surface du fluide ; pour trouver le point par où passe la résultante des pressions qui s'exercent sur toute la longueur b, il faut, dans l'expression $\frac{\int \lambda z^2 dz}{\int \lambda z dz}$ (561), faire λ constant, ou, ce qui est la même chose, prendre l'expression $\frac{2(z^3-a^3)}{3(z^2-a^2)}$ (568), dans laquelle on fera $z = f$; ce qui donnera $\frac{2(f^3-a^3)}{3(f^2-a^2)}$ pour la distance du point cherché à la surface supérieure du fluide. Lorsqu'une des extrémités de la ligne se trouve dans cette surface, on a $a = 0$, $f = b$, et la distance devient $= \frac{2}{3} b$.

De la pression d'un parallélogramme, et des efforts de cette pression pour le faire tourner autour de ses côtés.

577. Si, sur la verticale dont nous venons de parler, on construit un parallélogramme rectangle dont la base horizontale soit $= \lambda$, sa pression totale sera $\pi q b \lambda$, et la distance de la résultante des pressions à la surface du fluide, que nous nommerons dorénavant profondeur du *centre de pression*, sera la même que celle trouvée précédemment, c'est-à-dire égale à $\frac{2(f^3-a^3)}{3(f^2-a^2)}$. Ce centre de pression se trouvera évidemment sur la verticale qui divise le parallélogramme en deux parties égales.

578. Si le côté horizontal supérieur du parallélogramme est à la surface de l'eau, son énergie pour tourner autour de sa base sera $\frac{1}{2} \pi \lambda b^2 \times \frac{1}{3} b = \frac{1}{6} \pi \lambda b^3$, et son énergie pour tourner autour d'un de ses côtés verticaux sera $\frac{1}{2} \pi \lambda b^2 \times \frac{1}{2} \lambda = \frac{1}{4} \pi \lambda^2 b^2$; ainsi le premier de ces efforts sera, au second, comme $\frac{1}{6} \pi \lambda b^3 : \frac{1}{4} \pi \lambda^2 b^3$, ou comme $2b : 3\lambda$; ce qui se réduit aux $\frac{2}{3}$ quand le parallélogramme est un quarré.

Pression d'un triangle, et examen des différents cas qui y sont relatifs.

579. Soit le triangle CAB (*fig.* 137), dont le côté AB est horizontal, plongé dans un fluide dont la surface supérieure est en S ; menons la verticale SCP et la ligne CQ qui divise le côté AB en deux parties égales ; traçons l'horizontale TR ; faisons CP $= b$, AB $= h$, CS $= a$, SP $= f$; la distance, depuis le tiers de PC, comptée de P jusqu'au point S, $= q$; angle PCQ $= k$, SM $= z$, TR $= \lambda$, CM $= \gamma$, MC $= w$; on a $z - a = w$.

Le centre de gravité du triangle se trouvant au tiers de QC, compté du point Q, ou dans un plan horizontal qui passeroit au tiers de la hauteur PC, la pression totale du triangle sera $\frac{1}{2} \pi q b h$. Pour avoir la profondeur du centre de pression, il faut substituer la valeur de λ dans la formule $\frac{\int \lambda z^2 dz}{\int \lambda z dz}$, qui devient, dans ce cas-ci, en supposant l'intégrale prise dans toute l'étendue du triangle, $\frac{\int \lambda z^2 dz}{\frac{1}{2} q b h}$, parceque le dénominateur exprime toujours la pression totale divisée par π. Pour cela, on a CP : AB : : CM : TR, ou

Digitized by Google

ou $b : h :: w : \lambda = \frac{hw}{b} = \frac{h}{b}(z-a)$, qui, substituée dans $\int \lambda z^2 dz$, donne $\frac{h}{b}\int (z^3 - az^2)\,dz = \frac{h}{b}(\frac{1}{4}z^4 - \frac{1}{3}az^3) + A$. La constante A se détermine par la condition que l'intégrale doit s'évanouir au point C, c'est-à-dire quand x ou $z - a = 0$; ce qui donne, pour ce cas, $z = a$. Faisant la substitution, on a

$$\frac{h}{b}(\tfrac{1}{4}a^4 - \tfrac{1}{3}a^4) + A = 0;\ \text{d'où}\ A = \frac{h}{12b}a^4;$$

ainsi l'intégrale complete est $\frac{h}{b}(\frac{1}{4}z^4 - \frac{1}{3}az^3 + \frac{1}{12}a^4)$.

Pour avoir cette intégrale dans toute l'étendue du triangle, c'est-à-dire depuis C jusqu'en P, il faut faire $z = f$, et, divisant le résultat de la substitution par $\frac{qbh}{2}$, on aura, pour la profondeur du centre de pression du triangle, la valeur $\frac{\frac{1}{2}f^4 - \frac{1}{3}af^3 + \frac{1}{12}a^4}{\frac{1}{2}qbf}$, qui, comme on voit, est indépendante de la base h.

580. Lorsque le sommet du triangle est à la surface de l'eau, $f = b$, $a = 0$, $q = \frac{2}{3}b$, et l'expression devient $\frac{3}{4}b$.

581. Pour déterminer la distance du centre de pression à la verticale CP, il faut prendre la formule $\frac{\int \lambda x z dz}{\int \lambda z dz}$ (564), dans laquelle x est représentée par MN $= w$ tang. $k = (z-a)$ tang. k. Substituant cette valeur et celle de λ, qu'on a trouvée égale à $\frac{h}{b}(z-a)$, on a $\int \lambda x z dz = \frac{h\,\text{tang.}\,k}{b}\int (z^3 - 2az^2 + a^2z)\,dz = \frac{h\,\text{tang.}\,k}{b}(\frac{1}{4}z^4 - \frac{2}{3}az^3 + \frac{1}{2}a^2z^2) + A$; l'intégrale s'évanouit quand $z = a$; ce qui donne $\frac{h\,\text{tang.}\,k}{12b}a^4 + A = 0$; d'où $A = -\frac{h\,\text{tang.}\,k}{12b}a^4$, et l'intégrale complete sera $\frac{h\,\text{tang.}\,k}{b}(\frac{1}{4}z^4 - \frac{2}{3}az^3 + \frac{1}{2}a^2z^2 - \frac{1}{12}a^4)$. Faisant $z = f$, et divisant par $\int \lambda z dz = \frac{1}{2}qbh$, il vient, pour la distance cherchée,

$$\frac{\text{tang.}\,k\,(\frac{1}{4}f^4 - \frac{2}{3}af^3 + \frac{1}{2}a^2f^2 - \frac{1}{12}a^4)}{\frac{1}{2}qbf}.$$

582. Lorsque le triangle est isoscele, l'angle $k = 0$, et la valeur précédente s'évanouit; ce qui doit être : car, dans ce cas, les pressions sont en équilibre autour de la verticale CP.

583. Si le triangle est rectangle, et que la base soit un des côtés adjacents à l'angle droit, on a $h = 2b$ tang. k, ou tang. $k = \frac{h}{2b}$; ce qui réduit la distance du centre de pression à

$$\frac{h}{qbf}(\tfrac{1}{4}f^4 - \tfrac{2}{3}af^3 + \tfrac{1}{2}a^2f^2 - \tfrac{1}{12}a^4).$$

584. Enfin lorsque le sommet du triangle est à la surface de

Digitized by Google

l'eau, $a = 0$, $f = b$, $q = \frac{2}{3}b$, et l'expression devient $\frac{3}{4}b$ tang.k, qui, pour le triangle rectangle, se réduit à $\frac{3}{8}h$.

585. Ainsi lorsque le triangle a son sommet à la surface de l'eau, l'énergie pour tourner autour de la base est à celle pour tourner autour de la perpendiculaire menée du sommet sur cette base, comme $1 : 3$ tang.k, et, dans le cas du triangle rectangle, comme $2b : 3h$.

586. Si la partie supérieure des surfaces que nous venons de considérer est hors de l'eau, il n'y a d'autre changement à faire aux expressions générales trouvées précédemment, que celui de donner aux puissances impaires de a un signe contraire à celui qu'elles ont dans ces expressions.

Ce qu'on entend généralement par une digue.

587. L'application des formules générales, données, dans le chapitre précédent, à la pression de l'eau contre les surfaces courbes, nous fournit l'occasion de résoudre un problème général sur la *stabilité* des *digues* qui servent à contenir les eaux stagnantes. On appelle en général *une digue* tout obstacle, naturel ou artificiel, qui s'oppose à l'effort que fait un fluide pour se répandre. Nous avons ici en vue les digues artificielles : mais ce n'est pas encore le moment de parler de la construction de ces ouvrages et de leurs différentes especes : ces objets seront, quand il en sera temps, traités avec toute l'étendue nécessaire : nous allons seulement chercher d'avance des formules d'équilibre dont l'application pourra être utile.

Recherche des conditions de l'équilibre d'une digue dans l'hypothese qu'elle peut être renversée par la pression d'une eau stagnante.

588. Soit ABCD (*fig.* 138) le profil d'une digue servant à retenir une eau stagnante dont la surface est EY, et la profondeur EF ; ce profil est supposé le même sur toute la longueur de la digue, dont il peut, par conséquent, représenter le volume, le plan indéfini EYVD représentant le volume de l'eau contenue par la digue. Toutes les parties de cette digue sont supposées tellement liées, qu'elle ne peut céder à la pression de l'eau qu'en tournant tout d'une piece autour du point A, ou en glissant sur sa base AD, supposée horizontale. Parlons d'abord de l'équilibre de rotation autour du point A. Faisons ER $= z$, RS $=$ FT $= y$, AD $= q$, EF $= f$, FD $= g$.

L'effort qui tend à renverser la digue doit être attribué à la poussée horizontale de l'eau, et ceux qui contribuent à sa stabilité sont, d'une part, la pression verticale de l'eau sur la partie de courbe ED, de l'autre, le poids de la digue. On trouvera (561) que la somme des poussées horizontales élémentaires, depuis le point E, jusqu'au point S de la courbe ED, distant de la surface supérieure de l'eau d'une quantité ER $= z$, est égale à $\pi \int \lambda z dz$

Digitized by Google

$=\frac{1}{2}\pi z^2$, en faisant égale à l'unité la quantité λ, qui devient ici une quantité constante et arbitraire, et que la résultante de ces pressions passe à une distance de E égale à $\frac{\int \lambda z^2 dz}{\int \lambda z dz} = \frac{2}{3}z$; il n'y a point de constantes à ajouter, parceque les intégrales s'évanouissent en même temps que z. Faisant, dans ces deux expressions, $z = f$, on voit que l'énergie de la poussée horizontale de l'eau, pour faire tourner autour du point A, doit être exprimée par $\frac{1}{2}\pi f^2 \times \frac{1}{3}f = \frac{1}{6}\pi f^3$.

On sait, d'un autre côté (561), que la pression de l'élément de la courbe qui se trouve au point S est égale à $\pi\lambda z dy$, ou $\pi z dy$, dont l'énergie, pour faire tourner autour de A, est

$$\pi z dy \times \mathrm{AT} = \pi z dy \times [\mathrm{AD} - (\mathrm{FD} - \mathrm{FT})] = \pi z dy (q + y - g),$$

et la somme des énergies pareilles $\int [(q+y-g)\pi z dy]$, intégrale qui doit être prise depuis E jusqu'en D.

Enfin nommant p la pesanteur spécifique de la matiere dont la digue est composée, et Q le produit de l'aire ABCD par la distance du point A à la verticale qui passe par le centre de gravité de cette aire, l'énergie du poids de la digue, pour faire tourner autour du point A, sera pQ.

La somme des énergies ci-dessus déterminées doit, dans le cas de l'équilibre, être égale à zéro (152), en donnant des signes contraires à celles qui tendent à faire tourner en sens contraire; ce qui fournit l'équation

$$\frac{1}{6}\pi f^3 - pQ - \int [(q+y-g)\pi z dy] = 0 \cdots\cdots (\mathrm{A}).$$

Équation qui exprime ces conditions.

589. Passons aux conditions qui doivent avoir lieu pour que le profil ABCD ne glisse pas sur sa base AD. Puisque cette base est supposée horizontale, la masse qu'elle soutient n'est retenue contre la poussée horizontale de l'eau que par son adhésion à cette base et par la résistance du frottement. Égalons toutes ces résistances réunies au poids de la digue multiplié par une constante n que l'expérience doit déterminer, et nommons P la surface du profil ABCD, pP sera son poids, et npP la résistance qu'il oppose à la poussée horizontale dont la valeur est (561) $\frac{1}{2}\pi f^2$; on aura donc

Équation qui donne les conditions de l'équilibre dans l'hypothese que la digue peut être repoussée en glissant sur sa base.

$$np\mathrm{P} = \frac{1}{2}\pi f^2, \text{ ou } \mathrm{P} = \frac{\pi}{p}\frac{f^2}{2n} \cdots\cdots (\mathrm{B}).$$

On auroit pu ajouter au poids de la digue, la pression verticale de l'eau qui tend à affermir la digue sur sa base : mais on

Digitized by Google

l'a négligée, afin de rendre les dimensions de la digue plus avantageuses pour la résistance.

Application des formules précédentes aux digues à taluts rectilignes.

590. Cherchons ce que devient l'équation générale (A) lorsque le profil ABCD (*fig.* 139) est un trapeze dont les deux côtés BC et AD sont horizontaux. Abaissons les verticales CH, BG; faisons CH $= h$, HD $= b$, AG $= b'$.

On a, à cause des triangles semblables, ERS, EFD, $y = \frac{gz}{f}$; d'où

$$\int[(q+y-g)\pi z dy = \int\frac{\pi g}{f}[(q+\frac{gz}{f}-g)zdz] = \frac{\pi g q z^2}{2f} + \frac{\pi g^2 z^3}{3f^2} - \frac{\pi g^2 z^3}{2f}.$$

Il n'y a point de constante à ajouter, parceque z et l'intégrale entiere s'évanouissent ensemble; faisant $z = f$, il vient

$$\tfrac{1}{2}\pi g q f - \tfrac{1}{6}\pi g^2 f.$$

Ensuite $Q = (q-b-b')\times h\times(b'+\frac{q-b-b'}{2}) + \frac{hb}{2}\times(q-\frac{2}{3}b) + \frac{hb'}{2}(\frac{2}{3}b') = \frac{1}{2}hq^2 - \frac{1}{2}hbq + \frac{1}{6}hb^2 - \frac{1}{6}hb'^2$.

Substituant ces valeurs dans l'équation générale (A), on a

$$\tfrac{1}{6}\pi f^3 = \tfrac{1}{2}\pi g q f - \tfrac{1}{6}\pi g^2 f + \tfrac{1}{2}phq^2 - \tfrac{1}{2}phbq + \tfrac{1}{6}phb^2 - \tfrac{1}{6}phb'^2,$$

ou $q^2 + \left(\frac{\pi q}{ph}f - b\right)q - \frac{\pi(f^2+g^2)}{3ph} + \frac{1}{3}(b^2-b'^2) = 0$.

591. Cette équation du second degré renferme tous les cas possibles de taluts rectilignes. Si on suppose que ces taluts soient nuls, ou que la digue soit élevée à-plomb de chaque côté, on aura $b = 0$, $b' = 0$, et $g = 0$; ce qui réduit l'équation à $q = \sqrt{\frac{\pi f^2}{3ph}}$.

592. La valeur de P, dans l'équation (B) (589), est $hq - \frac{h}{2}(b+b')$; on a donc $hq - \frac{h}{2}(b+b') = \frac{\pi}{p}\frac{f^2}{2n}$; d'où $q = \frac{\pi}{p}\frac{f^2}{2hn} + \frac{1}{2}(b+b')$.

Examen des cas où les digues peuvent être rompues dans un point de leur hauteur, et recherche des conditions de l'équilibre pour ces cas.

593. La parfaite liaison de toutes les parties de la digue que supposent les formules précédentes les rend applicables principalement aux digues entièrement construites en maçonnerie: il y a bien des circonstances où ces ouvrages se font avec de la terre dont les taluts sont fortifiés par des revêtements en pierre, ou par d'autres moyens, et dont les parties constituantes n'ont pas, à beaucoup près, la même liaison et la même adhérence entre elles que les parties constituantes de la maçonnerie. On pourroit craindre que des digues construites de cette maniere, quoique satisfaisant aux formules précédentes, lorsqu'elles sont prises dans toute leur hauteur, ne résistassent cependant pas

Digitized by Google

également dans toutes les parties de cette hauteur, et ne tendissent à se diviser par tranches horizontales. Soit ABC (*fig.* 140) le profil d'une digue dont le sommet A est au niveau de la surface de l'eau, AB étant une verticale, PM et BC deux horizontales ; d'après ce qu'on vient de dire, la partie APM peut être renversée en tournant sur le point P, ou glisser sur la ligne PM en se séparant, dans l'un ou l'autre cas, de la partie inférieure PBCM. La question se réduit donc à trouver une courbe AMC telle que chaque partie APM du profil ABC puisse être isolément en équilibre sur la base PM.

Nommons AP, z; PM, y; le moment de la poussée horizontale de l'eau, par rapport au point P, est (588) $\frac{1}{6}\pi z^3$; et le moment du poids du profil APM, par rapport au même point P, est égal $p\int y\,dz$, multipliée par la distance horizontale du centre de gravité de ce profil au point A, laquelle distance est (191) $\frac{\frac{1}{2}\int y^2 dz}{\int y\,dz}$. Nous ferons, pour favoriser la solidité de la digue, abstraction de l'adhésion du profil APM sur la ligne PM et de la poussée verticale de l'eau (*); on aura donc l'équation

$$\frac{1}{6}\pi z^3 = p\int y\,dz \times \frac{\frac{1}{2}\int y^2 dz}{\int y\,dz} = \frac{p}{2}\int y^2 dz.$$

Différenciant, divisant par dz, et extrayant la racine quarrée, il vient $z = y\sqrt{\frac{p}{\pi}}$. Ainsi le talut AMC est un triangle rectiligne, et sa base BC est à sa hauteur BA, comme $\sqrt{\pi} : \sqrt{p} :: 8{,}37 : 10$. On sait (526) que $\pi = 70$, et on peut évaluer à 100 livres le poids du pied cube de la terre qu'on nomme *terre franche*, et qu'on emploie à la construction des digues, batardeaux, etc. : la *terre végétale pure* pese environ 95 livres le pied cube.

Formule pour les cas où une portion de la digue peut être renversée.

594. Les conditions de la stabilité nécessaire pour empêcher le profil APM de glisser sur la base PM se trouve dans l'équation

$$\frac{1}{2}\pi z^2 = np\int y\,dz\text{; d'où } \pi z = npy\text{, et } y : z :: \pi : np\text{;}$$

n est, comme on sait (589), un rapport à déterminer par expérience.

Formule pour les cas où une portion supérieure de la digue peut glisser sur l'inférieure.

595. Le profil d'une digue, faite d'après les dimensions qu'on vient d'indiquer, auroit beaucoup moins de surface que celui

Différences entre les dimensions adoptées dans la pratique et les dimensions calculées ; nécessité de donner une épaisseur au sommet des digues.

(*) On peut voir, dans l'ouvrage intitulé *Recherches sur la construction la plus avantageuse des digues*, etc., par MM. l'abbé Bossut, et Viallet ingénieur des ponts et chaussées, une solution générale du problème, dans laquelle entre l'adhésion des terres et la poussée verticale de l'eau : mais l'équation qui en résulte est trop compliquée pour que les praticiens puissent s'en servir. La suppression de ces deux éléments favorise la solidité de la digue, et donne néanmoins des dimensions plus petites que celles adoptées par les praticiens. (Voyez l'article 17 de l'excellent mémoire que nous venons de citer.)

Digitized by Google

des digues qu'on est dans l'usage de construire, quoique la formule de l'art. (593) soit entièrement en faveur de la solidité : on peut même, en se tenant au-dessous de ce que font ordinairement les praticiens, donner une certaine épaisseur au haut du talut, que nous avons supposé sans épaisseur, et pratiquer un talut extérieur pour prévenir la dégradation du sommet et l'éboulement des terres. Ces objets de pratique seront traités quand il en sera temps.

Liaison des recherches sur la poussée des terres à celles sur la poussée de l'eau.

596. Dans la plupart des ouvrages où l'on emploie des murs à contenir des eaux stagnantes ou courantes, ces murs soutiennent en même temps, du côté opposé aux eaux, la poussée d'une plus ou moins grande quantité de terre, dont l'action est opposée à celle des eaux ; dans d'autres circonstances, les murs sont simplement employés à soutenir des terres. Il est donc nécessaire de se faire une idée de la poussée des terres et de sa mesure : c'est ici le lieu de traiter cette question, par les motifs que nous avons exposés (379) à la fin de la statique. Ce que nous allons dire servira en même temps de confirmation et de développement aux notions établies au commencement de cette section (513) sur la série des corps supposés co-ordonnés relativement à leur analogie avec les fluides.

De la cohésion et du frottement.

597. La différence que nous observons entre les fluides parfaits et les autres corps, considérés relativement à leurs propriétés mécaniques, doit être attribuée à deux causes principales, qui sont *la cohésion* et *le frottement*, et dont la question que nous allons traiter exige que nous disions préliminairement un mot, nous réservant d'en traiter plus amplement dans la section V.

Définition de la cohésion.

598. La cohésion est l'union des parties constituantes d'un corps entre elles, au moyen de laquelle union ces parties résistent à l'effort qui tend à les séparer : la résistance qu'elles font dans ce cas, sert de mesure à la cohésion.

Définition du frottement.

599. Le frottement est la résistance qu'apportent au mouvement de deux corps, qui glissent l'un sur l'autre, les aspérités de leurs surfaces. Nous assignerons par la suite, à l'aide de l'expérience et du calcul, quelle doit être la mesure du frottement, suivant les différents corps, et dans les différents cas d'équilibre ou de mouvement, et nous considérerons, en attendant, le frottement, dans le cas d'équilibre, comme une portion déterminée de la pression perpendiculaire.

Notion exacte des effets de la cohésion et du frottement relativement à l'équilibre.

600. On voit, par ces définitions, que la cohésion et le frottement n'ont aucune influence *active* sur l'équilibre des forces ou des puissances, et ne font que s'opposer, passivement, à l'effet

de l'une ou de l'autre, indifféremment, des deux forces ou puissances opposées qui tendroient à rompre l'équilibre. Ainsi, si un moteur et une résistance, appliqués à une machine, sont en équilibre, abstraction faite de la cohésion et du frottement, il y aura mouvement si on augmente l'un ou l'autre d'une quantité aussi petite qu'on voudra : mais si l'on admet la cohésion et le frottement; alors, pour qu'il y ait rupture d'équilibre, il faudra augmenter le moteur ou la résistance d'une quantité finie et déterminée, qui sera telle, qu'en les augmentant l'un ou l'autre de toute quantité moindre que celle-là, l'équilibre ne seroit point rompu.

Ce qui résulte de ces effets relativement aux variat. qu'on peut faire subir aux puissances en équilibre, sans que l'équilibre soit rompu.

601. La résistance passive de la cohésion et du frottement permet donc aux puissances en équilibre de varier jusqu'à un certain point sans que le mouvement se produise, et cette condition met entre ces puissances des relations que nous allons expliquer par un exemple simple.

Exemple propre à donner une idée de ces variations et des *maxima* et *minima* que comportent les questions de mécanique où entrent la cohésion et le frottement.

Soit un corps pesant Q (*fig.* 141) posé sur un plan incliné AB, et retenu, suivant *de*, par une puissance horizontale P; CA étant une verticale, nommons σ l'angle CAB, supposé variable et fonction de Q; les conditions de l'équilibre, abstraction faite de l'adhésion et du frottement, seront (72), en faisant attention que les angles formés par la ligne AB avec la direction de la pesanteur et avec celle de la puissance Q sont égaux à σ et à $90° - \sigma$, $Q \cos. \sigma = P \sin. \sigma$; et si cette équation a lieu, pour peu qu'on fasse varier Q, P ou σ, l'équilibre sera rompu.

Il n'en sera pas de même si on admet la cohésion et le frottement. Faisons $ab = b$, et supposons qu'il y ait cohésion sur la ligne *ab;* nommons γ la cohésion qui a lieu sur l'unité de longueur, $b\gamma$ sera la cohésion due à toute la longueur *b*. Ensuite Q sin. σ et P cos. σ exprimant les pressions perpendiculaires que le corps Q et la puissance P exercent sur AB, et f le nombre constant par lequel il faut multiplier cette pression pour avoir le frottement, les résistances réunies de la cohésion et du frottement seront $\gamma b + f Q \sin. \sigma + f P \cos. \sigma$.

Cette résistance s'exerce parallèlement à la ligne AB, et l'équation $Q \cos. \sigma = P \sin. \sigma$ exprime aussi l'équilibre entre les puissances P et Q, décomposées parallèlement à la même ligne AB : mais comme la résistance purement passive $\gamma b + f Q \sin. \sigma + f P \cos. \sigma$ s'oppose indifféremment à l'action de Q cos. σ ou de P sin. σ, on peut, en admettant que cette résistance ait lieu, augmenter ou diminuer Q cos. σ, ou P sin. σ, de toute quantité moindre que $\gamma b + f Q \sin. \sigma + f P \cos. \sigma$ sans rompre l'équilibre; et voilà la

Digitized by Google

variation dont nous avons parlé plus haut introduite par la cohésion et le frottement.

602. Maintenant supposons que Q cos. σ soit assez grande pour surmonter $\gamma b + f$ Q sin. $\sigma + f$ P cos. σ et pour faire équilibre à P; dans ce cas on aura l'équation Q cos. $\sigma - f$ Q sin. $\sigma - f$ P cos. $\sigma - \gamma b =$ P sin. σ. Comme Q et σ sont supposés variables dans cette équation, si on attribue à P une résistance purement passive, et qu'on veuille lui donner une valeur constante telle qu'elle ne soit jamais surmontée par l'effort provenant de l'action de Q, il faut chercher dans toutes les variations de Q et de σ quelle est celle qui exige la plus grande valeur pour P, en satisfaisant à l'équation

$$Q \cos. \sigma - f Q \sin. \sigma - f P \cos. \sigma - \gamma b = P \sin. \sigma,$$

et par conséquent faire

$$P = \frac{Q \cos. \sigma - f Q \sin. \sigma - \gamma b}{\sin. \sigma + f \cos. \sigma} = \textit{maximum.}$$

Au moyen de l'équation fournie par la condition du *maximum* et de celle qui exprime la relation entre Q et σ, on éliminera ces quantités de l'équation précédente, et on aura, en quantités connues, la valeur constante qu'il faut donner à P.

603. Une suite de raisonnements semblables aux précédents conduiroit à conclure que, parmi tous les efforts capables de vaincre la cohésion, le frottement, la résistance du poids Q et de le faire remonter de B en A, celui qu'exige l'équilibre doit être un *minimum*. En effet, comme l'état de la question ne présente pas d'autres limites de la vîtesse que le corps Q peut avoir de B en A, que l'infini est zéro, la diminution possible de tous les efforts capables de le faire remonter de B en A ne s'arrêtera qu'à celui qui procurera une vîtesse nulle ou qui sera en équilibre. Nous ne développerons pas davantage ce dernier cas, et nous allons appliquer la formule $P = \frac{Q \cos. \sigma - f Q \sin. \sigma - \gamma b}{\sin. \sigma}$ à la poussée des terres contre les murs de revêtement; c'est celle de l'art. précédent, dans laquelle nous faisons f P cos. $\sigma = 0$, afin de favoriser davantage la solidité.

Application d'une formule déduite de l'exemple précédent à la poussée des terres contre les murs de revêtement.

604. Soit ABCD (*fig.* 142) un mur derriere lequel se trouve une quantité indéfinie de terre BCFE; l'expérience a appris que lorsque des terres sont ainsi appuyées contre un plan vertical BC, si on ôte ce plan, une portion ECB des terres s'éboule et se sépare de la partie contiguë ECF, la ligne de séparation ou de rupture EC étant sensiblement droite. L'angle ECB est différent pour chaque espece de terre : il est nul pour le roc et pour

pour les terres qui approchent de sa dureté et de sa consistance; il augmente à mesure que les parties constituantes des terres ont plus de ténuité, de divisibilité, moins d'adhérence et de frottement, et la limite de cette augmentation est la fluidité, cas auquel la ligne EC devient horizontale, et l'angle ECB = 90°. Ceci se rapporte à ce que nous avons dit (513) sur la série des corps, depuis la solidité jusqu'à la fluidité parfaite, et fournit un moyen d'évaluer par expérience le degré qu'ils occupent, sous de certains aspects, entre ces deux limites.

605. Faisons BC = h, angle BCE = σ, Bt = x, et menons tr parallele à CE; on aura BE = h tang. σ, CE = h séc. σ, Br = x tang.σ, et tr = x séc.σ: enfin π étant la pesanteur spécifique du triangle BCE, $\frac{\pi h^2 \text{ tang.}\sigma}{2}$ sera son poids absolu, et $\frac{\pi x^2 \text{ tang.}\sigma}{2}$ sera le poids absolu du triangle Btr.

On voit aisément que Btr représente le poids Q (*fig.* 141), et que la résistance horizontale du mur ABCD représente la puissance P. On voit encore que le plus grand effort contre BC a lieu quand la ligne tr se confond avec CE, c'est-à-dire quand le triangle Btr comprend la totalité des parties qui tendent à se séparer du massif BCFE. Ainsi, pour trouver la valeur de la résistance horizontale du mur de revêtement nécessaire pour l'empêcher de glisser sur sa base DC, il faut, dans l'équation $P = \frac{Q\cos.\sigma - \sin.\sigma\,/Q - \gamma b}{\sin.\sigma}$, substituer à Q, $\frac{\pi h^2 \text{ tang.}\sigma}{2}$; et à b, h séc.σ; ce qui donnera $P = \frac{\frac{1}{2}\pi h^2 \text{ tang.}\sigma\cos.\sigma - \frac{1}{2}\pi f h^2 \text{ tang.}\sigma \sin.\sigma - \gamma h \text{ séc.}\sigma}{\sin.\sigma}$, qui, en faisant attention que $\frac{\cos.\sigma}{\sin.\sigma} = \frac{1}{\text{tang.}\sigma}$, se réduit à

$$P = \frac{\pi h^2}{2}(1 - f \text{ tang.}\sigma) - \frac{\gamma h \text{ séc.}\sigma}{\sin.\sigma}.$$

Valeur de l'effort qui tend à faire glisser le mur sur sa base.

606. Remarquons que cette équation donne toujours à P une valeur plus petite que $\frac{\pi h^2}{2}$, et que, σ étant constant, ou CE étant supposée avoir une position indépendante de la variation de f et γ, ainsi que cela arriveroit si CEF devenoit parfaitement solide, P approchera d'autant plus d'être égal à $\frac{\pi h^2}{2}$, que le frottement f et la cohésion γ seront plus petits; en sorte que lorsqu'on aura f = 0 et γ = 0, il en résultera P = $\frac{\pi h^2}{2}$; mais $\frac{\pi h^2}{2}$ est la pression qu'exerceroit contre BC un fluide dont la profondeur seroit BC, et la surface supérieure BE (588): cette pression est donc la limite de toutes celles qui tiennent à la variation de la

La poussée horizontale des fluides n'est qu'un cas particulier de cette valeur.

Digitized by Google

cohésion et du frottement, et le calcul confirme ainsi tout ce que nous avons déja dit à cet égard.

Détermination du profil à donner à un mur de revêtement pour le mettre en équilibre avec la poussée des terres, dans l'hypothese qu'il peut glisser sur sa base.

607. Nommons S la surface du profil ABCD, p la pesanteur spécifique de la maçonnerie, b la longueur de la base DC, γ' la cohésion sur l'unité de longueur, f' le nombre par lequel il faut multiplier le poids pour avoir le frottement; la résistance horizontale de ABCD sera $f' pS + \gamma' b$, qu'il faudra substituer à P dans l'équation $P = \frac{\pi h^2}{2}(1 - f \text{ tang.} \sigma) - \frac{\gamma h \text{ séc.} \sigma}{\text{sin.} \sigma}$, et on aura

Formule qui donne ce profil.

$$608 \ldots\ldots\ldots S = \frac{\frac{1}{2}\pi h^2 (1 - f \text{ tang.} \sigma) - \frac{\gamma h \text{ séc.} \sigma}{\text{sin.} \sigma} - \gamma' b}{pf'},$$

équation qui donnera la valeur du profil S nécessaire pour que le mur n'ait aucun mouvement de translation sur sa base.

Recherche des conditions de l'équilibre dans l'hypothese que le mur de revêtement peut être renversé.

609. Nommons KS' le moment de stabilité du profil ABCD autour du point D; pour avoir l'équation qui exprime les conditions de l'équilibre de rotation autour du même point, il faut trouver la somme des moments des pressions horizontales qui s'exercent sur BC, qu'on déterminera ainsi.

Puisque $\frac{\pi h^2}{2}(1 - f \text{ tang.} \sigma) - \frac{\gamma h \text{ séc.} \sigma}{\text{sin.} \sigma}$ exprime la pression horizontale totale qu'exerce sur BD le triangle BCE, la pression totale exercée sur Bt ou x, par le triangle Btr, sera $\frac{\pi x^2}{2}(1 - f \text{ tang.} \sigma) - \frac{\gamma x \text{ séc.} \sigma}{\text{sin.} \sigma}$. Différencions cette expression par rapport à x, nous aurons $\pi x dx (1 - f \text{ tang.} \sigma) - \frac{\gamma \text{ séc.} \sigma}{\text{sin.} \sigma} dx$, qui sera la valeur de la pression exercée sur l'incrément de la hauteur Bt. Pour avoir le moment de cette pression élémentaire, il faut la multiplier par tC ou $h - x$, et $f\left[\left(\pi x dx (1 - f \text{ tang.} \sigma) - \frac{\gamma \text{ séc.} \sigma}{\text{sin.} \sigma} dx\right)(h - x)\right]$ sera le moment total de la pression exercée sur Bt. Intégrant, il vient

$$\frac{1}{2}\pi h x^2 (1 - f \text{ tang.} \sigma) - \frac{h\gamma \text{ séc.} \sigma}{\text{sin.} \sigma} x - \frac{1}{3}\pi x^3 (1 - f \text{ tang.} \sigma) + \frac{\frac{x}{2}\gamma \text{ séc.} \sigma}{\text{sin.} \sigma} x^2 + A.$$

Équation qui renferme ces conditions.

La constante A est nulle, parceque, lorsque $x = 0$, la somme des moments s'évanouit : ainsi faisant, dans l'expression précédente, $x = h$, pour avoir l'intégrale sur toute la hauteur BC, et égalant à KS' la valeur qui résultera de cette substitution, on aura, toutes réductions faites,

$$610 \ldots\ldots\ldots KS' = \frac{1}{6}(1 - f \text{ tang.} \sigma)\pi h^3 - \frac{\frac{1}{2}\gamma \text{ séc.} \sigma}{\text{sin.} \sigma} h^2.$$

équation qui renferme les conditions de l'équilibre de rotation.

611. Cette équation fournit une observation analogue à celle

Digitized by Google

de l'art. (606), et qui en est le développement : c'est que, σ étant constant, si le frottement et la cohésion sont infiniment petits, on aura $S' = \frac{1}{6}\pi h^3$, et que (588) $\frac{1}{6}\pi h^3$ exprime la somme des moments des pressions qu'exerceroit contre CB le triangle CBE, s'il étoit composé d'une matiere fluide. Ainsi les équations trouvées pour la poussée des fluides ne sont que des cas particuliers des formules qu'on vient de donner.

La poussée des fluides n'est encore qu'un cas particulier de cette équation.

612. La résultante des pressions qui s'exercent sur CB passe à une distance de C égale à

$$\frac{\frac{1}{6}(1 - f\,\text{tang.}\,\sigma)\,\pi h^3 - \frac{\frac{1}{2}\gamma\,\text{séc.}\,\sigma}{\text{sin.}\,\sigma}\,h^2}{\frac{1}{2}(1 - f\,\text{tang.}\,\sigma)\,\pi h^2 - \frac{\gamma\,\text{séc.}\,\sigma}{\text{sin.}\,\sigma}\,h}.$$

Détermination de la position de la résultante dans le cas où la cohésion est nulle, conformité de cette détermination avec l'expérience.

Si on suppose la cohésion nulle, ou $\gamma = 0$, cette distance deviendra constamment égale à $\frac{1}{3}h$, comme dans les fluides, quelle que soit la valeur du frottement et celle de l'angle σ.

Ce résultat est parfaitement conforme aux expériences faites par M. Gauthey, et consignées dans les *Mémoires de l'académie de Dijon*, année 1784, second semestre. Ces expériences ont été faites avec de la grenaille de fer fondu, qu'on nomme communément *fonte à giboyer*, dont les grains, frottant l'un contre l'autre, sans avoir de cohérence entre eux, se trouvoient précisément dans le cas dont on vient de parler.

Nous aurons occasion de revenir sur le mémoire intéressant de M. Gauthey.

Différentes considérations particulieres relatives à la poussée des terres ; avantages de la théorie qu'on vient d'exposer.

613. Nous n'avons point fait entrer en considération le frottement qui s'exerce le long de la ligne BC, et nous ne parcourrons pas les différents cas particuliers qui résultent des différentes formes qu'on peut donner aux murs de revêtement. Ces objets, et toutes les autres considérations pratiques relatives à la poussée des terres, seront traités dans la partie descriptive de cet ouvrage. Notre but principal, dans ce moment, a été de développer les analogies, souvent mentionnées précédemment, qui existent entre les fluides et les différentes substances dont les parties sont liées par la cohésion et retenues par le frottement ; de donner des formules générales de la poussée des terres, indépendantes de toute hypothese ; de présenter l'apperçu d'une méthode sur la considération des *maxima* et *minima* dans ces sortes de questions (602 et 603), qui peut être utile en bien des cas (*) ; enfin de commencer à préparer le lecteur à la

(*) Voyez sur cette matiere un mémoire de M. Coulomb, inséré dans le tome VII du *Recueil des mémoires présentés à l'académie par les savants étrangers*, page 343.

Digitized by Google

partie de cet ouvrage où l'on traitera du frottement et des autres circonstances physiques qui peuvent influer sur l'équilibre et le mouvement.

De l'aréometre ou pese-liqueur.

Définition de l'aréometre en général; utilité de celui inventé par M. de Parcieux relativement à l'objet de cet ouvrage.

614. On nomme en général *aérometre* un instrument propre à mesurer ou à comparer les pesanteurs spécifiques des liqueurs ou fluides.

L'objet de cet ouvrage n'exige pas que nous décrivions les différents aréometres employés par les physiciens: mais comme, parmi les objets que nous avons à traiter, ceux qui sont relatifs à la recherche, à l'examen et à la conduite des eaux potables, tiennent un rang très distingué, nous ne devons rien omettre sur une matiere aussi importante. Nous allons, en conséquence, parler d'un aréometre très ingénieux, inventé par M. de Parcieux, pour comparer les pesanteurs spécifiques des eaux: ce que nous en dirons fournira les lumieres nécessaires pour conduire à la théorie de tous les autres aréometres usités.

Description et usage de l'aréometre de M. de Parcieux.

615. La *figure* 143 représente l'aréometre de M. de Parcieux plongé dans de l'eau mise en expérience; A est une fiole de verre de sept à huit pouces de longueur, sur deux pouces et demi environ de diametre. Ces dimensions peuvent un peu varier, selon la sensibilité qu'on veut donner à l'instrument. La fiole est lestée pour se tenir toujours dans une situation verticale, et sa partie inférieure est arrondie, comme on voit, afin de ne point permettre à l'air de se loger par-dessous; ab est un fil de laiton enfoncé dans le bouchon de la fiole: ce fil a environ 1 ligne de diametre, et 29 à 30 pouces de longueur; il doit être tel que la fiole plongée dans de l'eau de puits, à une température moyenne, et étant lestée pour s'enfoncer en entier, avec encore à-peu-près un pouce du fil de laiton, la même fiole, plongée dans de l'eau de riviere très légere, comme l'eau de la Seine, ait plus de 20 pouces du fil de laiton enfoncés dans l'eau. On voit au haut de la fiole le petit bassin gh qui sert à contenir les petits poids dont différentes expériences exigent qu'on charge l'aréometre; la partie supérieure du bouchon est bien vernie, afin qu'il ne soit pas pénétré par l'eau; $abcd$ est un tube de fer blanc, de 3 pieds de longueur, et de 3 pouces de diametre, dans lequel on met l'eau en expérience: il faut en avoir deux pareils, afin de pouvoir comparer deux eaux dans le même instant; ef est une échelle attachée au tube de fer blanc, divisée en pouces et lignes, et qui sert à mesurer l'enfoncement

Digitized by Google

de l'aréometre par les différentes divisions auxquelles répond le fil de laiton.

Cet aréometre, comme on voit, n'est ni coûteux ni difficile à exécuter, et donne, par son extrême sensibilité, des résultats qu'aucun autre aérometre n'auroit pu fournir. Passons à sa théorie.

616. Soit z le diametre du fil de laiton, n étant le nombre par lequel il faut multiplier le diametre pour avoir la circonférence, $\frac{1}{4}nz^2$ sera la surface de la coupe du fil perpendiculairement à son axe.

Soient de plus π la pesanteur spécifique de l'eau, ou le poids d'un pied cube, le pied-de-roi et la livre étant pris pour unités, chacun dans leur espece;

v le volume de la fiole,
p le poids total de l'aréometre,
x la longueur du fil de laiton qui est enfoncée dans l'eau, dont $\frac{1}{4}xnz^2$ sera le volume.

Lorsque l'aréometre est en équilibre, en considérant qu'il déplace un volume d'eau d'un poids égal au sien, on a l'équation $p = \pi(v + \frac{1}{4}xnz^2)$; ce qui donne

$$\pi = \frac{p}{v + \frac{1}{4}xnz^2}, \text{ et } x = \frac{4(p - \pi v)}{\pi n z^2}.$$

Equations fondamentales de sa théorie.

617. Considérons d'abord l'équation $x = \frac{4(p-\pi v)}{\pi n z^2}$; la quantité $p - \pi v$ exprime, dans cette équation, la différence entre le poids total de l'aréometre ou du volume d'eau qu'il déplace, et le poids du volume d'eau déplacée par la fiole seulement: c'est donc le poids de l'eau déplacée par la partie du fil de laiton qui y est plongée. Or, vu la petitesse du diametre z, la différence $p - \pi v$ est une quantité très petite, égale à quelques grains: ainsi la plus légere variation dans p ou dans π doit en causer une grande à x, qui est la longueur de la portion du fil plongée dans l'eau.

Grande sensibilité de cet instrument; expériences par lesquelles on s'en assure.

Les variations de x sont sur-tout sensibles lorsque z varie, parceque c'est le quarré z^2 qui divise sa valeur: on voit donc combien l'aréometre dont nous parlons est propre à faire appercevoir les plus petites différences de pesanteur spécifique.

618. La sensibilité de cet aréometre est telle que, si on met dans le vaisseau qui le contient une cuillerée d'eau-de-vie ou d'esprit-de-vin, et qu'on la mêle avec l'eau, on le verra baisser

Digitized by Google

à l'instant : il en sera de même si l'instrument, étant d'abord à l'ombre, est ensuite exposé au soleil.

Une pincée de sel ou de sucre le font remonter sur-le-champ d'une quantité très sensible.

Évaluation de la sensibilité relative à la variation de densité.

Supposons que la pesanteur spécifique π devienne π', l'enfoncement x se changera en x', et on aura $x' = \frac{4(p-\pi' v)}{\pi' n z^2}$; retranchant la valeur de x' de celle de x, on aura, toutes réductions faites, $x - x' = \frac{4p(\pi'-\pi)}{\pi\pi' n z^2}$; c'est la différence de hauteur résultante de la différence de densité, qui, toutes choses égales d'ailleurs, est proportionnelle à p.

Moyens d'augmenter cette sensibilité.

619. Ainsi on peut augmenter la sensibilité de l'instrument, relative à la variation de pesanteur spécifique, soit en augmentant p, poids de l'eau déplacée par l'aréometre, ce qui peut se faire en employant une fiole plus grande, qu'on lestera alors davantage, soit en diminuant z ou le diametre du fil; et généralement, toutes choses égales d'ailleurs, $\frac{p}{z^2}$ exprimera la sensibilité de l'instrument, relative à la variation de densité ou de pesanteur spécifique.

Évaluation de l'enfoncement produit par l'addition d'un petit poids, la densité restant la même.

620. Mais lorsque la pesanteur spécifique reste la même, la sensibilité de l'instrument, c'est-à-dire la quantité dont il enfonce par l'addition d'un petit poids, ne dépend que de ce petit poids de z^2. Pour le prouver, reprenons l'équation $x = \frac{4(p-\pi v)}{\pi n z^2}$; chargeons l'aréometre d'un petit poids ω, x deviendra x', et on aura $x' = \frac{4(p+\omega-\pi v)}{\pi n z^2}$; retranchant la premiere équation de la seconde, il vient $x' - x = \frac{4\omega}{\pi n z^2}$: ainsi l'enfoncement $x' - x$ est proportionnel à $\frac{\omega}{z^2}$ quand π est constant (*).

(*) L'usage de l'aréometre exigeant qu'on connoisse exactement le diametre du fil de laiton, ceux qui n'ont pas de compas à micrometre pourront employer la méthode suivante.

Mesurez exactement la longueur du fil de laiton ; pesez-le dans l'eau et dans l'air ; prenez la différence des deux poids ; nommez l la longueur du fil, d la différence des poids dans l'eau et l'air, π la pesanteur spécifique de l'eau, n le rapport de la circonférence au diametre, enfin D le diametre du fil ; on aura $D = 2\sqrt{\frac{d}{\pi n l}}$; le logarithme constant de πn est égal à 2, 34225.

Pour avoir la grosseur du fil d'un aréometre construit, il faut charger le petit bassin supérieur d'un certain poids, examiner de combien il descend ; alors on mettra dans la formule $D = 2\sqrt{\frac{d}{\pi n l}}$, pour d, la valeur du poids dont on a chargé l'aréometre ; et pour l, la longueur dont ce poids l'a fait enfoncer : c'est ce que prouve l'équation $x' - x = \frac{4\omega}{\pi n z^2}$, qui donne $z = 2\sqrt{\frac{\omega}{\pi n (x'-x)}}$.

Digitized by Google

621. On voit donc que deux aréometres peuvent être également sensibles lorsque la pesanteur spécifique varie, et que l'un d'eux peut avoir besoin d'un plus grand pour descendre d'une quantité égale lorsque la pesanteur spécifique reste la même. Ces derniers sont préférables, 1°. parcequ'ils sont plus solides, le fil de laiton étant plus gros; 2°. parceque, par leur moyen, on peut évaluer d'une maniere plus précise la différence de pesanteur spécifique.

Différence entre la sensibilité de l'instrument, relative à la variation de densité, et celle relative à l'addition d'un petit poids, la densité étant la même; quels sont les meilleurs aréometres.

622. Si la pesanteur spécifique π devient π', et que, pour tenir l'aréometre à la même hauteur, il faille que son poids p devienne $p + \omega$, on aura (616) l'équation $\pi' = \frac{p+\omega}{v + \frac{1}{3}\pi z^3}$. Divisant cette équation par l'équation $\pi = \frac{p}{v + \frac{1}{3}\pi z^3}$, on a $\frac{\pi'}{\pi} = \frac{p+\omega}{p}$, formule qui donnera le rapport des pesanteurs spécifiques.

Usage de l'aréometre pour trouver le rapport des pesanteurs spécifiques de deux eaux.

623. L'équation précédente donne $\pi' : \pi :: p + \omega : p$, ou $\pi' - \pi : \pi :: \omega : p$; d'où $\pi' - \pi = \frac{\omega\pi}{p}$, formule qui donnera la différence des pesanteurs spécifiques.

Son usage pour trouver la différence de pesanteur spécifique de deux eaux, sans connoître avec précision la valeur absolue de la pesanteur spécifique d'une de ces eaux.

On peut, dans l'évaluation de $\frac{\omega\pi}{p}$, supposer toujours $\pi = 70$ livres, sans avoir à craindre une erreur sensible dans la valeur de $\pi' - \pi$: car la quantité ω n'étant que de quelques grains, et par conséquent une très petite fraction de la livre, π peut varier de plus d'une demi-unité, sans que le produit $\frac{\pi}{p}\omega$ éprouve des changements capables de diminuer l'exactitude du résultat. On voit donc qu'il n'est pas nécessaire, pour trouver la différence de pesanteur spécifique de deux eaux, de connoître l'une de ces pesanteurs avec la plus grande précision.

Tables à construire pour faciliter l'usage de l'aréometre.

624. Lorsqu'on voudra faire des expériences avec un aréometre dont on connoîtra exactement le poids, il faudra, au moyen des formules $\frac{\pi'}{\pi} = \frac{p+\omega}{p}$, et $\pi' - \pi = \frac{\omega\pi}{p}$, faire une table qui contienne les rapports et les différences de pesanteurs spécifiques qui répondent aux différentes valeurs de ω, depuis un grain jusqu'à 36 ou 40 grains: cette table peu étendue, et aisée à calculer, évitera l'embarras de faire un calcul particulier pour chaque expérience.

Expériences faites avec l'aréometre, par M. de Parcieux.

625. M. de Parcieux rapporte, dans son second mémoire sur le canal de l'Yvette, les expériences qu'il a faites pour comparer les pesanteurs de différentes eaux. Il s'est servi d'un aréometre qui pesoit 23 onces 2 gros 26 grains: 38 grains le faisoient descendre de 19 pouces 6 lignes; ce qui fait 6 lignes $\frac{3}{19}$ par grain,

Digitized by Google

ou le $\frac{1}{13428}$ du volume déplacé. On peut donc, connoissant les différences d'enfoncement dans plusieurs eaux, à la même température, connoître aisément le poids ω qu'il auroit fallu ajouter à l'aréometre pour le tenir, dans chaque espece d'eau, à la même hauteur où il étoit dans la plus légere. C'est d'après ces données qu'on a calculé les rapports de pesanteurs spécifiques des eaux sur lesquelles M. de Parcieux a fait des expériences, et qu'on trouvera dans la table qui est à la fin de ce volume. On y voit que l'eau de l'Yvette vient immédiatement après l'eau de la Seine.

La recherche de la plus ou moins grande légereté n'est pas la seule à faire pour juger de la qualité des eaux.

626. L'excès de légèreté d'une eau sur une autre n'est pas toujours une preuve qu'elle soit la meilleure : il faut donc encore lui faire subir d'autres épreuves. Ce n'est point ici le lieu de nous en occuper : mais nous donnerons, dans la suite de cet ouvrage, le détail de tous les procédés nécessaires pour faire ces épreuves.

De l'équilibre des fluides élastiques, et principalement de l'air (*); mesure de sa densité à différentes hauteurs.

Équation générale de l'équilibre des fluides élastiques pesants.

627. Nous avons trouvé (554) que P étant la pression qu'éprouve une molécule d'un fluide pesant et en équilibre, δ la densité de cette molécule, z sa distance à un plan horizontal donné de position, et φ la pesanteur, les conditions de

(*) Nous avons donné, art. (524, *note*), les résultats de quelques expériences utiles sur l'air et l'eau : nous allons dire un mot des découvertes récentes faites sur les principes qui les constituent. Ces découvertes ont tellement fait changer de face à la physique et à la chymie, qu'il est indispensable d'en avoir une notion.

Les expériences des chymistes modernes ont démontré que l'air atmosphérique étoit composé fondamentalement de deux substances simples, au moins relativement à l'état actuel de la chymie : savoir, l'air vital, qu'on nomme *gaz oxygene* dans la nouvelle nomenclature, et la moffette, désignée par le mot *azote* dans la même nomenclature. On y retrouve aussi quelquefois une petite quantité d'air fixe, appellé maintenant *acide carbonique*. Voyons en peu de mots les caracteres distinctifs de ces trois substances.

Le caractere essentiel du gaz *oxygene* est d'être seul propre à la combustion et à la respiration des animaux à sang chaud : 100 pouces cubiques de ce gaz, d'après les expériences de M. de Lavoisier (*Mémoires de la société royale de médecine*, année 1782) pesent 46 grains, à 28 pouces de hauteur du barometre, et 10 degrés du thermometre de Réaumur. Ce gaz est absorbé de l'atmosphere par toutes sortes de fermentations et de combustions, par l'inspiration cutanée, et par la respiration pulmonaire des animaux. Les corps qui se sont emparés du gaz oxygene en sont dépouillés de nouveau par l'action de la lumiere et de la chaleur : c'est ainsi qu'il s'en dégage une grande quantité des corps colorés, de quelques acides, et sur-tout des parties vertes des végétaux.

Les propriétés distinctives de l'*azote* sont, 1°. de n'être pas propre à la combustion, 2°. de n'être ni acide, ni alkalin, ni inflammable ; 3°. de former de l'acide nitreux lorsqu'il est uni au gaz oxygene par la commotion électrique, dans la proportion de trois mesures d'azote sur 7 de gaz oxygene. Cent pouces cubiques d'azote, suivant M. de Lavoisier, pesent 44,44 grains : cette substance est absorbée de l'atmosphere par les végétaux, et peut-être encore par certaines

l'équilibre

Digitized by Google

l'équilibre étoient exprimées par l'équation $dP = \delta\varphi dz$, qui donne $\varphi z = \int \frac{dP}{\delta}$.

Les couches de niveau sont également pressées et également denses, lorsque la densité est fonction de la pression, la chaleur étant constante.

628. Cette équation fait voir généralement que, la densité étant supposée fonction de la pression seule, l'une et l'autre de ces deux variables dépendront de la distance z; en sorte que toutes les molécules comprises dans une même couche horizontale seront également denses et également pressées.

Application à l'air atmosphérique; maniere dont on mesure sa pression; valeur moyenne de cette pression au niveau de la mer.

629. Si le fluide élastique est l'air, la densité δ sera proportionnelle à la pression P (523). Donnons une idée de la maniere dont on mesure cette pression.

Soit ABC (*fig.* 144) un tube recourbé, bouché en A, et ouvert en d, dont la partie Ani soit entièrement vuide d'air, et la partie nid remplie d'un fluide pesant comme du mercure; les points i et d n'étant pas au même niveau, il est évident (556) que si aucune puissance n'est appliquée à l'orifice d, le mercure s'échappera par cet orifice jusqu'à ce que la surface ni soit parvenue en ab au même niveau de d, à moins qu'on ne prolonge la branche BC jusqu'en e, au niveau de ni.

Mais dans l'état physique des choses, l'extrémité A étant bouchée, la surface ni n'étant pressée par aucun poids supérieur, l'orifice d étant chargé du poids de la colonne dZ d'air qui lui répond verticalement, et le fluide renfermé dans aBC étant de lui-même en équilibre (556), il faut, pour faire équilibre à la

familles d'animaux auxquels il paroît qu'elle sert de nourriture. Ce gaz est ensuite restitué à l'air par la putréfaction et par la décomposition des substances des deux regnes vivants.

Le caractere distinctif de l'acide carbonnique est d'avoir, 1°. toutes les propriétés des acides; 2°. de précipiter sous forme de terre calcaire le principe terreux de l'eau de chaux. Suivant M. Kirwan, 100 pouces cubiques de ce gaz pesent 68, 715 grains: il est produit dans l'atmosphere, par la fermentation, la respiration, la combustion, ou par tout autre moyen d'acidification du principe charbonneux ou *carbonne*: il en est absorbé par les végétaux, par l'eau, par toutes les terres, par les alkalis, et les métaux calcinés.

La génération et la dégénération des principes constituants de l'atmosphere, telles que nous venons de les développer, les maintiennent communément dans les proportions de 0,28 de gaz oxygene sur 0,72 d'azote. La quantité d'acide carbonnique que l'on y trouve ne peut guere être évaluée à un terme moyen, parcequ'elle n'y est qu'accidentelle: souvent l'air en est totalement privé.

Les instruments chymiques dont on se sert pour évaluer les quantités respectives des principes contituants de l'air atmosphérique, s'appellent des *Eudiometres*: ce sont des substances qui ont la propriété d'absorber un de ces principes sans altérer les autres. Le gaz phosphorique et le foie de soufre, nommé *sulfure de potasse*, sont les meilleurs eudiometres que nous connoissions pour le gaz oxygene: on a démontré l'insuffisance de l'eudiometre à gaz nitreux. L'eau de chaux est un bon eudiometre pour l'acide carbonnique: le résidu de l'air, après qu'il a été dépouillé de l'acide carbonnique, est ordinairement de l'azote, pour lequel nous ne connoissons, à proprement parler, aucun eudiometre bien exact.

M. le professeur Le Roy, et après lui M. Monge, ont démontré, dans ces derniers temps, que l'air avoit une action dissolvante sur les fluides, et principalement sur l'eau. Cette propriété est bien importante dans l'économie de la nature: car elle donne naissance à la plupart

Digitized by Google

pression exercée en d par le poids de la colonne d'air dZ, une colonne de mercure $naib$ dont, à bases égales, le poids soit identiquement le même que celui de la colonne dZ.

Ainsi la pression en d, rapportée à l'unité de surface, sera égale à la pression qui a lieu en ab, rapportée à l'unité de surface, et sera par conséquent (175) égale au produit de la hauteur an, par la pesanteur spécifique du fluide renfermé dans le tube ABC, facteurs qu'on peut toujours déterminer par expérience. Les physiciens prennent ordinairement 28 pouces pour la valeur moyenne de an à la surface de la mer : ainsi chaque portion de cette surface éprouve une pression égale au poids

des phénomenes hydrologiques de l'atmosphere, telles que l'évaporation, la formation des rosées, des vapeurs, etc.

L'air, outre ses principes constituants, et l'eau, qu'il tient toujours en dissolution, quelque desséché qu'il soit, tient aussi souvent en dissolution ou en suspension d'autres principes : tels sont l'air inflammable, nommé *gaz hydrogene;* le gaz alkali volatil, nommé *gaz ammoniac ;* les effluves odorantes, les miasmes putrides : mais ces principes se trouvent communément dans une si petite proportion à l'air libre, qu'ils sont inappréciables par nos principes physiques et chymiques, quoiqu'ils agissent d'une maniere très sensible sur nos organes.

L'eau a toujours été regardée par les anciens comme un élément inaltérable. Un grand nombre de physiciens du dernier siecle, et du commencement de celui-ci, ont soutenu que le mouvement et la chaleur pouvoient la réduire en terre. M. de Lavoisier est le premier qui ait démontré d'une maniere bien exacte la fausseté de cette assertion (*Hist. de l'académie des sciences*, année 1770) : il a fait voir que la terre, qu'on croyoit être formée par des distillations et par des triturations de l'eau long-temps soutenues, n'étoit que le produit de la dissolution des vaisseaux dans lesquels on opéroit.

Le même chymiste, conjointement avec MM. Monge, Meunier, et de la Place (*Mémoires de l'académie*, année 1784), ont prouvé que ce fluide étoit composé de 0,85, en poids d'oxygene, sur 0,15 d'hydrogene, combinés ensemble par une combustion quelconque. Nous allons, vu l'importance de la découverte, présenter le sommaire des preuves directes ou secondaires les plus exactes, qui servent à assurer cette théorie.

Preuves par la synthese. 1°. Le gaz oxygene et le gaz hydrogene, brûlés lentement dans des vaisseaux clos, dans les proportions ci-dessus indiquées, se réduisent en eau. Cette expérience, répétée avec exactitude par plusieurs chymistes célebres, a toujours donné les mêmes résultats ; 0,02 seulement du mélange des deux fluides élastiques, qui n'est que de l'azote, reste sous sa forme, et le dépôt du poids de l'eau formée, sur le poids du reste des gaz employés dans l'expérience, est à peine de $\frac{1}{60}$.

2°. D'après les expériences de M. de Lavoisier, 1 ¼ onces d'esprit-de-vin ont produit, en brûlant dans l'air oxygene, 18 onces d'eau, et une grande quantité d'acide carbonnique ; d'où il a déduit, avec beaucoup de fondement, que la carbonne et l'hydrogene devoient former la base de l'esprit-de vin.

3°. L'ammoniac, d'après les expériences de M. Bertholet, mis en combinaison avec l'acide muriatique déphlogistiqué, nommé *acide muriatique oxygené*, est décomposé, et il se forme de l'eau. L'acide est ramené à l'état d'acide marin, ou *acide muriatique*, sans excès d'oxygene, et il y a dégagement d'azote, qui constituoit, avec l'hydrogene, les deux principes de l'ammoniac.

Preuves par l'analyse. 1°. Si on fait passer de l'eau à travers un tube de verre incandescent, revêtu d'une cotte de métal, pour en prévenir la calcination extérieure, l'eau se décompose, le tube de fer se calcine intérieurement, augmente en poids, et il se dégage du gaz hydrogene. Cette expérience a été répétée un grand nombre de fois, et vient de l'être récemment avec beaucoup d'exactitude par M. Le Fevre de Gineau (*Journal de physique ;* décembre 1788). Sur 3 onces 4 gros 7, 5 grains d'eau qui avoient disparu dans l'expérience,

Digitized by Google

d'une colonne de mercure dont la base seroit égale à cette portion de surface, et la hauteur 28 pouces.

630. Le tube ABC n'est autre chose que l'instrument communément appellé *barometre :* ainsi à différentes hauteurs, dans l'atmosphere, la pression ou la densité se mesurent par les différentes hauteurs du mercure dans le barometre.

Nous ne donnerons pas tous les détails de la construction du barometre, dont il suffit, pour notre objet, d'avoir expliqué le principe. Nous allons passer aux usages de cet instrument, qui intéressent les ingénieurs, et qui peuvent être utiles, dans cer-

on a recueilli 4 gros 24, 25 grains de gaz hydrogene, et le canon bien revêtu, pendant l'expérience, d'une double cotte de fil de fer, avoit augmenté en poids, par la calcination intérieure, de 2 onces 7 gros 17 grains; lequel poids, avec celui du gaz hydrogene dégagé, ne forme qu'une différence de 38 grains $\frac{1}{2}$, ou $\frac{1}{53}$ environ du poids de l'eau qui avoit disparu, différence que ceux qui sont exercés aux expériences de chymie un peu délicates regardent comme nulle.

2°. La limaille de fer, à la température de l'atmosphere, peut, en séjournant dans l'eau, la décomposer et en dégager une certaine quantité de gaz hydrogene, en se calcinant ou s'*oxidant* légèrement.

3°. Le charbon, d'après les observations de M. Gingembre, a la même action sur ce fluide à la même température.

4°. Plusieurs autres substances, telles que le zinc fondu, les huiles bouillantes, ont la propriété de décomposer directement l'eau.

Enfin un grand nombre de phénomenes chymiques qui s'operent dans la nature, tels que les fermentations, la nutrition, toutes les effervescences produites par le gaz oxygene, etc., paroissent également dépendre en partie de la composition ou de la décomposition de l'eau.

L'eau chauffée au-delà du 80e degré du thermometre de Réaumur, se maintient sous la forme d'un gaz très élastique, au moins 800 fois plus rare que l'air ordinaire : c'est ce gaz qui, par son dégagement, produit l'ébullition de l'eau chauffée; c'est le même qui joue un si grand rôle parmi les moteurs qu'on peut appliquer aux machines, desquels il est, sans contredit, le plus puissant : il donne le nom de *pompes à feu* aux pompes qu'il fait mouvoir. Cette matiere sera traitée avec un grand détail dans le cours de cet ouvrage.

L'eau, en se glaçant, laisse dégager deux ou trois degrés de chaleur, se crystallise en poliëdre à 8 faces, devient élastique, et, suivant les observations de M. Achard, lorsque la glace est bien desséchée par un froid vigoureux, elle est idioëlectrique et capable de s'électriser par le frottement. La densité de la glace est réellement plus grande que celle de l'eau, d'après les loix de la condensation des corps : mais lorsque la congélation a lieu dans de l'eau exposée à l'air libre, elle augmente beaucoup de volume par la quantité d'air qui s'en dégage dans ces circonstances (Voyez la note de l'art. (526)).

L'eau, dans l'ordre des phénomenes chymiques, dans lesquels elle ne subit aucune décomposition, dissout de l'air tant qu'elle est sous forme fluide : elle est même dissoluble dans l'atmosphere, comme on l'a dit plus haut, et dans tous les gaz. Les chaux métalliques, et les acides métalliques, s'y dissolvent de plus en plus, à mesure qu'ils sont chargés d'une plus grande quantité d'oxygene : mais il paroît que les substances métalliques sont insolubles dans ce fluide avant leur *oxidation*.

L'eau a également une action dissolvante, quoique très foible, sur toutes les terres : la terre siliceuse elle-même, nommée *silice*, est, d'après les observations de M. Bergman, dissoluble dans l'eau bouillante.

Ces détails sont suffisants pour les ingénieurs qui ont quelque notion de chymie, et qui ne verront pas sans intérêt le rapprochement des plus belles découvertes dont s'honorent les sciences, sur deux fluides dont la mécanique tire un si grand parti, et qui jouent un si grand rôle tant dans l'économie animale que dans celle de la nature en général.

tains cas, pour faire des nivellements préliminaires qui ne demandent pas la plus grande précision.

Application du barometre au nivellement.

Recherche d'une équation qui exprime la relation entre la hauteur du mercure dans le barometre, et la différence de niveau entre deux stations.

631. Soit h la hauteur du barometre dans une couche d'air qu'on choisit pour terme de départ de la mesure d'une ou plusieurs hauteurs, et où on placera l'origine des z dans l'équation $\varphi z = \int \frac{dP}{\delta}$ (627); nommons p la pesanteur spécifique du mercure, ph exprimera la pression de l'air à l'origine des z (524, 629); nommons h' la hauteur du barometre à une élévation z au-dessus de l'origine, la pression à cette élévation sera ph'; ce qui donnera $dP = -p\,dh'$, en faisant attention que la pression diminue quand z augmente.

Soit D' la densité de l'air à l'origine des z, et supposons que la température est la même dans toute la hauteur de z; comme les densités sont proportionnelles aux pressions, à température égale (523), on aura la proportion $ph : D' :: ph' : \delta = D'\frac{h'}{h}$. Substituant les valeurs qu'on vient de trouver pour dP et δ dans l'équation $\varphi z = \int \frac{dP}{\delta}$, elle devient $\varphi z = \int \frac{-ph\,dh'}{D'h'}$, et en intégrant, $\varphi z = \frac{-ph}{D'} \log. h' + A$. La constante A se détermine par la condition que lorsque $z = 0$, $h = h'$; ce qui donne $A = \frac{ph}{D'} \log. h$, et l'intégrale complete devient $\varphi z = \frac{ph}{D'} (\log. h - \log. h')$. Nommant D la densité du mercure, on a (176) $p = \varphi D$; et substituant cette valeur, il vient finalement $z = \frac{D}{D'} h\,(\log. h - \log. h')$, équation qui, en supposant la température constante, donne la différence de niveau z entre les deux points où le barometre se tient aux hauteurs h et h'.

Équation qui exprime cette relation.

Considérations sur les logarithmes hyperboliques qui entrent dans cette équation, et nouvelle formule qui n'exige que l'usage des logarithmes ordinaires.

632. Les quantités log. h, log. h', sont, comme on sait, les logarithmes hyperboliques des nombres h et h' : on trouve ces logarithmes dans les tables de Gardiner, publiées en 1783, par M. Callet, et qui sont très répandues. Ceux qui n'auront pas ces tables pourront se servir des logarithmes vulgaires, qui, divisés par le module 0, 434244, donnent les logarithmes hyperboliques correspondants. Ainsi désignant, comme nous le ferons toujours dorénavant, les logarithmes hyperboliques par le signe *log.*, et les logarithmes vulgaires par le signe L, on aura $z = \frac{D h}{0,434294\, D'} (L \cdot h - L \cdot h')$.

633. On peut, dans cette équation, substituer au rapport $\frac{h}{D'}$,

Digitized by Google

dont chaque terme en particulier est différent dans chaque observation, un rapport égal, dont chaque terme sera déterminé, une fois pour toutes, par une expérience quelconque. Supposons qu'on ait reconnu, par cette expérience, qu'une certaine hauteur H du barometre répond à une densité Δ de l'air, on aura (523), $H : \Delta :: h : D'$, ou $\frac{H}{\Delta} = \frac{h}{D'}$, et l'équation deviendra $z = \frac{DH}{0,45429\,\Delta}(Lh - Lh')$, où le coëfficient de $Lh - Lh'$ est toujours le même, quels que soient l'origine des z ou le point de départ et la hauteur à mesurer.

La même formule, dans laquelle le coëfficient constant est déterminé par une expérience faite une fois pour toutes; conditions que suppose l'usage de cette formule.

Il ne faut pas perdre de vue que l'application de l'équation précédente suppose 1°. que la température qui avoit lieu lorsque la hauteur H du barometre répondoit à la densité Δ de l'air, est la même que celle qui a lieu lors des observations barométriques; 2°. que cette température est la même dans toute la longueur de la hauteur z à mesurer.

634. Les quantités h et h' sont toujours immédiatement données par l'observation barométrique : la densité moyenne du mercure (celle de l'eau étant prise pour unité) est, d'après M. Brisson, égale à 13,568 = D; celle de l'air, lorsque le barometre est à 28 pouces, le thermometre de Réaumur, à 10°, est égale à $\frac{0,08633\,1}{69,766} = 0,0012375 = \Delta$ (*). Mettant, dans l'équation précédente, pour D, sa valeur 13,568; pour H, 28 pouces, ou 0,38889 de toise; et pour Δ, 0,0012375, elle devient

Détermination numérique du coëfficient constant dans une hypothese particuliere de pression et de température de l'air.

$$z = \frac{13,568 \times 0,38889}{0,0012375} \cdot \frac{L.h - L.h'}{0,45429} = 9818,2\,(Lh - Lh').$$

635. L'équation précédente revient, à très peu de chose près, à celle-ci, $z = \left(10000 - \frac{10000}{55}\right)(Lh - Lh')$: ainsi, prenant les logarithmes avec sept décimales, pour avoir z, il ne

(*) Le dénominateur 69,766, de la valeur de Δ, est le poids du pied cube d'eau douce (526, *note*); le numérateur 0,086331 est le poids du pied cube d'air à une pression de 28 pouces et à une température de 10°. Pour trouver cette valeur, il faut réduire tous les résultats qui composent la table de la note de l'art. 524, à la pression et à la température dont on vient de parler, et prendre un milieu entre les valeurs trouvées.

Pour faire la réduction dont on vient de parler, on pourra se servir de la formule suivante, dont on trouvera aisément la démonstration au moyen de ce qui est dit art. (523). Soit P' le poids cherché du pied cube d'air, le barometre étant à une hauteur h', et le thermometre marquant un nombre k' de degrés; soit P le poids connu du pied cube d'air, le barometre étant à une hauteur h, et le thermometre marquant un nombre k de degrés; soit enfin nP la quantité dont P diminue lorsque k augmente d'un degré; on a

$$P' = P\left\{\frac{h'}{h}\left[1 + n\,(k - k')\right]\right\}.$$

Digitized by Google

faudra que reculer de quatre chiffres la virgule qui sépare la caractéristique de $Lh - Lh$, qui se trouvera ainsi multipliée par 10000; regarder le produit comme exprimant des toises, et le diminuer de sa cinquantieme cinquieme partie.

Comparaison de la derniere formule avec celle de M. Bouguer.

La regle de M. Bouguer est de multiplier $Lh - Lh$ par 10000, et de diminuer le produit de $\frac{1}{50}$: les hauteurs calculées par cette méthode sont par conséquent trouvées un peu moindres que lorsqu'on les calcule par la formule précédente; on retrouveroit très aisément la regle de M. Bouguer en faisant tant soit peu varier les facteurs qui composent le coëfficient de $Lh - Lh'$, variation qui peut être assez sensible sans qu'on sorte des limites qui renferment les résultats des expériences les plus exactes.

Difficulté de déterminer la valeur du coëfficient constant; obstacles qui s'opposent à cette détermination.

636. En général, il est extrêmement difficile, ou plutôt impossible, d'assigner à la quantité $Lh - Lh'$ un coëfficient constant qui convienne à toutes les circonstances et à tous les lieux : car, excepté le diviseur 0,43429, qui est un module invariable, les autres nombres, qui sont relatifs aux rapports des densités du mercure et de l'air, sont sujets à des variations dépendantes, soit des instruments, soit des états instantanés de l'atmosphere, dont les moindres peuvent produire un changement notable dans le résultat. Par exemple, la densité du mercure, que nous supposons, avec M. Brisson, égale à 13,568, est évaluée, par d'autres physiciens, à 13,996, et varie suivant le degré de pureté et la température de ce fluide. La densité de l'air, évaluée à une certaine hauteur du barometre et à une certaine température, ne se retrouve pas toujours la même, quoique la pression et la chaleur ne varient pas, parcequ'il y a d'autres circonstances, comme l'état hygrométrique de l'atmosphere, qui influent sur cette densité. Nous avons vu (169) qu'à des élévations considérables la pesanteur diminue, etc. etc.

La température inégale de l'air, à différentes hauteurs, est la source d'irregularité, dans les mesures prises avec le barometre, qui a le plus occupé les physiciens; loi que suit cette inégalité de température à différentes hauteurs; auteurs qui ont travaillé à rectifier les erreurs provenantes de l'inégale température de l'air.

637. De toutes les causes qui tendent à mettre de l'irrégularité dans la mesure des hauteurs prises avec le barometre, celle qui a le plus occupé les physiciens est l'inégale température de l'air à différentes hauteurs. On s'est assuré, par des expériences réitérées, que l'air est plus froid à mesure qu'on s'éleve, et, selon M. de Saussure (*Journal de physique, décembre* 1788), on peut supposer qu'entre les 45° et 47° degrés de latitude, la température moyenne de l'air décroît, depuis le niveau de la mer, jusqu'à la cime des plus hautes montagnes, de $\frac{1}{100}$ de degré du thermometre de Réaumur, par toise, en été, et de $\frac{1}{150}$ de degré en hiver.

Digitized by Google

Il suit de cette vérité d'expérience, que la détermination du coëfficient $\frac{DH}{\Delta}$, dans l'équation $z = \frac{DH}{0,43429\,\Delta}(Lh - Lh)$, obtenue pour une certaine température, ne pourra jamais convenir à l'état de l'air dans toute l'étendue de z, puisqu'il n'y aura qu'un point de cette étendue dont la température pourra être la même que celle qui a eu lieu lors de l'expérience faite pour déterminer Δ : il faut donc avoir égard à la différence de température qui a lieu dans l'étendue de z. MM. du Luc et Trembley ont donné des formules pour avoir égard à cette différence, que nous allons rapporter. Ces formules sont le résultat combiné d'un grand nombre d'expériences.

Formule corrigée, de M. du Luc.

638. 1°. *Formule de M. du Luc.* Observez les degrés du thermometre de Réaumur au point le plus bas et au point le plus haut de z, hauteur à mesurer; prenez les différences de ces degrés à 16, 75 degrés; donnez à ces différences les signes qu'elles comportent, et faites une somme dont vous prendrez la moitié; cette moitié étant nommée $\pm k$, on aura l'équation

$$z = 10000\,(Lh - Lh')\,(1 \pm \tfrac{k}{215}).$$

Ainsi, en prenant les logarithmes ordinaires, reculant de quatre chiffres la virgule qui sépare la caractéristique, et augmentant ou diminuant le nombre qui en résulte, de sa $\frac{k}{215}$ partie, suivant le signe de k, on aura la hauteur z exprimée en toises.

Formule corrigée, de M. Trembley.

639. 2°. *Formule de M. Trembley.* Agissez comme précédemment : mais, au lieu de prendre les différences à 16, 75 degrés, prenez-les à 11, 5 degrés, et, au diviseur 215, substituez le diviseur 192; vous aurez la formule

$$z = 10000\,(Lh - Lh')\,(1 \pm \tfrac{k}{192}).$$

Application des deux formules précédentes à des observations faites par MM. de Saussure et Lévesque.

640. M. de Saussure a observé sur le col du géant la hauteur du barometre, valeur moyenne entre quatre-vingt-cinq observations, de 18 pouces 11 lignes $\frac{5688}{16000}$ de ligne = 227, 355 lignes, et la hauteur du thermometre de Réaumur, de 3°, 63, pendant que M. Lévesque, qui observoit de son côté, au prieuré de Chamouni, a eu pour hauteur moyenne du barometre, entre les quatre-vingt-cinq observations correspondantes, 25 pouces 0 ligne $\frac{102}{160}$ de ligne = 300, 63 lignes, et 17°, 288 pour celle du thermometre.

Digitized by Google

D'après ces données, la méthode de M. du Luc donne $k = -6,29$, et sa formule devient

$$z = 10000\,(\mathrm{L}\cdot 300,63 - \mathrm{L}\cdot 227,355)\left(1-\frac{6,29}{215}\right) = 1213,373\left(1-\frac{6,29}{215}\right)$$
$$= 1177,886 \text{ toises},$$

et la méthode de M. Trembley donne $k = -1,041$; d'où

$$z = 10000\,(\mathrm{L}\cdot 300,63 - \mathrm{L}\cdot 227,355)\left(1-\frac{1,041}{192}\right) = 1213,373\left(1-\frac{1,041}{192}\right)$$
$$= 1206,796 \text{ toises.}$$

La formule de M. Trembley, plus exacte que celle de M. du Luc, exactitude de ses expériences sur la dilatation de l'air par la chaleur.

La différence de niveau, mesurée géométriquement, a été trouvée de 1223 toises (*): ainsi l'erreur de la formule de M. du Luc est de 29 toises, et l'erreur de la formule de M. Trembley est de 16 toises : cette derniere formule paroît en général plus conforme aux observations que celle de M. du Luc. La fraction $\frac{1}{192}$ est la quantité dont M. Trembley a trouvé que la densité de l'air varioit pour un degré de changement dans la température ; ce qui s'approche beaucoup de la valeur moyenne 0,005 que nous avons précédemment déduite de plusieurs expériences.

La formule, sans correction, approche plus de la mesure géométrique de M. de Saussure que les deux formules précédentes.

641. Observons que, dans l'exemple qu'on vient de donner, la formule $z = 10000\,(\mathrm{L}\,h - \mathrm{L}\,h')$, employée sans correction, donne $z = 1213$ toises, et approche plus de la vérité que les formules corrigées de MM. de Luc et Trembley; car elle ne differe de la mesure géométrique que de 10 toises.

Les densités de l'air peuvent être supposées décroître en progression géométrique ; causes dont le concours établit cette progression.

642. Le résultat de tout ce que nous avons dit sur la mesure des hauteurs par le barometre, est qu'en général on considere les densités comme décroissant en progression géométrique, tandis que la hauteur croît en progression arithmétique. En effet la formule, corrigée ou non corrigée, se réduit à $z = \mathrm{A}\times\mathrm{L}\frac{h}{h'}$, dans laquelle A est un coëfficient variable, à la vérité, en différents temps ou en différents lieux, mais constant, lorsqu'il est considéré dans une même colonne d'air et dans un instant déterminé. Cette hypothese semble, au premier coup-d'œil,

(*) Il est à présumer qu'on a eu égard, dans cette mesure, à la réfraction terrestre, et qu'on s'est servi des formules équivalentes à celles données dans la note de l'art. (551). Cette précaution est importante : car, en la négligeant, on s'expose à attribuer aux observations barométriques des irrégularités qu'elles n'ont pas. M. Lambert, dans le Traité dont nous avons tiré les formules de la note qu'on vient de citer, après avoir appliqué ces formules à la correction de plusieurs hauteurs mesurées géométriquement, trouve un accord surprenant entre ces hauteurs corrigées et les hauteurs données par le barometre. Il a formé, d'après la comparaison des unes et des autres, une table des hauteurs barométriques répondantes aux élévations des endroits au-dessus de la mer, qui est insérée dans le même ouvrage.

rendre

Digitized by Google

rendre la hauteur de l'atmosphere infinie, et il faudroit, pour ne pas tomber dans cet inconvénient, supposer que les densités décroissent un peu plus vîte que ne l'exige la progression géométrique : mais, d'un autre côté, le refroidissement, qui augmente à mesure qu'on s'éleve, tend à augmenter la densité, et peut rétablir sensiblement la progression géométrique, sans que, pour cela, la hauteur de l'atmosphere soit infinie, parceque la densité de la couche la plus élevée est due au seul refroidissement, qui s'y trouve en équilibre avec le ressort de l'air.

Ce qui résulte de la propriété précédente; du module barométrique, et de son utilité; application d'une valeur particuliere de ce module à l'expérience de M. de Saussure.

Ainsi, dans un instant déterminé, une colonne d'air a toujours la propriété suivante; savoir, que $\frac{Lh - Lh'}{z}$ est une quantité constante : M. Meusnier a appellé ce nombre *le module barométrique*. (*Lettre à M. Faujas de Saint-Fond, sur l'expérience aérostatique faite à Paris le 27 août* 1783). La considération de ce module peut avoir des applications utiles en physique, simplifier et généraliser les recherches relatives à la mesure des hauteurs par le barometre. Voyez à cet égard la lettre qu'on vient de citer. M. Meusnier, en rapprochant plusieurs expériences faites par MM. de Saussure et du Luc, trouve qu'elles s'accordent à donner, pour la valeur du module barométrique, le nombre 0,0001041 ; ce qui changeroit la formule pour la détermination des hauteurs, en $z = \frac{Lh - Lh'}{0,0001041}$. Cette formule, appliquée à l'expérience de M. de Saussure, citée plus haut, donne, pour l'élévation du col du géant, 1166 toises; ce qui s'éloigne de 57 toises de la vérité : ainsi le module barométrique 0,0001041 ne convient pas à l'état de l'air pour cette expérience ; le vrai module barométrique qui lui convient est

$$\frac{0,1213,373}{1223} = 0,000099212.$$

Influence de la température sur le barometre lui-même ; expériences pour connoître les erreurs qui peuvent en résulter.

643. Le froid et la chaleur n'influent pas seulement sur l'état de l'air, mais encore sur le barometre lui-même. M. du Luc a reconnu que, par une augmentation de chaleur capable de faire monter le thermometre, depuis le point de la glace jusqu'à l'eau bouillante, la hauteur du barometre augmenteroit de 6 lignes. Lorsque cette hauteur est à 27 pouces, $\frac{1}{36}$ de l'intervalle compris entre les deux termes fixes du thermometre, produit une variation de $\frac{1}{16}$ de ligne dans le barometre. M. du Luc a adapté à son barometre d'observation un thermometre destiné à faire connoître cette variation dans tous les cas. (Voyez son ouvrage, part. III, chap. I.)

Digitized by Google

Le barometre ne peut pas remplacer les niveaux ordinaires ; mais son usage est utile quand on n'a pas besoin de la plus grande précision

644. Tel est à peu-près l'état des connoissances actuelles sur l'application du barometre au nivellement : on voit que cet instrument ne peut jamais remplacer le niveau ordinaire, ni les instruments de géométrie ; mais comme son usage est beaucoup plus commode et plus expéditif, il peut être utile en bien des circonstances où l'on veut connoître la différence de niveau entre plusieurs lieux, et où l'on n'a pas besoin de la plus grande précision.

Des machines à élever l'eau en général, et de la statique des pompes en particulier.

Liaison de la théorie avec les matieres précédemment traitées ; étendue de cette théorie ; nécessité de la faire prendre par des considérations sur les machines à élever l'eau, en general.

645. Tout ce que nous avons dit dans cette section, sur l'air et sur l'eau, nous conduit naturellement à donner les principes généraux de la statique des pompes, dont la construction et l'usage doivent occuper un rang très distingué parmi les différentes matieres qui font l'objet de cet ouvrage.

646. La théorie des pompes, prise dans toute son étendue, présente des applications, et exige la connoissance de tous les principes de la mécanique, tant des corps solides que des fluides : c'est donc avec grande raison que nous donnons pour introduction à l'architecture hydraulique un traité qui renferme toutes les parties de la mécanique : nous aurons mille occasions de faire sentir l'utilité d'une pareille précaution.

Avant de parler des pompes en particulier, il est nécessaire de jeter un coup-d'œil sur les machines à élever l'eau, en général, afin de faire connoître leur filiation, leurs rapports, et d'établir dans cette étude importante une marche méthodique et comparative.

L'élévation de l'eau constitue l'objet principal ou accessoire de presque tous les travaux d'architecture hydraulique.

647. Il n'est presque pas d'application des regles de l'architecture hydraulique qui ne suppose l'élévation de l'eau à différentes hauteurs, soit comme objet principal, soit comme moyen accessoire. En effet, ou l'on veut employer ce fluide aux besoins de la vie, et cette condition impose la loi de le conduire aux différents points où il est nécessaire qu'il parvienne, ou bien il s'agit de constructions à faire dans l'eau ; et alors il faut, le plus souvent, mettre à sec l'emplacement où ces constructions doivent être établies ; ce qui ne peut s'exécuter qu'en élevant l'eau au-dessus des digues dont on les environne. Nous verrons, dans la suite, les cas où l'on peut se dispenser de cette précaution, et les moyens qu'on emploie pour y suppléer.

648. L'expédient le plus simple et le plus direct à employer

Digitized by Google

pour enlever l'eau, est de la recueillir dans des vases tels que des peles creuses ou *écopes*, des *seaux*, etc., auxquels la main des hommes est immédiatement appliquée, et c'est à quoi se réduit une maniere particuliere d'épuiser l'eau d'une tranchée, qu'on appelle *bacqueter*. Dans d'autres circonstances, où la surface de l'eau est trop basse pour qu'on puisse y plonger le vase avec la main, on suspend ce vase à une corde ou une chaîne, qui, pour plus de commodité, peut passer sur une poulie; mais cet expédient, considéré dans la relation de l'effort du moteur au poids à élever, ne differe pas du précédent, et exige également que cet effort et ce poids soient parfaitement égaux, ainsi que la vîtesse du moteur et celle de la résistance.

Des machines les plus simples qu'on puisse employer pour élever l'eau, et dans lesquelles les efforts du moteur et de la résistance sont égaux.

649. Lorsque le moteur qu'on emploie n'est pas capable d'un effort égal au poids de l'eau qu'on veut enlever, ou que, par des raisons quelconques, on veut employer un effort moindre que ce poids, alors il faut adapter la corde qui suspend le vase à un treuil ou à telle autre machine qui sera propre à l'objet qu'on a en vue; on aura ainsi ajouté une perfection aux moyens décrits dans l'article précédent, en se procurant la possibilité d'économiser l'effort du moteur : cependant ce moteur restant le même, la quantité d'eau, élevée à une hauteur donnée dans un même temps, ne sera pas plus grande, parceque, quoiqu'on en éleve davantage en une fois, on la fait monter avec moins de vîtesse. Toute cette théorie a été expliquée et développée très en détail, art. (487) et suivants.

Premiere circonstance où l'on emploie ces machines simples en rendant l'effort du moteur moindre que celui de la résistance.

650. Les machines précédentes supposent qu'il s'écoule un certain intervalle de temps entre l'instant où une certaine quantité d'eau puisée arrive à sa destination et celui où il arrive de nouvelle eau à la même hauteur : cette considération suggere naturellement l'idée d'ajouter encore une perfection de plus à ces machines, et de les rendre propres à donner une espece de continuité au *puisement* et à la fourniture de l'eau. Le moyen le plus simple qui se présente à l'esprit pour remplir cet objet, est d'attacher à une chaîne ou à une corde sans fin, ou enfin à la circonférence d'une roue, un certain nombre de seaux, pots, godets, etc., tellement disposés, que la chaîne sans fin, ou la roue, étant en partie plongée dans l'eau, on puisse, en faisant tourner un axe qui sera, ou celui d'une lanterne destinée à faire mouvoir la chaîne sans fin, ou celui de la roue, faire descendre et monter alternativement les seaux, pots, godets, etc., qui, se remplissant dans le bas, se vuidant à une certaine hauteur, et se succédant avec plus ou moins de rapi-

Méthode pour ajouter encore une perfection de plus à ces machines, et rendre leur produit continu.

Digitized by Google

dité, procureront à la fourniture de l'eau l'espece de continuité qu'on vouloit obtenir.

Machines exécutées d'après cette méthode.

651. Il y a un grand nombre de machines ingénieuses et utiles qui se rapportent au moyen qu'on vient d'exposer. Telles sont la plupart de celles qu'on nomme *chapelets;* telle est la *noria*, dont on fait un grand usage en Espagne; telle est encore la *grande roue à godets,* dont on se sert pour les épuisements, etc., etc. La partie descriptive de cet ouvrage traitera de toutes celles de ces machines qui méritent quelque attention.

La théorie de toutes les machines précédentes dépend presque en entier de la mécanique des corps solides.

652. Toutes ces machines enlevent l'eau à la maniere des fardeaux ordinaires, et, abstraction faite de la nature du moteur, qui peut être un fluide, on ne doit considérer, dans leur théorie, d'autre propriété appartenante aux fluides, que celle qu'a la superficie supérieure des eaux, d'être toujours de niveau, propriété qui détermine la quantité d'eau que les pots, godets, etc., peuvent enlever, d'après leur grandeur, leur forme, et les circonstances de l'écoulement de cette eau; en ayant égard à cette considération, on traitera la théorie de ces machines d'après les principes de la mécanique des corps solides, que nous avons exposée dans les sections précédentes.

Perfection et modification de ces machines; chapelets verticaux.

653. Mais cette propriété qu'a l'eau de se tenir de niveau dans un vase ou dans plusieurs vases qui se communiquent, peut nous aider à faire un pas de plus et à perfectionner les machines mentionnées à l'art. (650), en simplifiant même leur construction. ABCD (*fig.* 145) est un cylindre creux, qu'on nomme *buse,* calibré avec exactitude, et dont la partie inférieure est plongée dans l'eau; *abcd* est une chaîne sans fin, garnie, dans tout son périmetre, de rondelles de cuir, contenues et pressées entre deux plaques de métal, et disposées pour boucher exactement le cylindre creux; on suppose d'abord que l'intervalle entre deux rondelles est plus petit que la distance du point le plus bas de la chaîne à la surface de l'eau. Cette chaîne tourne sur la lanterne F, dans un sens tel que la partie contenue dans la buse monte tandis que l'autre partie descend dans l'intérieur de la boîte ou caisse GH. On conçoit aisément que lorsqu'une des rondelles s'introduit dans la partie inférieure du cylindre, elle intercepte toute communication entre l'eau contenue dans la buse et le reste du fluide. Cette eau est donc dans le même état que si elle étoit renfermée dans un seau ou godet auquel la rondelle serviroit de fond, et doit s'élever à mesure que ce fond variable parvient à différentes

Digitized by Google

hauteurs : mais la rondelle ne peut pas monter dans la buse sans que la pression latérale du fluide ambiant ne fasse remplacer par de nouvelle eau l'espace qu'elle abandonne ; elle n'est pas encore au niveau de la surface de l'eau extérieure, lorsqu'une seconde rondelle s'introduit dans le bas de la buse, et enleve à son tour l'eau qui étoit naturellement remontée sous la précédente, et ainsi de suite.

On voit donc que la machine que nous décrivons, et qui est rangée dans la classe des *chapelets verticaux*, doit être considérée comme un vase immobile, dont l'intérieur est disposé de maniere à pouvoir y appliquer différents fonds variables, qui, s'élevant l'un après l'autre, élevent en même temps l'eau qui est au-dessous d'eux : cette machine n'est donc, ainsi que nous l'avons dit, qu'une modification de celles dont il est question à l'art. (650) ; mais elle est encore elle-même susceptible de modification. Voici comment.

De la pompe foulante ; son analogie avec la pompe à chapelet.

654. ABEF (*fig.* 146) est un cylindre creux qu'on peut assimiler à celui de la *figure* 145 : mais, dans la machine dont il s'agit, on a substitué à toutes les rondelles de la *figure* 145 un seul bouchon ou *piston* L, qui, montant et descendant alternativement, fait le même effet que ces rondelles, qu'il remplace toutes lui seul, au moyen d'un mécanisme particulier. Ce mécanisme consiste 1°. à fermer le cylindre ABEF dans une section FE de sa hauteur, au moyen d'un petit couvercle I, à charniere, qu'on nomme *soupape*, et qui, lorsqu'il est abaissé, bouche très exactement l'orifice auquel il est adapté ; 2°. à pratiquer une ouverture verticale à travers le piston L, laquelle ouverture est fermée, comme la précédente, par une autre soupape K qui se meut également autour d'une charniere.

Explication de la maniere dont la pompe foulante éleve l'eau.

Supposons maintenant que le niveau de l'eau soit en *ne* ; il est évident que le fluide renfermé dans AB*en*, y est comme dans un vase particulier dont le fond peut s'élever, ainsi que cela a lieu dans la machine de l'article précédent. Si donc on éleve ce fond ou le piston L jusques près de FE, la surface *en* s'élevera jusqu'en *e'n'*, le diametre du tuyau montant GH étant supposé égal au diametre de l'espace cylindrique dans lequel se meut le piston : mais lorsqu'on redescendra le piston L à sa premiere place, l'eau contenue au-dessus de BC ne redescendra point, vu que son poids fera baisser la soupape I, et qu'elle se fermera elle-même le passage. Cependant lorsque le piston L s'est mu du côté de FE, il a été suivi par l'eau que la pression latérale faisoit remonter dans l'espace

Digitized by Google

qu'abandonnoit ce piston : cette eau, lors de la descente du même piston, fait effort sur la soupape K, qui est très mobile, autour de sa charniere, et vient se loger, au-dessus de ce piston, dans la partie qu'il abandonne en s'éloignant de FE. De cette maniere, lorsque le piston est parvenu au point le plus bas de sa course, l'espace compris depuis la soupape K jusqu'à la section FE est encore plein d'eau : on peut donc considérer le fluide compris dans AB $e'n'$ comme on a considéré précédemment le fluide compris dans AB en, et on voit que, lorsque le piston remontera vers BC, la surface $e'n'$ s'élevera en $e''n''$, où elle restera lors de la descente du piston, comme elle étoit restée en $e'n'$, et par la même raison. En continuant cette manœuvre, on élevera l'eau à une hauteur arbitraire, pourvu qu'on ait un moteur suffisant et une machine assez solide.

655. La machine que nous venons de décrire est une de celles qu'on nomme *pompes foulantes :* on voit par son mécanisme, très aisé à concevoir, qu'elle n'est qu'une modification de la pompe à chapelet décrite dans l'article précédent.

Ce qu'on appelle *corps de pompe.*

656. La partie ABCD, dans laquelle se meut le piston, s'appelle *corps de pompe.*

Autre espece de pompe foulante ; explication de la maniere dont elle éleve l'eau.

657. Il peut se faire que, par des raisons quelconques, on veuille fouler de haut en bas au lieu de fouler de bas en haut : cette condition exige un petit changement au mécanisme de la *figure* 146, qu'on voit représenté dans la *figure* 147. Le piston, qu'on suppose toujours placé au-dessous du niveau de la surface supérieure de l'eau du *réservoir ou puisard,* est plein, c'est-à-dire sans soupape ; c'est la soupape X qui en tient lieu et qui sert à introduire l'eau dans le corps de pompe ; le tuyau montant latéral GHNO porte une autre soupape S, qui s'ouvre quand le piston s'abaisse, et se ferme quand il s'éleve. On conçoit aisément qu'avant qu'il y ait aucune eau refoulée dans le tuyau latéral, l'eau doit y être au même niveau que dans le réservoir avec lequel il communique par les ouvertures auxquelles sont adaptées les soupapes : mais si on baisse le piston, la soupape X se fermera et empêchera l'eau, pressée par ce piston, de passer dans le réservoir ; la soupape S, au contraire, s'ouvrira et laissera monter l'eau dans le tuyau latéral. Lorsqu'ensuite on élevera le piston, l'effet inverse aura lieu, l'eau du réservoir viendra affluer dans l'espace que ce piston laissera libre, et l'eau du tuyau latéral, se trouvant plus élevée que celle du réservoir, tiendra la soupape S fermée par son excès de pression, au moyen de quoi cette eau ne pourra point redescendre

Digitized by Google

dans le corps de pompe. En baissant le piston une seconde fois, on introduira de nouvelle eau dans le tuyau latéral, et ainsi de suite. On voit que l'effet de cette pompe tient aux mêmes principes que celui de la pompe précédente.

Différents avantages des pompes foulantes sur les pompes à chapelet; application d'un de ces avantages à la pompe à incendie.

658. La réduction du nombre de ce que nous avons appellé *les fonds mobiles du cylindre creux* de la *figure* 145, et l'ascension indéfinie de l'eau au moyen d'un seul fond ou piston mobile, ne sont pas les seuls avantages des machines représentées par les *figures* 146 et 147, sur la machine représentée par la *figure* 145 : il en est d'autres très précieux, tels que celui de pouvoir être mises en action par un moteur qui n'exerceroit qu'une action alternative, comme un pendule ou balancier, ce dont le chapelet et les machines analogues ne sont gueres susceptibles, et celui de pouvoir donner à l'eau une vîtesse ascensionnelle plus grande que la vîtesse avec laquelle se meut le piston : la machine représentée par la *figure* 147 est disposée pour ce dernier effet; le diametre du tuyau latéral, dans lequel monte l'eau refoulée, est plus petit que celui du corps de pompe dans lequel se meut le piston : ainsi S étant la section horizontale du vuide du corps de pompe, et s la section pareille du vuide du tuyau latéral, lorsque le piston descend d'une quantité V dans le corps de pompe, l'eau doit monter dans le tuyau latéral d'une quantité v, qui est à V comme S : s; ce qui donne $v = \frac{S}{s}$ V, et par conséquent $v >$ V.

Cette propriété est très utile lorsqu'on veut faire jaillir l'eau hors du tuyau latéral avec une grande vîtesse, ainsi que cela est nécessaire dans les pompes à incendie.

De la pompe foulante, et de son analogie avec la pompe aspirante.

659. Jusqu'ici nous avons supposé que la soupape qui introduisoit l'eau dans le corps de pompe étoit placée au-dessous du niveau de la surface supérieure de l'eau du réservoir ou *puisard*, et que tout le jeu du piston avoit lieu au-dessous de cette surface; mais il est possible de placer cette soupape, ainsi que le jeu du piston, au-dessus du niveau de l'eau extérieure, comme on le voit représenté par la *figure* 148, et, lorsque la machine aura les proportions nécessaires, on parviendra, comme dans les cas précédents, à amener et à renfermer l'eau dans le corps de pompe. La possibilité de cet effet est fondée sur ce que le corps de pompe et le tuyau inférieur, étant remplis en partie d'air et en partie d'eau, qui, avant que le jeu du piston ait lieu, sont en équilibre avec les pressions réunies de l'air et de l'eau extérieurs, si on vient à raréfier l'air intérieur en élevant le piston,

Digitized by Google

et par conséquent à diminuer son ressort, il faudra, pour que l'équilibre se rétablisse, que l'eau remonte en dedans jusqu'à ce que l'augmentation de hauteur de cette colonne d'eau intérieure, jointe à l'augmentation de ressort qu'elle procurera à l'air intérieur en le condensant, fassent de nouveau équilibre à la pression de l'air et de l'eau extérieurs. L'ascension du piston produit ici, à l'égard de deux fluides en équilibre, un effet analogue à celui que l'ascension du piston, dans la machine représentée par la *figure* 146, produit à l'égard d'un seul de ces fluides, et voilà ce qui établit la filiation entre la machine que nous décrivons et celle que nous avons décrite précédemment dans la propriété même qui paroît mettre une ligne de démarcation entre elles. Les effets subséquents à l'introduction de l'eau dans le piston, sont les mêmes, dans l'une et dans l'autre, relativement à l'élévation de l'eau, supérieure au piston.

Ce que c'est que le tuyau d'aspirat. dans la pompe foulante.

660. La machine représentée par la *figure* 148 s'appelle *pompe aspirante;* le tuyau inférieur au corps de pompe, dont une des extrémités plonge dans l'eau, s'appelle *tuyau d'aspiration*. Entrons dans quelques détails sur la maniere dont se fait cette aspiration.

Explication de la maniere dont la pompe aspirante éleve l'eau.

661. Nous avons vu (629) qu'au niveau de la mer, ou a peu de hauteur au-dessus de ce niveau, on pouvoit regarder chaque portion de la surface supérieure des eaux, comme éprouvant une pression équivalente au poids d'une colonne de mercure dont la base seroit égale à cette portion de surface, et la hauteur 28 pouces. D'après le rapport 1 : 13, 568, (636), des pesanteurs spécifiques de l'eau et du mercure, une colonne de mercure, de 28 pouces de hauteur, a un poids égal à une colonne d'eau de même base et de 31, 61 pieds de hauteur, que nous considérerons, suivant l'usage, comme étant valeur moyenne de 32 pieds. Cela posé, et l'eau renfermée dans le tuyau d'aspiration étant encore à la même hauteur que l'eau extérieure, il est évident que la colonne d'air renfermée dans ce tuyau, ainsi que dans le corps de pompe, au-dessous du piston, aura la même densité et le même ressort que l'air extérieur, et que sa base *ne* éprouvera une pression de 32 pieds d'eau, ainsi que la surface de l'eau extérieure. Si, maintenant, on éleve le piston, l'espace qu'occupoit l'air renfermé dans le corps de pompe se trouvera agrandi, son ressort diminuera en proportion de cet agrandissement, et l'air renfermé dans le tuyau d'aspiration exerçant sur la soupape T un plus grand effort que ne le fait l'air

Digitized by Google

l'air renfermé dans le corps de pompe, au-dessous du piston, cette soupape se levera, et l'air du tuyau d'aspiration affluera dans le corps de pompe jusqu'à ce qu'il soit parvenu à avoir la même densité, et par conséquent le même ressort dans ces deux espaces. Alors la soupape T, également pressée des deux côtés, se refermera par son propre poids, et interceptera de nouveau la communication entre le tuyau d'aspiration et le corps de pompe : mais l'air renfermé dans le tuyau d'aspiration, en se raréfiant pour se mettre en équilibre avec celui du corps de pompe, n'a plus exercé sur la base *n e* une pression de 32 pieds d'eau pareille à celle qu'éprouve l'eau extérieure : la pression de l'eau extérieure l'a donc emporté sur celle de l'eau renfermée dans le tuyau d'aspiration, et l'a fait remonter à une hauteur *n'e'*, telle que le poids de la colonne *n e n'e'*, joint à l'augmentation de ressort de l'air intérieur (qui, vu la diminution de volume produite produite par l'élévation de l'eau, se rétablit en partie dans le tuyau d'aspiration, et par suite dans le corps de pompe, par le moyen de la soupape T), pût exercer sur la base *n e* une pression de 32 pieds d'eau. L'équilibre ainsi rétabli, si on baisse le piston, l'air renfermé dans le corps de pompe, au-dessous du piston, se condensera ; mais la condensation ne se communiquera point à l'air renfermé dans le tuyau d'aspiration, parceque la soupape T empêche cette communication, et ainsi l'eau restera dans ce tuyau à la hauteur *n'e'*. Cependant l'abaissement du piston qui doit approcher, autant qu'il est possible, de la soupape T, devient assez grand pour rendre l'air, compris entre ce piston et cette soupape, plus dense que l'air extérieur ; alors cet air renfermé fait, au moyen de son excès de ressort, lever une soupape N pratiquée à l'extrémité d'une ouverture semblable à celle dont on a déja parlé pour le piston de la *figure* 146, et, communiquant par-là à l'air extérieur, acquiert la même densité que lui ; après quoi la soupape N se referme par son propre poids. Lorsque le piston est autant abaissé qu'il peut l'être, on l'éleve de nouveau, et le peu d'air qui se trouvoit entre ce piston et la soupape T, qui, ainsi qu'on l'a dit, doivent laisser entre eux le moindre intervalle possible, se trouve tellement raréfié, que son ressort devient moindre que celui de l'air précédemment raréfié, contenu dans le tuyau d'aspiration : cet air fait donc encore lever la soupape T, afin de se mettre en équilibre avec l'air supérieur ; ce qui ne pourra se faire qu'aux dépens de sa densité. Cette densité, ainsi diminuée, diminuera par conséquent son ressort,

Digitized by Google

dont l'action affoiblie, jointe au poids de la colonne $nen'e'$, n'exercera plus sur la base ne une pression de 32 pieds d'eau. La pression de l'eau extérieure l'emportera donc de nouveau sur celle qu'éprouve cette base ne, et l'eau montera dans le tuyau d'aspiration, de la hauteur $n'e'$, à la hauteur $n''e''$, telle que le poids de la colonne $nen''e''$, joint au ressort qui reste à l'air intérieur, puissent agir sur la base ne avec une pression de 32 pieds d'eau, ainsi que cela a eu lieu pour la colonne $nen'e'$ lors de la premiere aspiration. En baissant et élévant ainsi successivement le piston à différentes reprises, on produira des effets pareils à ceux de la seconde aspiration, qu'on vient de décrire, jusqu'à ce qu'enfin l'eau s'élevera au-dessus de la soupape T, et passera, dans le corps de pompe, au-dessous du piston. Alors en baissant ce piston, l'eau, à qui la soupape T empêche de redescendre dans le tuyau d'aspiration, fera lever la soupape N, et passera au-dessus du piston. A cette époque l'eau occupera tout l'espace compris depuis le piston jusqu'à la section ne; et lorsqu'on élevera ce piston, l'eau le suivra, en passant du tuyau d'aspiration dans le corps de pompe, de la même maniere, et par la même raison qui la faisoit s'élever précédemment aux différentes hauteurs $n'e'$, $n''e''$, etc. Le piston ainsi élevé, étant abaissé de nouveau, pressera sur l'eau inférieure renfermée dans le corps de pompe, et la pression ne pourra point se communiquer à l'eau renfermée dans le tuyau d'aspiration, parceque la pompe T s'oppose à cette communication. Cette pression n'aura donc d'effet que sur la soupape N qu'elle obligera de s'ouvrir, au moyen de quoi l'eau renfermée dans le corps de pompe, au-dessous du piston, passera au-dessus, et augmentera la hauteur de la colonne d'eau qui y étoit déja. En répétant la même manœuvre, et faisant successivement passer de nouvelle eau au-dessus du piston, on élevera finalement ce fluide à la hauteur à laquelle on desire qu'il parvienne.

Cas où la pompe ne pourroit point élever l'eau.

662. Il est évident que la distance de la section ne, ou de la surface supérieure du réservoir, à la soupape T, qu'on nomme *soupape dormante*, doit être plus petite que 32 pieds, c'est-à-dire plus petite que la colonne d'eau dont le poids mesure la pression d'une colonne d'air de l'atmosphere et de même base; car, sans cette condition, l'eau ne s'éleveroit jamais jusqu'à cette soupape. Il y a d'autres circonstances qui s'opposent à l'ascension de l'eau dans le tuyau d'aspiration, que nous examinerons bientôt.

663. La *figure* 149 représente une pompe, qu'on nomme *pompe aspirante et foulante*, parcequ'on y a réuni les effets des pompes représentées par les *figures* 147 et 148. On voit en effet qu'en élevant et abaissant successivement le piston T, qui est plein, c'est-à-dire sans soupape, on fait parvenir l'eau au-dessus de la soupape X par la même manœuvre employée pour la faire parvenir au-dessus de la soupape T, dans la *figure* 148. Il y a une différence dans le mécanisme employé pour produire cet effet, qui consiste à placer latéralement en GH la soupape S, qui tient lieu de celle du piston de la *figure* 148, et fait absolument le même effet, tant lors de l'ascension du piston, où elle le ferme par l'excès de pression de l'air extérieur, auquel elle bouche alors le passage, que lors de la descente de ce piston, où elle s'ouvre pour laisser échapper l'air condensé. Lorsque l'eau est parvenue au-dessus de la soupape X, et qu'on abaisse le piston, cette eau, pressée, ne peut ni retourner dans le tuyau d'aspiration, ni passer au-dessus du piston; mais, au moyen de la soupape S, elle s'introduit dans le tuyau montant latéral GHNO, dans lequel elle s'éleve à une certaine hauteur. Quand, après cela, on releve le piston, la pression de l'eau, élevée dans le tuyau montant, fait fermer la soupape S, et empêche le fluide de sortir de ce tuyau : cependant l'aspiration se fait, et il arrive de nouvelle eau du tuyau d'aspiration dans le corps de pompe; cette eau est refoulée à son tour par l'abaissement du piston, passe dans le tuyau montant, où elle augmente l'élévation de l'eau qui y étoit déja, et, en continuant la même manœuvre, on éleve l'eau, dans le tuyau montant, à la hauteur nécessaire.

De la pompe aspirante et foulante ; explication de la maniere dont elle éleve l'eau.

664. Nous allons appliquer aux pompes représentées par les *figures* 145, 146, 147, 148, et 149, le principe d'équilibre énoncé art. (493), et qui est un des principes fondamentaux du mouvement des machines. Nous ferons, pour le moment, abstraction du frottement, de la pesanteur des chaînes, rondelles, pistons, équipages, etc. : ainsi l'effort que nous allons attribuer à la résistance sera le plus petit effort auquel l'effort du moteur doit faire équilibre à chaque instant.

Valeur de l'effort du moteur, dans le chapelet vertical et dans la pompe foulante, de bas en haut.

Cela posé, nous disons que, dans les *figures* 145 et 146, l'effort du moteur doit à chaque instant faire équilibre au poids d'un cylindre d'eau dont le diametre de la base seroit égal au diametre d'une des rondelles (*fig.* 145), ou au diametre de la tête du piston (*fig.* 146), et dont la hauteur seroit égale, à la distance de la superficie du réservoir ou puisard, à la superficie

Digitized by Google

de l'eau dans le tuyau montant. Cette propriété dérive de ce que nous avons dit sur l'équilibre des fluides. On sait (556) qu'abstraction faite du frottement et de la pesanteur, des rondelles, du piston, etc., la pression de l'eau extérieure fera équilibre à toute la portion de l'eau intérieure qui sera au-dessous du niveau de la superficie du réservoir ; ainsi le moteur n'aura à soutenir que la hauteur d'eau qui est au-dessus, c'est-à-dire (560) le poids d'un cylindre d'eau de pareille hauteur, et qui auroit pour base la section horizontale du piston.

Valeur de l'effort du moteur dans la pompe foulante, de haut en bas.

665. L'effort du moteur, dans la pompe de la *figure* 147, doit être capable de faire équilibre au poids d'un cylindre d'eau qui auroit pour base la section horizontale de la tête du piston, et pour hauteur la différence de niveau entre le dessous du piston et la surface supérieure de l'eau dans le tuyau montant; ce qui est une conséquence immédiate de l'art. (560).

Valeur de l'effort du moteur dans la pompe aspirante.

666. L'effort du moteur, dans la *figure* 148, doit faire équilibre au poids d'un cylindre d'eau qui auroit pour base la section horizontale de la tête du piston, et pour hauteur la différence de niveau entre la superficie du réservoir ou puisard, et la surface supérieure de l'eau élevée. En effet, on voit d'abord que le piston soutient immédiatement toute la colonne d'eau qui est au-dessus de lui, et, de plus, la pression de toute la hauteur de l'atmosphere. Nommons H la hauteur de l'eau au-desssus du réservoir, S la section horizontale de la tête du piston, P le volume d'une colonne d'eau qui a S pour base et 32 pieds de hauteur, et h la hauteur de l'eau au-dessus du piston, $hS + P$ sera le volume d'eau dont le poids équivaut à la pression supérieure du piston. Pour évaluer sa pression inférieure, il faut supposer que la base ne est la section d'un siphon dont le tuyau d'aspiration et une partie du corps de pompe forment une des branches, bouchée par le piston, et dont l'autre branche, également fermée par le haut, a 32 pieds de hauteur au-dessus de ne, et est entièrement pleine d'eau ; il est évident que la pression inférieure du piston ne change point par cette hypothese, puisque la branche de siphon de 32 pieds remplace la pression de l'atmosphere sur la base ne. Nommant h' la distance du piston à la base ne, la pression inférieure de ce piston sera (560) équivalente au poids d'une valeur d'eau

$$= S(32 - h') = 32S - h'S = P - h'S.$$

Retranchant cette pression inférieure de la pression supérieure $hS + P$, la différence sera $(h + h')S = HS$, parceque

Digitized by Google

$h + h' = H$; ce qui est le volume d'un cylindre d'eau dont H seroit la hauteur et S la base.

667. Nous avons supposé, dans la *figure* 145, que la distance de deux rondelles étoit moindre que la distance du bas de la chaîne à la superficie de l'eau du puisard, afin de ne point faire d'abord entrer en considération l'aspiration de l'eau : mais, d'après ce que nous venons de démontrer, on voit que cette considération ne change rien à ce que nous avons dit précédemment (664) sur l'effort du moteur, qui, dans tous les cas, doit toujours faire équilibre au poids d'une colonne d'eau qui auroit pour hauteur la différence de niveau entre la superficie du puisard et la surface supérieure de l'eau dans la *buse*.

Cas où il y a aspiration dans le chapelet vertical, et dans la pompe foulante, de bas en haut ; effort du moteur dans ces cas.

668. La même chose doit se dire de la *figure* 146, où nous avons supposé que tout le jeu du piston se faisoit au-dessous de la superficie du réservoir : lorsque l'eau de ce réservoir sera plus basse que le point le plus haut de la marche du piston, alors ce piston s'élevera au-dessus du niveau du réservoir, il se fera une aspiration, et, d'après ce qu'on a démontré (666), la hauteur de la colonne d'eau, équivalente à la pression du piston, devra être comptée depuis le niveau de la superficie du réservoir.

669. L'effort du moteur appliqué à la pompe représentée par la *figure* 149, doit être considéré dans deux circonstances différentes : savoir, lorsque le piston monte et lorsqu'il descend. Lorsque le piston monte, il n'éprouve aucune pression de la part de l'eau renfermée dans le tuyau montant GHNO, parceque la soupape S est alors fermée ; il est donc alors dans le cas du piston de la pompe (*fig.* 148) : ainsi nommant S la section horizontale de la tête du piston (*fig.* 149), et h la distance de ce piston au niveau de la superficie du réservoir, hS sera le volume d'eau au poids duquel le moteur doit faire équilibre lorsque le piston monte.

Valeurs de l'effort du moteur, dans la pompe aspirante et foulante, lorsque le piston monte et lorsqu'il descend.

Lorsque le piston descend, sa pression doit s'évaluer par la même regle que celle du piston de la *figure* 147, parcequ'alors la soupape X (*fig.* 149) est fermée : ainsi nommant h' la différence de niveau entre le piston et la surface supérieure de l'eau dans le tuyau montant, $h'S$ sera le volume d'eau au poids duquel le moteur doit faire équilibre quand le piston descend.

670. On voit que la pompe (*fig.* 149), qui rassemble en une seule machine les effets des pompes (*fig.* 147 et 148), oppose aussi au moteur, en deux parties séparées, les mêmes efforts que chacune des pompes (*fig.* 147 et 148), puisque $hS + h'S$

Digitized by Google

est la somme des efforts que le moteur (*fig.* 149) doit contrebalancer séparément dans une montée et dans une descente.

Observation sur chacune de ces valeurs en particulier, et sur leur somme.

Si on nomme H la différence de niveau entre l'eau, dans le réservoir et dans le tuyau montant, on aura $H = h + h'$, et HS représentera la somme des efforts auxquels l'effort du moteur doit faire équilibre dans une montée et dans une descente: c'est la même valeur trouvée pour la pression totale du piston dans les autres pompes; mais ici on a l'avantage de n'en faire éprouver au piston qu'une partie à la fois.

On doit chercher à rendre ces valeurs égales autant qu'il est possible.

671. On doit chercher, autant qu'il est possible, dans les pompes aspirantes et foulantes, à mettre l'égalité entre l'effort nécessaire pour la descente du piston et celui nécessaire pour sa montée. Cet objet sera discuté dans la suite.

Effort du moteur dans la pompe foulante, de haut en bas, lorsqu'il y a aspiration pendant la levée du piston.

672. Le piston de la *figure* 147 n'éprouve aucune pression supérieure lors de son ascension, qui peut même être favorisée par la pression inférieure de l'eau : mais si le niveau de l'eau du réservoir étoit plus bas que le point le plus haut de la marche du piston, alors, le piston s'élevant au-dessus de ce niveau, il se feroit une aspiration, et il y auroit à vaincre, d'après ce qu'on a dit précédemment, une pression supérieure équivalente au poids de la colonne d'eau comprise entre la tête du piston et le niveau de l'eau du réservoir.

Ce qu'on entend par *pompes noyées*.

673. Les pompes où le jeu du piston se fait au-dessous du niveau de l'eau du réservoir, prennent la dénomination particulière de *pompes noyées:* elles ont de grands avantages, comme on le verra dans la suite.

De la dilatation successive de l'air dans les pompes, et des élévations correspondantes de l'eau ; examen des causes qui peuvent empêcher l'ascension de l'eau ; détails préliminaires sur les pistons et les soupapes ; conclusion de cette section.

Cas où l'ascension de l'eau par aspiration est toujours possible, et premier cas où elle peut s'arrêter, l'eau étant au-dessous de la soupape dormante.

674. Nous avons dit (662) que, pour qu'il fût possible d'élever l'eau dans la pompe aspirante (*fig.* 148), il falloit que la distance de la superficie de l'eau du réservoir, à la *soupape dormante*, fût moindre que 32 pieds. Lorsque cette condition a lieu, et que, lors de la plus grande descente du piston, l'espace compris entre la tête de ce piston et la soupape dormante peut être considéré comme nul, l'eau montera toujours : mais s'il y a un espace entre la soupape dormante et le point le plus bas de la descente du piston, alors, quoique la distance de la superficie du réservoir ou puisard, à la soupape dormante, soit plus

Digitized by Google

petite que 32 pieds, l'eau pourra s'arrêter avant de parvenir à cette soupape, si l'on n'emploie pas d'autre moyen que l'aspiration.

Nous allons démontrer ces deux importantes propositions par une analyse qui nous servira en même temps à déterminer les dilatations successives de l'air et les élévations correspondantes de l'eau.

Analyse de ce premier cas.

675. Soient e l'espace compris entre la soupape dormante et la tête du piston, au point le plus bas de la descente de ce piston; E ce que devient cet espace lorsque le piston est parvenu au point le plus haut de sa montée. Nommons s la section horizontale du vuide intérieur du tuyau d'aspiration, supposé cylindrique ou prismatique; y la distance de la soupape dormante, à la superficie $n'e'$ de l'eau, dans le tuyau d'aspiration, et a la distance de la même soupape, à la superficie ne de l'eau du réservoir.

Le piston étant baissé, l'air compris dans l'espace e est de l'air naturel, et l'air compris dans le tuyau d'aspiration, ou dans l'espace sy, est de l'air raréfié, dont nous désignerons le ressort par x, c'est-à-dire que nous ferons x égal à la hauteur d'une colonne d'eau qui exerceroit sur $n'e'$ la même pression que l'air raréfié renfermé dans le tuyau d'aspiration.

Les choses étant dans cet état, si on leve le piston lorsqu'il sera au point le plus haut de sa montée, l'eau se sera élevée, dans le tuyau d'aspiration, de $n'e'$ en $n''e''$, et l'air sera également raréfié dans le tuyau d'aspiration et dans le corps de pompe. Nommons y' la distance de $n''e''$ à la soupape dormante, x' le nouveau ressort de l'air, et cherchons la valeur de y' et x'.

Pour cela, il faut observer que la masse d'air qui, avant l'élévation du piston, étoit renfermée dans l'espace $e + sy$, se trouve, après cette élévation, renfermée dans l'espace $E + sy'$. Il s'agit donc de trouver la valeur de cette masse d'air, de la comparer à la masse d'air naturel qui occuperoit le même espace, et dont le ressort équivaut à une colonne de 32 pieds d'eau, et on aura le ressort x' par une simple proportion.

π étant la pesanteur spécifique de l'air non raréfié, la masse d'air naturel compris dans l'espace e sera (176) égale à πe. Pour avoir la pesanteur spécifique π' de l'air raréfié, compris dans le tuyau d'aspiration, il faut (523) faire la proportion $32 : x :: \pi : \pi' = \frac{\pi x}{32}$; ainsi $\frac{\pi x s y}{32}$ sera la masse de cet air raréfié,

Digitized by Google

et $\pi\,(e + \frac{1}{32}\,sxy)$ sera la masse totale d'air renfermé dans l'espace $e + sy$, et par conséquent dans l'espace $E + sy'$.

Le ressort de cet air, ou la hauteur x' de la colonne d'eau qui exerceroit sur $n''e''$ la même pression que lui, se trouvera, d'après ce qu'on a dit précédemment, par la proportion

$$\pi\,(E + sy') : \pi\,(e + \tfrac{1}{32}\,sxy) :: 32 : x' = \tfrac{32e + sxy}{E + sy'}\ (*).$$

Lorsque le ressort de l'air, renfermé dans le tuyau d'aspiration, étoit égal à x, ce ressort, joint au poids de la colonne $nen'e'$, dont la hauteur est égale à $a - y$, exerçoit sur ne une pression égale à celle de l'air extérieur, c'est-à-dire équivalente à une colonne d'eau de 32 pieds de hauteur : cette considération fournit l'équation $x + a - y = 32$, ou $x - y = 32 - a$, et on a de plus, par une raison absolument semblable, l'équation $x' - y' = 32 - a$.

Éliminant, au moyen de ces deux équations, les quantités y et y' de l'équation $x' = \frac{32e + sxy}{E + sy'}$; faisant $32 = h$, et $h - a = b$, on a, toutes réductions faites, l'équation

Équation qui donne le ressort de l'air à chaque coup de piston.

$$676 \cdots\cdots x' = \tfrac{bs - E}{2s} \pm \sqrt{\left[\left(\tfrac{bs - E}{2s}\right)^2 + \tfrac{he}{s} + x^2 - bx\right]};$$

et lorsqu'il n'y a aucun espace entre le point le plus bas de la descente du piston et la soupape dormante,

Autre équation qui donne la même chose dans un autre cas.

$$677 \cdots\cdots x' = \tfrac{bs - E}{2s} \pm \sqrt{\left[\left(\tfrac{bs - E}{2s}\right)^2 + x^2 - bx\right]}.$$

Il est évident que celle des deux racines de l'équation qui donne $x' > h$ doit être rejetée.

Équation qui donne la hauteur de l'eau à chaque coup de piston.

678. La valeur de x' étant calculée, on trouvera celle de y' par l'équation $y' = x' - b$.

Usage des équations précédentes.

679. On peut, au moyen de ces deux équations, trouver les densités successives de l'air dans le tuyau d'aspiration, les hauteurs successives auxquelles l'eau s'élève dans ce tuyau, et la quantité dont elle s'élève à chaque coup de piston. En effet, supposons qu'il n'y ait encore eu aucun coup de piston donné, on a $x = h$, et les valeurs de x' et d'y', trouvées, par la substitution de h pour x, dans l'équation générale de l'art. (676), donneront le ressort de l'air et l'élévation de l'eau, qui auront

(*) On désignera toujours, dans la suite de ce chapitre, le ressort de l'air, ou la pression qui en est l'effet, par la hauteur d'une colonne d'eau ; ce qui doit être entendu dans le même sens que lorsque nous avons mesuré (629) ce ressort ou cette pression par la hauteur d'une colonne de mercure.

lieu

lieu après le premier coup de piston. Substituant la valeur trouvée par le ressort de l'air, au lieu de x, dans la même équation générale, on aura les valeurs de x' et y', répondantes au second coup de piston, et ainsi de suite, pour un nombre de coups quelconques. Prenant, après cela, les différences successives des valeurs de y, on aura la quantité dont l'eau s'est élevée à chaque coup de piston.

Détermination du cas où l'ascens. de l'eau cesse d'avoir lieu.

680. Les équations $x - y = b$, et $x' - y' = b$, donnent $x' - y' = x - y$, ou $y - y' = x - x'$. Il est évident que s'il arrivoit que l'eau cessât de monter dans le tuyau d'aspiration, la différence $y - y'$ de deux hauteurs consécutives seroit égale à zéro : on auroit donc $x - x' = 0$, et, substituant la valeur de x' (676) dans cette équation, il en résulteroit

$$x = \frac{bs - E}{2s} \pm \sqrt{\left[\left(\frac{bs - E}{2s}\right)^2 + \frac{he}{s} + x^2 - bx\right]} = 0;$$

ce qui donne, toutes réductions faites, $x = \frac{e}{E} h$. Cette valeur, substituée dans l'équation $x - y = h - a$, donne

$$y = a - \frac{E - e}{E} h.$$

Réflexions et explications relatives à la détermination précédente.

681. Il résulte de ces équations, que, lorsqu'il y a un espace entre le point le plus bas de la marche du piston et la soupape dormante, l'eau pourra s'arrêter avant d'arriver à cette soupape, et cet effet aura lieu toutes les fois que a sera plus grand que $\frac{E - e}{E} h$. Si la soupape dormante est à la séparation du corps de pompe et du tuyau d'aspiration, le rapport $\frac{E - e}{E}$ sera celui de la longueur que parcourt le piston, dans une montée ou descente, à la distance qu'il y a depuis le point le plus haut de sa course jusqu'à l'extrémité inférieure du corps de pompe.

On voit assez aisément, sans calcul, que l'eau doit s'arrêter au-dessous de la soupape dormante, lorsqu'en levant le piston, l'air naturel, renfermé dans l'espace e, et se dilatant dans l'espace E, aura encore, après cette dilatation, un ressort égal à celui de l'air renfermé au-dessous de cette soupape. Il est évident qu'alors l'air inférieur ne tendra point à passer dans le corps de pompe, qu'il n'y aura point d'augmentation de raréfaction, et par conséquent d'ascension d'eau. C'est en effet ce que donne l'équation $x = \frac{e}{E} h$, où x exprime le ressort de l'air au-dessous de la soupape dormante, et $\frac{e}{E} h$ le ressort qu'acquiert l'air en se dilatant de l'espace e dans l'espace E.

Cas où l'eau s'élevera jusqu'à la soupape dormante, et cas où elle s'élevera au-dessus.

682. Le cas où on a $a = \frac{E-e}{E} h$ donne $y = o$, et alors l'eau doit monter jusqu'à la soupape dormante : celui où on a $a < \frac{E-e}{E} h$ rend y négatif, et alors l'eau doit s'élever au-dessus de cette soupape.

683. Lorsqu'il n'y a point d'espace entre le point le plus bas de la marche du piston et la soupape dormante, alors l'eau doit toujours monter, comme on l'a dit art. (674) : car en faisant, dans l'équation, art. (677), la substitution qu'on a faite dans l'équation art. (676), on trouve $E = o$, c'est-à-dire qu'il faudroit, pour que l'eau ne montât pas, que la marche du piston fût nulle.

On trouve la même chose, en faisant $e = o$, dans l'équation $y = a - \frac{E-e}{E} h$; car il en résulte $y = a - h$, valeur qui est négative, puisqu'on a $h > a$: ainsi l'eau parviendra toujours au-dessus de la soupape dormante quand on aura $e = o$.

Second cas où l'on examine les arrêts que peut éprouver l'ascension de l'eau, supposée parvenue au-dessus de la soupape dormante.

684. Supposons maintenant que la soupape dormante est au niveau de l'eau du réservoir, ou même plus basse, ou bien, qu'étant placée à un point quelconque, éloigné du point le plus bas de la marche du piston, on est parvenu à faire monter l'eau au-dessus de cette soupape, et qu'on veut continuer de l'élever au moyen de l'aspiration ; ces nouveaux cas, qui, intrinséquement, n'en font qu'un, comportent aussi des arrêts, dans l'élévation de l'eau, qu'il faut examiner.

Désignons par E et e les espaces compris depuis la jonction du corps de pompe au tuyau d'aspiration, jusqu'aux points le plus haut et le plus bas de la course du piston. Nommons s la section horizontale du vuide intérieur du tuyau d'aspiration, y la distance de l'extrémité supérieure de ce tuyau à la surface de l'eau qui y est renfermée, et a la distance du même point à l'eau du réservoir.

Lorsque le piston est baissé, l'air qui est renfermé au-dessous, tant dans le corps de pompe que dans le tuyau d'aspiration, est de l'air naturel qui occupe un espace égal à $e + sy$. Le piston venant ensuite à être levé, cet air naturel se dilate, il se fait une ascension d'eau dans le tuyau d'aspiration, et la hauteur y se change en y' : ainsi l'air naturel, qui étoit renfermé dans l'espace $e + sy$, devient de l'air dilaté, renfermé dans l'espace $E + sy'$. Nommons h le ressort de l'air naturel ou la hauteur d'une colonne d'eau équivalente à la pression de l'atmosphere, et x' le ressort de l'air dilaté dans l'espace $E + sy'$, puisque le ressort de l'air est en raison inverse de l'espace qu'il occupe,

Digitized by Google

on aura la proportion $e + sy : E + sy' :: x' : h$; d'où l'on tire $x' = \frac{e+sy}{E+sy'} h$.

On a ensuite, par les raisons exposées précédemment (675), $x' + a - y' = h$, ou $x' - y' = h - a$; éliminant, au moyen de cette équation, y' de l'équation précédente, il vient, en faisant $h - a = b$,

Équations qui donnent le ressort et la hauteur de l'eau à chaque coup de piston; usage de ces équations.

685..... $x' = \frac{bs-E}{2s} \pm \sqrt{\left[\left(\frac{bs-E}{2s}\right)^2 + \frac{e+sy}{s} h\right]}$,

686.... et $y' = x' - b$, ou $y' = -\frac{E+bs}{2s} \pm \sqrt{\left[\left(\frac{bs-E}{2s}\right)^2 + \frac{e+sy}{s} h\right]}$.

687. On voit que l'une des valeurs de x' ou y' étant trouvée, l'autre se calcule aisément. Ces équations peuvent servir, comme celles des art. (676 et 678), à trouver les dilatations successives de l'air et les ascensions correspondantes de l'eau.

Cas où l'ascension de l'eau doit cesser d'avoir lieu; équation qui les fait connoître.

688. L'ascension de l'eau cessera d'avoir lieu si, dans quelques cas, on a $y' = y$. Faisant cette hypothese dans l'équation de l'art. (686), il vient

$$y = \frac{as-E}{2s} \pm \sqrt{\left[\left(\frac{as-E}{2s}\right)^2 + \frac{he-(h-a)E}{s}\right]}.$$

Réflexions sur les valeurs données par cette équation, et sur l'étendue de l'espace où l'ascension de l'eau ne peut pas avoir lieu.

689. On voit par cette équation, que, lorsque la valeur qui est sous le radical n'est pas imaginaire, il y a toujours deux points entre lesquels l'ascension de l'eau cesse d'avoir lieu, l'effet de l'aspiration devenant nul à ces points, et négatif dans l'intervalle qui les sépare, de telle sorte que l'eau redescendroit si la soupape dormante ne s'y opposoit pas.

Pour bien concevoir ceci, il faut faire attention que l'eau ne monte, lors de la levée du piston, qu'autant que le ressort affoibli de l'air dilaté, plus le poids de la colonne d'eau déja élevée au-dessus du niveau du réservoir, équivalent au poids d'une colonne d'eau dont la hauteur est moindre que 32 pieds. Mais il peut se faire, suivant les dimensions de la pompe et la grandeur de la marche du piston, que, dans quelques cas, non seulement le ressort de l'air dilaté, plus le poids de la colonne d'eau élevée au-dessus du réservoir, soient égaux à une pression de 32 pieds d'eau, mais encore surpassent cette pression. L'équation de l'art. (688) indique seulement les points où l'égalité a lieu; et pour trouver la quantité dont la pression de l'atmosphere est trop foible dans les points intermédiaires, il faut s'y prendre de la maniere suivante.

690. Puisque la valeur d'y ne change point après la levée

Digitized by Google

du piston, l'air naturel, renfermé dans l'espace $e + sy$, avant cette levée, au lieu de se dilater après cette levée, dans l'espace $E + sy$, se dilate dans l'espace $E + sy$; on a donc (684) $x' = \frac{e+sy}{E+sy} h$, au lieu de $x' = \frac{e+sy}{E+sy'} h$, qui a lieu quand l'eau s'éleve.

Cette valeur $\frac{e+sy}{E+sy} h$, et celle de $y' = y$, substituées dans l'équation $x' + a - y' = h$, donnent $\frac{e+sy}{E+sy} h + a - y = h$, pour le cas où la pression h de l'air extérieur fait équilibre aux pressions réunies $\frac{e+sy}{E+sy} h$, et $a - y$, de l'air et de l'eau dans l'intérieur de la pompe. En effet cette équation donne, pour y, la même valeur trouvée précédemment (688). Mais dans les cas où la pression h de l'atmosphere est moindre que la somme des pressions intérieures, on doit avoir $\frac{e+sy}{E+sy} h + a - y = h + z$, z étant la quantité dont la pression de l'atmosphere est surpassée par la somme des pressions intérieures.

Équation d'une courbe qui fait connoître toute l'étendue de l'espace dans lequel l'aspiration ne peut pas faire monter l'eau.

En construisant la courbe qui a pour équation $\frac{e+sy}{E+sy} h - y - z + a - h = 0$, et qui est toujours une section conique, vu qu'en chassant les dénominateurs variables, les produits ou les puissances des co-ordonnées y et z ne passent pas deux dimensions, on aura sous les yeux tous les espaces où l'ascension de l'eau, par l'aspiration, sera possible, et ceux où elle ne peut avoir lieu. Les premiers espaces répondront aux parties de l'axe des y, sur lesquels les z seront négatifs, et les seconds espaces répondront aux parties du même axe, sur lesquels les z seront positifs.

Les intersections de la courbe, avec l'axe des y, indiqueront les mêmes points que l'équation de l'art. (688), c'est-à-dire ceux où $z = 0$, et qui indiquent les hauteurs auxquelles la pression de l'atmosphere est en équilibre avec la somme des pressions intérieures.

Lorsque la courbe ne coupera l'axe des y nulle part, alors z ne changera point de signe; et si la premiere aspiration est possible, on n'aura plus à craindre que l'ascension de l'eau soit arrêtée.

Détermination du cas où l'ascension de l'eau peut cesser d'avoir lieu dans la pompe foulante de bas en haut.

691. La pompe foulante, représentée par la *figure* 146, peut aussi être sujette à des *arrêts* lorsque la soupape dormante I est placée au-dessus du niveau de l'eau du réservoir. Supposons qu'elle soit en $n''e''$, et que le vuide intérieur compris depuis

Digitized by Google

cette soupape jusqu'au niveau de l'eau du réservoir, soit plus grand que le volume déplacé dans le corps de pompe par le piston dans une montée; on voit qu'alors l'eau ne parviendra pas à la soupape dormante du premier coup de piston, mais qu'une partie de l'air renfermé dans le tuyau montant sortira par cette soupape, et qu'ainsi, lors de la descente du piston, l'eau se tiendra, dans le tuyau montant, plus haut que le niveau du réservoir : elle parviendra au-dessus de la soupape, après un certain nombre de coups de pistons, si la chose est possible.

Pour juger de cette possibilité, soit E le volume déplacé par le piston, dans le corps de pompe, dans une montée; x le ressort de l'air contenu dans le tuyau montant, y la distance de la soupape dormante à la surface de l'eau dans le même tuyau, et s la coupe horizontale de son vuide intérieur; lorsque le piston monte, le volume sy diminue de la quantité E, devient $sy - E$, et ne renferme plus que de l'air naturel. Le piston descendant ensuite, si on nomme y' la distance de la soupape dormante à l'eau après la descente, et x' le ressort de l'air contenu dans l'espace $y's$, on aura la proportion $sy - E : sy' :: x' : h$; d'où $x' = \frac{sy-E}{sy'}$. Mais a étant la distance de la soupape dormante au niveau de l'eau du réservoir, on a les équations $x + a - y = h$, et $x' + a - y' = h$; faisant $h - a = b$, la combinaison des équations qu'on vient de poser donne

$$692 \cdots\cdots x' = \tfrac{1}{2}b \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}b + h(x-b) - \tfrac{Ah}{s})},$$

équation qui, avec celle $y' = x' - b$, peut servir aux usages indiqués art. (679).

693. On a ensuite, en faisant le même raisonnement qu'à l'art. (690), $\frac{sy-E}{sy}h - y + a - h = z$, équation d'une courbe dont on peut faire l'usage indiqué à l'article cité, et qui, lorsque $z = 0$, donne $y = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - \frac{Eh}{s})}$: ainsi il y aura des arrêts dans l'ascension de l'eau lorsque $\frac{1}{4}a^2$ sera plus grand que $\frac{Eh}{s}$.

694. Les différents cas que nous venons d'analyser sont très suffisants pour jeter le plus grand jour sur la matiere dont il s'agit, et faciliter la solution des questions analogues dans toutes les complications des autres cas qui peuvent se présenter. Quoique nous ayons fait abstraction du frottement des pistons, du

Réflexions sur la théorie exposée dans ce chapitre.

Digitized by Google

poids des soupapes, etc., cependant les calculs précédents n'en sont pas moins la base de ceux auxquels donnera lieu l'introduction de ces différents éléments, lorsque nous aurons occasion de revenir sur les pompes.

Quelques détails sur les pistons et les soupapes.

695. Nous n'avons voulu présenter, dans ce chapitre et dans le précédent, que la théorie générale des pompes, indépendante de toute application particuliere : néanmoins, comme la matiere est importante et forme un des objets principaux de cet ouvrage, nous avons voulu offrir, dans les *figures* 145, 146, 147 148, et 149, des dessins corrects et détaillés des différentes pompes dont nous avons parlé, précaution qui est utile pour donner de la netteté aux idées. On voit, à gauche de la *figure* 145, les élévations latérales de deux chaînons, l'élévation d'une portion de chaîne, vue dans le sens de son épaisseur, et les détails d'une rondelle ; le piston de la *figure* 146 est en bois : on voit sa coupe à droite de la *figure*. La soupape dormante I est une soupape à *clapet*, dont on voit le plan à gauche de la *figure;* le piston de la *figure* 147 est en métal ; la soupape X est ce qu'on nomme *une soupape à coquille :* on voit à droite l'élévation de la soupape S. Le piston de la *figure* 148, dont la soupape est à coquille, et dont on voit, à gauche de la *figure*, la vue perspective, la coupe et le plan, a une particularité intéressante ; le cercle de métal xz, qui embrasse le haut de la tête du piston, tient aux brides zt, xu, qui embrassent la tige du piston dans le collier tu. Cette tige est taraudée dans l'emplacement de ce collier, qui, étant pressé, lorsque la chose est nécessaire, par l'écrou k, fait descendre les brides et le cercle de métal qui comprime ainsi, de haut en bas, la filasse dont la tête du piston est enveloppée, et la fait renfler dans le sens du diametre, afin qu'elle remplisse parfaitement la capacité du corps de pompe. Ce mécanisme est de l'invention de M. le chevalier de Bettancourt.

Le piston de la *figure* 149 ne differe de celui de la *figure* 148 qu'en ce qu'il est plein ou sans soupape. On voit à gauche de la *figure* sa coupe, son plan, et sa vue perspective. A droite de la *figure* sont deux élévations qui représentent l'ajustement d'une soupape dormante en cuir.

Conclusion de cette section.

696. Nous ne donnons les descriptions précédentes que par occasion, et comme des notions très préliminaires ; car nous reviendrons sur les mêmes objets avec tous les détails qu'ils comportent. Nous ne parlons point encore des épaisseurs des tuyaux de conduite, des différents moteurs appliqués aux

Digitized by Google

pompes, dont le plus puissant est sans doute l'eau réduite en vapeurs, qui donne aux pompes qu'elle fait agir la dénomination de *pompes à feu*, ni de quelques autres matieres qui ont rapport à la mécanique générale des pompes. Comme ces notions tiennent particulièrement à la partie descriptive, nous aimons mieux les y renvoyer et les y traiter amplement, que de grossir, par des applications trop multipliées, un volume qui sera déja assez considérable, en se restreignant simplement à la partie théorique et à quelques applications indispensables.

Digitized by Google

SECTION IV.

DE L'HYDRODYNAMIQUE.

Réflexions préliminaires.

La théorie de l'hydrodynamique est due aux modernes ; auteurs anciens qui ont traité de la mécanique des fluides

697. Nous voilà parvenus à la partie de la mécanique la plus difficile et la moins avancée. On peut la regarder, ainsi que la dynamique (380), comme étant absolument due aux recherches des modernes : car le seul bon ouvrage, sur la mécanique des fluides, qui nous reste de l'antiquité, est le Traité *de insidentibus humido* d'Archimede, où il n'est question que de l'équilibre (*). On trouve cependant quelques notions sur le mouvement des fluides, dans un Traité attribué à Sextus-Julius Frontinus, inspecteur des fontaines publiques à Rome, sous les empereurs Nerva et Trajan, intitulé, *de aquæ ductibus urbis Romæ commentarius* (**) ; mais cet ouvrage ne peut rien ôter aux modernes de la gloire d'avoir créé la science théorique et expérimentale du mouvement des fluides. Les lecteurs qui desireront de plus grands détails sur l'histoire de cette science, pourront consulter le discours préliminaire de l'*Hydrodynamique* de M. l'abbé Bossut, et la sect. VII de la part. II de la *Mécanique* de M. de la Grange.

Réflexions sur la méthode employée dans les sections précédentes.

Les recherches théoriques, renfermées dans chacune des sections précédentes, ont toujours été déduites, comme corollaires ou conséquences, d'un petit nombre de formules ou principes généraux, qui étoient comme les germes dont ces conséquences devenoient le développement. Ainsi nous avons donné art. (150 et 152) les formules générales d'équilibre qui servent de fondement à toute la statique ; art. (396), les formules générales du mouvement progressif ; art. (404 et 405), les formules générales du mouvement de rotation autour d'un axe fixe ; et art. (539), la formule générale de l'équilibre des fluides. Cette

(*) Voyez la *Mécanique* de M. de la Grange, part. I, section VI.

(**) Voyez les *Discours préliminaires de l'hydrostatique* de M. l'abbé Bossut, et l'*Hydrodynamique* de Daniel Bernoulli, sect. I, §. 4.

méthode

Digitized by Google

méthode réunit les avantages de la précision et de la clarté : elle généralise les idées, facilite la comparaison des différentes parties de la mécanique, fait voir leur dépendance mutuelle, et sert en même temps à les rapprocher des principes communs à toutes les parties de la science, principes que nous avons exposés dans les notions préliminaires de ce traité ; et comme nous les avons alors déduits des premiers phénomenes sensibles du mouvement, les notions abstraites se trouvent ainsi liées aux idées sensibles et particulieres que nous recevons immédiatement de la nature.

Difficultés d'appliquer cette méthode aux matieres contenues dans la présente section.

698. Il paroît donc naturel et avantageux de faire, pour le mouvement des fluides, ce que nous avons fait pour les autres parties de la mécanique, et de donner des formules générales dont toutes les questions relatives à ce mouvement ne soient que des applications. Ces formules existent ; mais il s'en faut bien qu'on en puisse tirer le même parti que des précédentes. Les difficultés de calcul qu'entraîne leur usage ont jusqu'à présent résisté aux efforts des analystes ; ce qui, malgré les progrès de la théorie, réduit l'hydrodynamique, lorsqu'on veut l'appliquer à nos besoins, à n'être encore, en partie, qu'une science hypothétique et expérimentale. Nous ne nous dispenserons cependant pas de donner les formules qui contiennent la théorie vraie et rigoureuse du mouvement des fluides, dont nous avons disposé la démonstration et les calculs de maniere qu'ils puissent être entendus sans peine par ceux qui auront étudié cette section et les précédentes, et dont la connoissance ne laissera pas de jeter un grand jour sur tout l'ensemble de l'hydrodynamique.

Plan qu'on se propose de suivre dans cette section.

699. Nous allons, avant de donner la théorie dont nous venons de parler, exposer d'abord la science du mouvement et de la résistance des fluides, en admettant les hypotheses, les principes et les expériences qu'ont admis les meilleurs auteurs. Nous discuterons le tout avec impartialité, et n'accorderons aux résultats trouvés que le degré de confiance que nous penserons qu'ils méritent. Quant à la maniere de démontrer et de développer les principes théoriques, nous suivrons, autant qu'il sera possible, une marche analogue à celle des autres sections, et qui nous paroît favorable à la clarté et à la précision. Nous exposerons, après chaque corps de théorie, les expériences qui servent à vérifier ou à rectifier les résultats qu'on en tire, et nous terminerons le tout par la démonstration des formules

Digitized by Google

rigoureuses et indépendantes de toute hypothese qui renfer ment la vraie théorie du mouvement des fluides.

Recherches préliminaires sur le mouvement des fluides incompressibles et pesants dans des tuyaux et dans des vases.

700. Pour commencer à suivre la marche que nous nous sommes prescrite dans le chapitre précédent, nous allons d'abord résoudre un problême général sur le mouvement des fluides, assujetti à certaines données et à certaines conditions. Nous examinerons ensuite quels sont, dans la nature, les cas auxquels ces données et ces conditions peuvent convenir; ce qui nous donnera des formules particulieres. Enfin nous consulterons l'expérience, et nous modifierons les résultats déduits du problême général, de maniere à avoir des formules corrigées dont la pratique puisse retirer quelque avantage.

Problême général sur l'écoulement des fluides incompressibles et pesants, en admettant le parallélisme des tranches.

701. Soit VRKL (*fig.* 150) le profil d'un vase ou d'un tuyau, percé à son extrémité d'un orifice AC, par lequel jaillit ou s'échappe le fluide qui coule dans le sens ZY. Soit de plus ZY une ligne droite de position telle que, si on coupe le vase par un plan M*m* perpendiculaire à cette ligne, toutes les molécules comprises dans la section M*m* puissent être censées se mouvoir parallèlement à ZY et avec la même vîtesse. Cette propriété est supposée avoir lieu, à compter de la surface supérieure du fluide, ou plutôt, d'une hauteur telle que l'eau, supérieure à cette hauteur, puisse être considérée comme nulle, et on appellera *surface supérieure du fluide*, la section la plus élevée où cette propriété a lieu.

702. Cette propriété sera censée exister depuis la section la plus élevée dont nous venons de parler, jusqu'à l'orifice : mais aux approches de cet orifice, on ne l'admettra que dans une partie de la section intérieure du vase. Pour concevoir ceci, imaginons, à partir d'une certaine section *ts*, peu distante de l'orifice, deux courbes *t*A et *s*C, terminant des espaces *t*AK et *s*CL; on sait, par expérience, qu'il existe deux espaces pareils, tels, que la vîtesse du fluide parallele à ZY, y est beaucoup plus petite que dans l'espace *t*AC*s* (*). Ce dernier espace pourra

(*) Voyez l'*Hydrodynamique* de Daniel Bernoulli, sect. IV, §. III; le *Traité des fluides*, de d'Alembert, art. 111; l'*Hydrodynamique* de M. l'abbé Bossut, tom. I, pag. 294, etc.: enfin la suite de ce traité, où les expériences de tous les genres, sur les fluides, seront rapportées et discutées.

donc être considéré comme celui dans lequel se trouvent les sections d'*eau-vive* ou d'eau fournissant à la dépense de l'orifice, tandis que les deux espaces latéraux sont sensiblement stagnants. Le cours des rivieres offre beaucoup d'exemples de ces parties stagnantes, comme nous le verrons dans la suite. Les courbes tA, sC, pourront être considérées comme les extrémités du profil de la paroi intérieure du vase ou tuyau VtACsR, qui seroit terminé par l'orifice AC, et qu'on peut substituer au tuyau VKLR. Nous n'examinerons point quelle doit être la nature des courbes sC et tA; cet examen est inutile aux recherches que nous allons faire, dans lesquelles nous ne considérerons que les sections supérieures à la section ts, et la section extrême ou orifice AC: ainsi les résultats que nous obtiendrons ne pourront s'appliquer au fluide contenu dans le vase ou tuyau, que jusqu'à une petite distance de l'orifice AC, lorsqu'on voudra les considérer dans une section entiere de la paroi intérieure de ce vase.

Solution de ce problème.

703. Nommons ϵ l'angle formé par l'axe ZY et la verticale; B, la section à la surface supérieure du fluide; O, l'orifice AC; h, la distance de la surface supérieure du fluide à l'orifice, mesurée sur l'axe ZY. Faisons ZP $= z$, la densité du fluide $= \delta$, la vîtesse que la pesanteur communique au bout de l'unité de temps $= \varphi$ et le temps $= t$; t est supposé varier uniformément.

Nommons de plus S la surface de la section Mm, v sa vîtesse, p sa pression, prises, l'une et l'autre, parallèlement à Pp, et u la vîtesse de l'eau à l'orifice AC.

704. Tout cela posé, la tranche MM'$m'm$, dont le volume $= S\,dz$, et dont la masse $= \delta S\,dz$ (176), sera sollicitée par deux puissances, dont l'une est la pesanteur, et l'autre l'excès de la pression due à l'action du fluide ambiant qui s'exerce en M'm', dans le sens pZ, sur la pression qui s'exerce en Mm dans le sens ZP; cherchons l'expression de ces deux puissances.

1°. La quantité de mouvement que la pesanteur communiqueroit à la tranche MM'$m'm$, dans le sens vertical, au bout de l'unité de temps, est $\varphi\delta S\,dz$, et cette quantité de mouvement, décomposée dans le sens du mouvement qui a lieu, ou parallèlement à Pp, a pour valeur (147) $\varphi\delta S\,dz\cos.\epsilon$.

2°. La pression qui, d'après ce qui est dit art. (538), est rapportée à l'unité de surface, étant multipliée par S, le produit Sp exprimera un poids équivalent à l'action de la partie supérieure MmVR du fluide sur la section Mm dans le sens Pp. La pression qui a lieu sur la section M'm' est égale à

$(p + dp)(S + dS) = pS + Sdp$, en rejetant dS, vu que les sections Mm et M'm' peuvent être censées égales. Cette pression, que nous supposons dans le sens Zp, est égale à la réaction qui s'exerce dans le sens pZ : ainsi la tranche MM'$m'm$ est comprimée, d'un côté, par la pression ou poids pS, et de l'autre, par la pression $pS + Sdp$. Retranchant la premiere de la seconde, la différence Sdp représentera l'impulsion que la pression du fluide tend à donner à la tranche Mmm'M' de P en Z, ou plutôt sera (538 et 174) la quantité de mouvement que cette impulsion, répétée uniformément pendant l'unité de temps, communiqueroit à la tranche dont il s'agit.

Les quantités de mouvement $\varphi\delta Sdz\cos.\epsilon$, et Sdp, étant imprimées en sens directement opposés, et la premiere étant prépondérante, puisque le mouvement a lieu dans le sens ZA, la différence $\varphi\delta Sdz\cos.\epsilon - Sdp$ sera la résultante de l'action combinée des deux causes de mouvement qui agissent sur la tranche. Divisant cette différence par la masse δSdz, on aura la force accélératrice, qui est par conséquent égale à $\frac{S(\varphi\delta dz\cos\epsilon - dp)}{S\delta dz}$, ou à $\frac{\varphi\delta dz\cos.\epsilon - dp}{\delta dz}$.

Les molécules fluides comprises dans la section Mm n'emploient qu'un instant dt à arriver en M'm', ou à parcourir un espace P$p = dz$. On a vu (24) que la force accélératrice est égale à la différentielle seconde de l'espace parcouru, divisée par le quarré de l'élément du temps; ainsi on a, dans le cas présent,

705..... $\frac{ddz}{dt^2} = \frac{\varphi\delta dz\cos.\epsilon - dp}{\delta dz}$.

706. Le volume de fluide qui s'écoule par l'orifice pendant un temps quelconque, est égal au volume de fluide qui passe, pendant le même temps, par la section Mm, puisque ce passage n'a lieu que pour fournir à la dépense de l'orifice : or, le volume de fluide écoulé, pendant un instant, par l'orifice, est égal à Oudt, et, pendant cet instant, l'eau de la tranche Mmm'M $= Sdz$ se renouvelle : on a donc $Oudt = Sdz$; d'où on tire $dz = \frac{Oudt}{S}$, et $ddz = \frac{Odudt}{S} - \frac{OudSdt}{S^2}$. Substituant cette valeur de ddz dans l'équation de l'article précédent, et chassant le dénominateur du second membre, il vient

707..... $\left(\frac{\delta Odu}{S} - \frac{\delta OudS}{S^2}\right)\frac{dz}{dt} = \varphi\delta dz\cos.\epsilon - dp$;

Digitized by Google

ou, en faisant attention que l'équation $O u dt = S dz$ donne $\frac{dz}{dt} = \frac{Ou}{S}$,

$$\frac{\delta O du}{dt} \cdot \frac{dz}{S} - \frac{\delta O^2 u^2 dS}{S^3} = \varphi \delta dz \cos.\epsilon - dp.$$

708. Si on veut avoir la valeur finie de la pression p pour une certaine tranche, et dans un instant déterminé, il faut observer qu'à cet instant la vîtesse u a aussi une valeur déterminée, et qu'ainsi cette vîtesse doit être traitée comme constante dans l'intégration. L'équation précédente donne, eu égard à cette considération, pour la pression qui a lieu dans la tranche $MM'm'M$,

$$709 \cdots\cdots p = \varphi \delta z \cos.\epsilon - \frac{\delta O^2 u^2}{2 S^2} - \frac{\delta O du}{dt} \int \frac{dz}{S} + C.$$

Valeur de la pression pour un instant et un point déterminés.

L'intégrale $\int \frac{dz}{S}$ doit être prise depuis la surface supérieure du fluide jusqu'en P. Il est aisé de voir que cette intégrale est numériquement égale à l'aire d'une courbe dont les abscisses seroient égales à z, et répondroient à des ordonnées qui auroient pour valeur $\frac{1}{S}$, cette aire étant mesurée dans toute l'étendue de z comprise entre la surface supérieure du fluide et P. On peut, dans les différentes circonstances où l'on aura besoin de calculer la valeur de $\int \frac{dz}{S}$, employer avec utilité la méthode que nous avons donnée article (223) et suivants.

Détermination de la constante arbitraire qui entre dans l'équation précédente.

Observons que l'orifice AC est pressé par le poids de l'atmosphere, et que l'action provenant de cette cause est détruite par l'action égale qui s'exerce à l'ouverture VR : mais comme on peut supposer que le vase qui se vuide est plongé dans un fluide différent de l'air, ce fluide doit exercer à l'orifice une pression que nous appellerons P. Ainsi lorsqu'on aura $z = h$, cas auquel $S = O$, on aura en même temps $p = P$; ce qui, en supposant $\delta = 1$, et nommant A l'intégrale $\int \frac{dz}{S}$, prise dans toute l'étendue du fluide, donne $C = P - \varphi h \cos.\epsilon + \frac{1}{2} u^2 + \frac{AO du}{dt}$, et change l'équation précédente en

Valeur de la pression résultante de cette détermination.

$$710. \quad p = \varphi \cos.\epsilon (z - h) + \left(1 - \frac{O^2}{S^2}\right) \frac{1}{2} u^2 + \left(A - \int \frac{dz}{S}\right) \frac{O du}{dt} + P.$$

711. Considérons maintenant l'état de la tranche supérieure du fluide, où la section du tuyau est égale à B, et supposons qu'outre la pression de l'atmosphere, qui est détruite par la

Digitized by Google

pression pareille de l'orifice, cette section est comprimée par un piston dont l'effort équivaut à un poids Q, et qui par conséquent exerce une pression $= \frac{Q}{B}$, en la rapportant à l'unité de surface. D'après cela, lorsqu'on aura $z = 0$, auquel cas $\int \frac{dz}{S}$ deviendra nul, p sera égal à $\frac{Q}{B}$, et l'équation de l'art. précédent deviendra

Ce que devient l'équation précédente à la surface supérieure du fluide.

$$712 \cdots\cdots - \varphi h \cos.\epsilon + \left(1 - \frac{O^2}{B^2}\right)\frac{1}{2}u^2 + \frac{AO\,du}{dt} - \frac{Q}{B} + P = 0.$$

713. L'équation $O\,u\,dt = S\,dz$ donne $dt = \frac{S\,dz}{O\,u}$; ensuite comme, pendant le même temps, il passe la même quantité d'eau par chaque section, et que, ce temps étant supposé égal à dt, la quantité d'eau écoulée est $S\,dz$, on a $S\,dz = B\,dz$ (le dz du second membre exprimant l'épaisseur de la tranche supérieure du fluide), et par conséquent $dt = \frac{B\,dz}{O\,u}$. Substituant cette valeur de dt dans l'équation de l'article précédent, et chassant les dénominateurs, on a

Équation qui contient la relation entre la vîtesse à l'orifice et l'abaissement instantané de la surface supérieure.

$$714 \cdots\cdots Q\,dz - PB\,dz + \varphi h B\,dz \cos.\epsilon - AO^2 u\,du - \left(1 - \frac{O^2}{B^2}\right)\frac{1}{2}B u^2 dz = 0,$$

équation qui ne contient plus que les quantités relatives à la surface supérieure du fluide et à l'orifice, avec ϵ et h.

Nous allons passer à quelques applications.

Du mouvement de l'eau qui s'échappe d'un vase par un petit orifice.

La vîtesse intérieure de l'eau peut être censée infiniment petite dans un vase percé d'un petit orifice.

715. Supposons d'abord l'orifice horizontal; la vîtesse de l'eau, dans l'intérieur du vase, sera, par l'hypothese, très petite en comparaison de la vîtesse de l'eau à l'orifice: car v étant la vîtesse d'une section S, et dz l'espace que cette section parcourt pendant l'instant dt, on aura (24) $v = \frac{dz}{dt}$, et l'équation $O\,u\,dt = S\,dz$ donne $O\,u = S\,\frac{dz}{dt}$, ou $O\,u = S\,v$, ou $S : O :: u : v$; ce qui fait voir que S étant très grand par rapport à O, u sera aussi très grand par rapport à v.

716. Cette espece d'immobilité relative de l'intérieur du fluide, et l'*horizontalité* de l'orifice, permettent de supposer qu'en divisant ce fluide en tranches horizontales, chacune de

Digitized by Google

ces tranches descend verticalement, et qu'ainsi l'axe des z et la ligne h sont des lignes verticales, h étant la distance de l'orifice à un plan horizontal passant par la surface supérieure du fluide; on a donc $\epsilon = 0$, et $\cos.\epsilon = 1$.

Comment l'écoulement par un petit orifice horizontal rentre dans le cas du problème général résolu dans le chapitre précédent.

De plus, comme l'orifice O est très petit en comparaison de l'une quelconque des sections S, on peut, dans l'équation de l'art.(714), négliger les termes qui renferment O; ce qui, en faisant $\cos.\epsilon = 1$, réduit cette équation à $Q + \varphi h B - PB = \frac{1}{2} B u^2$; d'où on tire

$$717 \cdots\cdots u = \sqrt{[2(\varphi h + \tfrac{Q}{B} - P)]}.$$

Formule générale pour l'écoulement par un petit orifice horizontal.

718. Lorsque les pressions Q et P, à la surface supérieure du fluide et à l'orifice, sont nulles, ou qu'on a $Q = 0$, et $P = 0$, cette équation devient

Ce que devient cette formule quand la pression est nulle à l'orifice et à la surface du fluide.

$$719 \cdots\cdots u = \sqrt{2\varphi h}.$$

720. Observons maintenant que φh exprime (174) le poids d'un prisme de fluide qui auroit l'unité de surface pour base et h pour hauteur (on se rappellera qu'on a fait (709) la densité $\delta = 1$) (*); φh est donc la pression rapportée à l'unité de surface qui s'exerceroit à l'orifice supposé bouché, et cette pression est la seule cause productrice de la vîtesse u, puisque c'est le seul élément susceptible de modification qui entre dans l'expression de cette vîtesse. Ceci se voit, d'ailleurs, *à priori*, par ce que nous venons de dire art.(715), où on a vu que la vîtesse de l'intérieur du fluide peut être regardée comme nulle; d'où il suit que la force accélératrice que la pesanteur tend à communiquer aux tranches fluides est anéantie à chaque instant. Mais toutes les fois que la hauteur h de la surface supérieure d'un fluide pesant, au-dessus d'une surface infiniment petite, est la même, la pression de cette surface est aussi la même, quelle que soit son inclinaison (558); donc, puisque cette pression est la seule cause productrice de la vîtesse d'un fluide jaillissant par un orifice infiniment petit, l'effet produit, ou la vîtesse, sera le même lorsque la cause sera la même; ainsi $\sqrt{(2\varphi h)}$ sera la vîtesse du fluide jaillissant par un orifice infiniment petit, sous une hauteur h, quelle que soit l'inclinaison de cet orifice.

La vîtesse du fluide, jaillissant par un petit orifice horizontal, est due à la seule pression, et il suit de-là que cette vîtesse sera la même; quelle que soit l'inclinaison de l'orifice.

721. Cet effet a lieu dans tous les instants du mouvement,

(*) Il faut observer que, quelque valeur qu'on donne à δ, elle doit toujours disparoître de l'équation $u = \sqrt{2\varphi h}$, et qu'ainsi, comme cette valeur est arbitraire, on est, dans tous les cas, le maître de la supposer égale à l'unité.

Digitized by Google

Formule pour la vîtesse de l'eau jaillissant par un petit orifice d'inclinaison quelconque.

puisque la vîtesse de l'intérieur du fluide est toujours censée nulle, et qu'il agit toujours à l'orifice par la seule pression qu'il exerceroit dans l'état d'équilibre; ainsi h étant la hauteur primitive de la surface supérieure du fluide au-dessus de l'orifice, et z étant la quantité dont cette surface s'est abaissée à une époque quelconque, on voit que, pour avoir la vîtesse à la même époque, il ne faudra que substituer $h - z$ à h, et qu'ainsi la formule précédente sera généralement $u = \sqrt{[2\varphi(h-z)]}$, où u exprimera la vîtesse à chaque instant.

Cette vîtesse est celle due à la hauteur de la surface du fluide au-dessus de l'orifice.

722. On a vu (65) que $\sqrt{(2\varphi h)}$ exprimoit la vîtesse due à la hauteur h. Donc,

Un fluide incompressible et pesant, renfermé dans un vase d'où il s'écoule par un orifice de forme et de position arbitraire, mais supposé très petit en comparaison d'une section horizontale quelconque de ce vase, s'échappe avec une vîtesse due à la hauteur de la surface supérieure du fluide au-dessus de l'orifice.

Le fluide peut, en vertu de cette vîtesse, remonter jusqu'au niveau de la surface supérieure.

723. Un mobile peut, avec la vîtesse due à une certaine hauteur, remonter à cette même hauteur (22); ainsi un fluide jaillissant par un petit orifice, et dont la surface supérieure est à une hauteur constante, doit, s'il est dirigé convenablement, remonter à la même hauteur.

Valeur du volume d'eau qui s'écoule dans un instant.

724. ω étant la surface d'un petit orifice, et sa vîtesse étant égale à $\sqrt{[2\varphi(h-z)]}$, le volume d'eau qui s'en écoulera pendant un instant sera $\omega dt\sqrt{[2\varphi(h-z)]}$.

Volume d'eau qui s'écoule pendant un temps quelconque, le vase étant entretenu constamment plein.

725. Supposons que l'eau soit constamment entretenue à la même hauteur h dans le vase; le volume qui s'en écoulera pendant un temps quelconque sera $= \int \omega dt\sqrt{2\varphi h} = \omega t\sqrt{2\varphi h} = \omega t\sqrt{60,392\,h} = 7,77125 \times \omega t\sqrt{h}$; car on sait (26) que $\varphi = 30,196$ pieds.

Formule générale qui donne le temps de l'écoulement.

726. Soit Q le volume d'eau écoulé pendant le temps t, on aura $Q = \omega t\sqrt{2\varphi h}$; d'où $t = \frac{Q}{\omega\sqrt{2\varphi h}}$.

Formule particuliere pour le cas où le vase est un prisme vertical.

727. Si le vase est un prisme vertical dont la section horizontale soit S, le temps employé à la dépense d'un volume d'eau égal à celui que contient constamment le vase, sera $t = \frac{hS}{\omega\sqrt{2\varphi h}} = \frac{S\sqrt{h}}{\omega\sqrt{2\varphi}}$.

Cas où l'orifice est un cercle.

728. Si l'orifice est un cercle dont le diametre soit a, on aura $\omega = 0,7853982\,a^2$, et $Q = 6,1035\,a^2 t\sqrt{h}$. On voit que, dans cette équation et dans les précédentes, le pied-de-roi et la seconde de temps doivent être pris pour unité, chacun dans leur espece; ainsi en supposant que le diametre a soit d'un pouce,

Digitized by Google

pouce, ou de 0,083333 pieds, la hauteur h de la superficie de l'eau au-dessus de l'orifice de 12 pieds, et le temps t de l'écoulement, d'une minute ou 60 secondes, le volume d'eau écoulée sera, d'après la formule, de $6,1035 \times (0,083333)^2 \times 60 \times \sqrt{12} = 8,8097$ pieds cubes.

Les résultats de l'expérience different de ceux du calcul.

729. Si on faisoit l'expérience, la dépense effective ne seroit pas trouvée aussi grande que nous venons de l'assigner, par des raisons que nous verrons bientôt.

Cas où le vase n'est pas entretenu constamment plein.

730. Lorsque l'eau n'est pas constamment entretenue à la même hauteur dans le vase, c'est-à-dire lorsque celle qui s'écoule n'est pas remplacée par de nouvelle eau, la vîtesse, à l'orifice, diminue graduellement à mesure que l'eau s'abaisse dans le vase, et cette diminution est proportionnelle à celle de la racine quarrée des hauteurs de l'eau au-dessus de l'orifice (722).

Équation qui renferme la relation entre la variation de la hauteur de l'eau, la section horizontale du vase et le temps, dans le cas précédent.

731. On conçoit aisément qu'il doit y avoir une relation entre la variation des hauteurs dont nous venons de parler et la forme du vase : en effet, S étant la section du vase à la surface supérieure du fluide, dz la quantité infiniment petite dont cette section descend pendant un instant; Sdz sera le volume de fluide écoulé pendant un instant. Mais on a vu (724) que cette même quantité de fluide avoit pour valeur

$$\omega dt \sqrt{[2\varphi(h-z)]};$$

on a donc l'égalité

$$Sdz = \omega dt \sqrt{[2\varphi(h-z)]}, \text{ ou } dz = \frac{\omega dt \sqrt{[2\varphi(h-z)]}}{S},$$

qui fait voir que la variation de hauteur dz dépend de la section S du vase où se trouve la surface supérieure du fluide.

Valeur du temps, tirée de cette équation.

732. L'équation précédente donne $dt = \frac{Sdz}{\omega\sqrt{[2\varphi(h-z)]}}$, ou $t = \int \frac{Sdz}{\omega\sqrt{[2\varphi(h-z)]}}$; c'est la valeur du temps qu'emploie le fluide à descendre de la hauteur z. Comme S est toujours censé fonction de z, l'équation précédente s'intégrera toujours, ou exactement, ou par les quadratures.

Application au cas où le vase est un cylindre vertical.

733. Pour donner des exemples de l'application de l'équation $t = \int \frac{Sdz}{\omega\sqrt{[2\varphi(h-z)]}}$, supposons d'abord que le vase est cylindrique, ou, pour plus de généralité, prismatique, et posé de maniere que son axe soit vertical. La section S sera une surface constante égale au cercle générateur du cylindre ou à la section horizontale du prisme, et on aura $t = \frac{S}{\omega\sqrt{2\varphi}} dz\,(h-z)^{-\frac{1}{2}} =$

Digitized by Google

$\frac{-S}{m\sqrt{2g}}\,2(h-z)^{\frac{1}{2}}+A$. Lorsque $t=0$, la descente z du fluide est nulle; ce qui donne $\frac{-2Sh^{\frac{1}{2}}}{m\sqrt{2g}}+A=0$, ou $A=\frac{2Sh^{\frac{1}{2}}}{m\sqrt{2g}}$, et, en substituant cette valeur de A, $t=\frac{2S}{m\sqrt{2g}}\left[h^{\frac{1}{2}}-(h-z)^{\frac{1}{2}}\right]$.

Temps de l'écoulement total dans le cas précédent.

734. Le vase sera entièrement vuide lorsqu'on a $z=h$; ainsi, nommant T le temps total de l'écoulement du fluide hors du vase, on aura $T=\frac{2S\sqrt{h}}{m\sqrt{2g}}$. On voit que ce temps est double de celui employé à faire la même dépense d'eau lorsque le vase est entretenu constamment plein à la hauteur h (727).

Application au cas où le vase est un solide engendré par la révolution d'une parabole.

735. Supposons à présent que la paroi intérieure du vase est une surface courbe engendrée par la révolution d'une parabole AMC (*fig.* 151), dont le sommet est en A, autour de l'axe vertical AB. Soient AB $=h$, BP $=z$; l'horizontale PM $=y$, et n le nombre par lequel il faut multiplier le rayon pour avoir la circonférence.

La section S, engendrée par la révolution de PM, sera un cercle dont la surface a pour valeur $\frac{1}{2}ny^2$. On aura ensuite AP, ou $h-z=\frac{y^2}{a}$ (a étant le parametre de la parabole), d'où on tire $\frac{1}{2}ny^2=\frac{an}{2}(h-z)=S$. Substituant ces valeurs dans la formule générale $t=\int\frac{S\,dz}{m\sqrt{[2g(h-z)]}}$, elle devient

$$t=\int\frac{\frac{an}{2}(h-z)\,dz}{m\sqrt{[2g(h-z)]}}=\frac{an}{2m\sqrt{2g}}\int(h-z)^{\frac{1}{2}}dz=\frac{-an}{3m\sqrt{2g}}(h-z)^{\frac{3}{2}}+A.$$

Lorsque $z=0$, on a en même temps $t=0$; ce qui donne

$$0=\frac{-anh^{\frac{3}{2}}}{3m\sqrt{2g}}+A,\ \text{ou } A=\frac{anh^{\frac{3}{2}}}{3m\sqrt{2g}};$$

et en substituant cette valeur de A,

$$t=\frac{an}{3m\sqrt{2g}}\left[h^{\frac{3}{2}}-(h-z)^{\frac{3}{2}}\right];$$

équation qui contient deux nombres communs à toutes les expériences; savoir, $n=6,283185$, et $\sqrt{2g}=7,77125$.

Théorie et construction des horloges d'eau ou *clepsydres*, et 1°. des clepsydres cylindriques.

736. Les deux équations $T=\frac{2Sh^{\frac{1}{2}}}{m\sqrt{2g}}$, et $t=\frac{2S}{m\sqrt{2g}}\left[h^{\frac{1}{2}}-(h-z)^{\frac{1}{2}}\right]$, données articles (733 et 734), pour l'écoulement total ou partiel de l'eau hors d'un cylindre, peuvent être employées à diviser ce cylindre de maniere qu'il puisse servir à mesurer le temps par les différents abaissements du fluide; on nomme une pareille machine, *horloge d'eau*, ou *clepsydre*. Pour diviser

Digitized by Google

cette *clepsydre*, il faudra d'abord convenir du temps total que l'écoulement total de l'eau doit mesurer. Supposons qu'on veuille que l'écoulement total dure 12 heures, ou 12 fois 3600 secondes : car on sait que la valeur $\omega\sqrt{2g} = 7,77$ suppose que la seconde est l'unité de temps; on fera, dans l'équation, $T = \frac{2Sh^{\frac{1}{2}}}{\omega\sqrt{2g}}$, $T = 12 \times 3600$; il restera encore trois quantités à déterminer; savoir S, h et ω, dont deux doivent être données d'avance, et la troisieme déduite de celles-ci, de maniere à satisfaire à l'équation $12 \times 3600 = \frac{2Sh^{\frac{1}{2}}}{\omega\sqrt{2g}}$. Supposons, par exemple, que le diametre du cylindre et la grandeur de l'orifice soient donnés, S et ω seront connus, et il restera à déterminer la hauteur h du cylindre, qui, tirée de l'équation précédente, sera $h = \frac{2 \times (12 \times 3600)^2 \omega^2}{4S^2} = \frac{72 (3600)^2 \omega^2}{S^2}$.

Les dimensions du cylindre étant ainsi déterminées pour que l'écoulement total du fluide mesure un certain nombre d'heures, on marquera sur sa hauteur les divisions répondant aux différentes heures et fractions d'heure, d'après les valeurs de $h - z$ fournies par l'équation $t = \frac{2S}{\omega\sqrt{2g}} [h^{\frac{1}{2}} - (h - z)^{\frac{1}{2}}]$, qui donne $h - z = \left(h^{\frac{1}{2}} - \frac{t\omega\sqrt{2g}}{2S}\right)^2$, lesquelles valeurs doivent être comptées de l'orifice.

2°. Clepsydres où des abaissements égaux de l'eau mesurent des temps égaux ; comment on trouve la courbe de leurs sections verticales, quelle que soit la forme de leur section horizontale.

On peut desirer d'avoir une clepsydre qui soit telle que des portions égales de temps soient mesurées par des divisions égales de l'axe vertical du vase. Cette propriété se réduit évidemment à faire que, dans l'équation générale $dt = \frac{S dz}{\omega\sqrt{[2g(h-z)]}}$, (732), le rapport $\frac{dt}{dz}$ de la variation du temps à la variation de la descente du fluide, dans le vase, soit un rapport constant. Soit $\frac{dt}{dz} = A$; on aura $A\omega\sqrt{[2g(h-z)]} = S$. La quantité A se détermine par le temps total qu'on veut que le fluide emploie à descendre de la hauteur totale h. Supposons que h soit de 6 pieds, et qu'on veuille que le fluide emploie 12 heures à descendre de cette hauteur, l'équation $dt = A\,dz$ donnera $t = Az$; et en substituant les valeurs de t et z, qui conviennent au temps et à la hauteur totale, exprimées en secondes et en pieds-de-roi, $12 \times 3600 = 6A$; d'où $A = 2 \times 3600 = 7200$.

A et h étant ainsi déterminés, la courbe formée par le profil ou section verticale du vase dépendra de la figure qu'on voudra adopter pour la section horizontale S. Supposons que cette

Digitized by Google

section est un parallélogramme dont le centre est dans l'axe du vase, un des côtés une ligne constante a, et l'autre côté égal à $2y$; on aura $S = 2ay$, qui, substituée dans l'équation $S = A\omega\,[2\varphi(h-z)]^{\frac{1}{2}}$, donne $y^2 = \frac{A^2\omega^2\varphi}{2a^2}(h-z)$, équation à la parabole ordinaire. Si cette section horizontale doit être un quarré dont le centre se trouve dans l'axe de la clepsydre, nommons $2y$ le côté de ce quarré, on aura $S = 4y^2$, valeur qui, substituée dans l'équation $A\omega\,[2\varphi(h-z)]^{\frac{1}{2}} = S$, donne $y^4 = \frac{1}{8}A^2\omega^2\varphi(h-z)$; équation d'une parabole du quatrieme ordre, dont le sommet est à l'orifice qui donnera la figure de la section verticale de la clepsydre, prise perpendiculairement aux côtés des sections horizontales.

Si on veut que les sections horizontales S soient des cercles dont les centres soient tous dans l'axe de la clepsydre, son profil sera une courbe dont la révolution engendrera sa paroi intérieure. Soit AMC (*fig.* 151) cette courbe; faisant $BA = h$, $BP = z$, $PM = y$, $n =$ le rapport de la circonférence au rayon, on aura $S = \frac{1}{2}ny^2$, qui, substituée dans l'équation

$$A\omega\,[2\varphi(h-z)]^{\frac{1}{2}} = S, \text{ donne } y^4 = \frac{8A^2\omega^2\varphi}{n^2}(h-z);$$

ainsi la section verticale de la clepsydre sera encore une parabole du troisieme genre ou du quatrieme ordre. On concevra aisément, d'après les exemples que nous venons de citer, la maniere de déterminer la forme de la clepsydre où la surface de l'eau parcourt des espaces égaux en temps égaux, dans une hypothese quelconque, sur la figure de sa section horizontale. Cette forme est susceptible, comme on voit, d'un nombre infini de variétés; car rien ne détermine, *à priori*, la fonction S dans l'équation $S = A\omega\,[2\varphi(h-z)]^{\frac{1}{2}}$ (*).

(*) Les clepsydres occupent une place intéressante dans l'histoire des sciences et des arts, par l'usage qu'en ont fait les anciens peuples pour la mesure du temps. La maniere, souvent très ingénieuse, dont ils ont tiré parti de l'écoulement de l'eau, pour sous-diviser la durée des années et des jours, donne lieu de s'étonner qu'ils n'aient pas appliqué le même esprit d'invention à trouver des horloges, qui, quoique moins parfaites que celles perfectionnées par les découvertes modernes, auroient cependant pu être bien supérieures aux clepsydres. Observons, à ce sujet, que les idées de l'eau qui coule, et du temps qui s'enfuit, offrent, par leur rapprochement, des comparaisons morales à la philosophie, des images poétiques à l'imagination, et que la réunion de la poésie, de la philosophie et des arts, avoit, pour les anciens, des charmes que l'étendue actuelle des sciences exactes nous empêche peut-être de sentir aussi vivement. La clepsydre de Ctesibius offre un exemple intéressant de cette réunion. On ne peut se refuser à une secrete et douce mélancolie, en voyant l'eau s'échapper, en forme de pleurs, des yeux d'une figure qui semble payer ce tribut de regrets aux instants qui s'échappent. Cette eau se rend dans un réservoir vertical, où elle éleve une autre figure qui tient une baguette, au moyen de laquelle, et de son ascension graduelle,

Digitized by Google

737. Finissons ce chapitre par analyser le cas d'un vase qui se vuide par un petit orifice ω', et qui, en même temps qu'il perd de l'eau, en reçoit de nouvelle d'un autre vase, qui la lui fournit par un petit orifice ω, au-dessus duquel l'eau est entretenue à une hauteur constante a.

Analyse du cas où un vase, se vuidant par un petit orifice, reçoit par un autre petit orifice l'eau d'un autre vase entretenu constamment plein.

Nommons x la hauteur variable du fluide dans le premier vase au-dessus de l'orifice ω', et S la section horizontale de ce vase à la hauteur x; la dépense ou le volume de fluide écoulé pendant un instant sera, (724), $\omega' dt\sqrt{2\varphi x}$, et l'abaissement du fluide que cette dépense produiroit dans le vase, si ce vase ne recevoit pas de nouvelle eau, est $\frac{\omega' dt.\sqrt{2\varphi x}}{S}$. D'un autre côté, le volume de fluide fourni, pendant un instant, par le vase dont l'orifice $= \omega$, et où l'eau est à une hauteur constante a; ce volume, disons-nous, est égal à $\omega dt\sqrt{2\varphi a}$, et feroit monter le fluide dans l'autre vase, d'une quantité $\frac{\omega dt\sqrt{2\varphi a}}{S}$, si cet autre vase ne perdoit pas de l'eau. Donc l'ascension réelle, ou la quantité dx, dont la hauteur de l'eau varie en un instant dans le vase qui dépense par l'orifice ω, est $\frac{\omega dt\sqrt{2a\varphi}}{S} - \frac{\omega' dt\sqrt{2\varphi x}}{S} = dx$. On tire de cette équation $dt = \frac{S}{\sqrt{2\varphi}} \cdot \frac{dx}{\omega\sqrt{a} - \omega'\sqrt{x}}$.

Application à un vase prismatique.

Supposons le vase auquel est adapté l'orifice ω', prismatique,

elle indique les heures sur une colonne: le même fluide sert ensuite de moteur, dans l'intérieur du piédestal, à un mécanisme qui fait faire à la colonne une révolution autour de son axe, dans un an, de telle sorte que le mois et le jour où l'on est, se trouvent toujours sous l'index, dont l'extrémité parcourt une verticale divisée d'après la relation entre les heures du jour et de la nuit, auxquels cette verticale doit correspondre. On sait que, chez les anciens, non seulement les heures étoient inégales d'un jour à l'autre, mais encore du jour à la nuit, puisqu'ils partageoient en douze parties égales l'intervalle du lever au coucher du soleil, et en douze autres parties celui du coucher au lever suivant.

Ctesibius d'Alexandrie, inventeur de cette ingénieuse clepsydre, vivoit sous *Ptolémée Physcon*, environ cent vingt ans avant Jésus-Christ: on en trouve la description, ainsi que de plusieurs autres machines du même genre, dans le *Vitruve* de Perrault.

Le mot *clepsydre* est dérivé des deux mots grecs κλέπτω, *je cache*, et ὕδωρ, *eau*. Quelques auteurs en attribuent l'invention à Scipion Nasica, cousin de Scipion l'Africain, qui vivoit environ deux cents ans avant Jésus-Christ: mais il est vraisemblable qu'il en a seulement fait connoître l'usage à Rome; car les Égyptiens, qui s'en servoient pour mesurer le cours du soleil, l'avoient sûrement connue à une époque fort antérieure. On a long-temps employé ces sortes d'horloges, tant sur terre que sur mer, dans l'antiquité, le moyen âge, et même une partie de l'âge moderne. L'usage des horloges à pendules isochrones tenoit à des notions qui exigeoient le concours des découvertes faites postérieurement dans les sciences et les arts; le nombre de siecles qui se sont écoulés avant qu'on pût obtenir la perfection actuelle de la mesure du temps, nous fait voir que l'homme, quoique stimulé par le sentiment des besoins de premiere nécessité, ne peut cependant, avec les lumieres ordinaires, perfectionner que jusqu'à un certain point les moyens de satisfaire ces besoins; c'est aux sciences, que bien des personnes regardent comme un luxe de l'esprit humain, à achever ce que la nécessité n'a fait qu'ébaucher: on pourroit citer bien des exemples pareils, propres à faire sentir l'injustice de ceux qui accordent peu d'estime aux connoissances profondes.

Digitized by Google

la section S sera constante; faisons $x = \frac{y^2}{a}$, ou $adx = 2ydy$, l'équation précédente se changera en

$$dt = \frac{2S}{\sqrt{2g}} \cdot \frac{ydy}{\omega a - \omega' y} = \frac{2S}{\sqrt{2g}} \cdot ydy\,(\omega a - \omega' y)^{-1}.$$

Faisons encore $\omega a - \omega' y = z$, ou $y = \frac{\omega a - z}{\omega'}$, et $dy = -\frac{dz}{\omega'}$; l'équation précédente deviendra $dt = \frac{2S}{\omega'^2\sqrt{2g}}\left(dz - \frac{\omega a dz}{z}\right)$, dont l'intégrale est $t = \frac{2S}{\omega'^2\sqrt{2g}}(z - \omega a \log. z) + A$; ou, en substituant la valeur de z, en x,

Équation qui donne le temps de l'écoulement.

738. . . $t = \frac{2S}{\omega'^2\sqrt{2g}}\left\{\omega\sqrt{ax} - \omega a\left[1 + \log.(\omega'\sqrt{ax} - \omega a)\right]\right\} + A.$

On déterminera la constante d'après la valeur qu'on supposera à x lorsque $t = 0$.

Équation qui donne l'eau écoulée pendant un temps donné.

739. La quantité d'eau écoulée, pendant le temps t, par l'orifice ω', est égale à $\int \omega' dt\sqrt{2gx}$, ou à $\omega' S \cdot \int \frac{dx\sqrt{x}}{\omega\sqrt{a} - \omega'\sqrt{x}}$, en substituant pour dt sa valeur $\frac{S}{\sqrt{2g}} \cdot \frac{dx}{\omega\sqrt{a} - \omega'\sqrt{x}}$. Faisons $x = \frac{y^2}{a}$, la valeur précédente se changera en $\frac{2\omega' S}{a} \cdot \int \frac{y^2 dy}{\omega a - \omega' y}$. Faisons encore $\omega a - \omega' y = z$, ou $y = \frac{\omega a - z}{\omega'}$, et $dy = \frac{-dz}{\omega'}$, et la valeur précédente deviendra

$$\frac{-2S}{a\omega'^3} \cdot \int (\omega a - z)^2 z^{-1} dz = A - \frac{2S}{a\omega'^3}(\omega^2 a^2 \log. z - 2a\omega z + \tfrac{1}{2} z^2);$$

expression dans laquelle il faut mettre, au lieu de z, la quantité $\omega\sqrt{ax} - \omega' a$.

Du mouvement des fluides dans des vases composés, dont les différentes parties sont séparées par des cloisons verticales, et communiquent entre elles par de petites ouvertures.

Analyse du problème précédent, en supposant que l'orifice du vase, entretenu constamment plein, est plongé dans le fluide que contient l'autre vase.

740. On peut ajouter une condition au problème résolu à la fin du chapitre précédent; savoir, que l'orifice du vase où l'eau est entretenue à une hauteur constante, est plongé dans le fluide que contient l'autre vase. Cette condition sera remplie par la construction d'un vase dont le profil est représenté par AGO′DCBA (*fig.* 153), composé de deux vases AGOB et COO′D, qui sont séparés par la cloison BO, et communiquent ensemble par le petit orifice O.

Le vase AGOB étant entretenu constamment plein à la hauteur AB, supposons qu'à une certaine époque le fluide soit,

Digitized by Google

dans l'autre vase, à la hauteur EF; faisons BO $= h$; BE $= x$; le petit orifice O $= \omega$; le petit orifice O' $= \omega'$, et la section EF $=$ S; la pression qu'exerce la portion de fluide EOO'F, à l'orifice O, rapportée à l'unité de surface, est égale à $\varphi(h - x)$ (560). Substituant cette valeur à la quantité P, dans l'équation de l'art. (717), et faisant la pression Q de la surface supérieure égale à zéro, on a, pour la vîtesse à l'orifice O, que nous appellerons u, l'équation $u = \sqrt{2\varphi x}$; donc le volume d'eau qui afflue pendant un instant dans le vase COO'D, est égal à $\omega dt\sqrt{2\varphi x}$, et feroit élever la surface EF de la quantité $\frac{\omega dt\sqrt{2\varphi x}}{S}$, s'il ne s'échappoit point d'eau par l'orifice O': mais il s'échappe pendant le même instant, par cet orifice O', un volume d'eau égal à $\omega' dt\sqrt{[2\varphi(h-x)]}$, qui tend à faire baisser la surface EF de la quantité $\frac{\omega' dt\sqrt{[2\varphi(h-x)]}}{S}$; donc la variation de BE, ou $-dx$ (le signe est négatif, parceque x diminue à mesure que EF s'éleve), est

$$= \frac{\omega dt\sqrt{2\varphi x} - \omega' dt\sqrt{[2\varphi(h-x)]}}{S} = -dx;$$

d'où on tire, en supposant le vase COO'D prismatique,

$$t = \frac{S}{\sqrt{2\varphi}} \cdot \int \frac{dx}{\omega'\sqrt{(h-x)} - \omega\sqrt{x}}.$$

741. La fraction $\frac{dx}{\omega'\sqrt{(h-x)} - \omega\sqrt{x}}$ est susceptible de devenir rationnelle, et par conséquent t peut toujours avoir une valeur finie; mais l'expression qui résulteroit d'une intégration exacte seroit très compliquée : il vaut mieux, dans la pratique, lorsqu'on voudra avoir le temps employé par la surface EF, monter d'une certaine quantité, en ef, par exemple, quarrer par approximation, dans l'étendue de eE, la courbe qui auroit x pour abscisse, et $\frac{1}{\omega'\sqrt{(h-x)} - \omega\sqrt{x}}$ pour ordonnée. Cette opération se fera fort aisément, en divisant eE en un nombre pair de parties égales, élevant des ordonnées à tous les points de division, et se conformant à la regle de l'art. (224). Nous aurons encore occasion de parler des intégrales qui se rapportent aux quadratures, et de l'application de la regle ci-dessus mentionnée.

742. Le calcul devient fort simple, si on suppose que l'orifice O' n'existe pas, et que toute l'eau qui afflue par l'orifice demeure dans le vase OD (*figure* 154). Dans ce cas, en faisant $\omega' = 0$, on a $t = \frac{-S}{\omega\sqrt{2\varphi}} \int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{-2S}{\omega\sqrt{2\varphi}} x^{\frac{1}{2}} +$ A. Supposons que,

Cas où le second vase ne perd point d'eau.

Digitized by Google

lorsque $t = 0$, on ait $x = k$; il en résultera $A = \frac{2S}{\omega\sqrt{2g}} k^{\frac{1}{2}}$; d'où $t = \frac{2S}{\omega\sqrt{2g}} (\sqrt{k} - \sqrt{x})$.

Temps employé par l'eau, dans le cas précédent, à se mettre de niveau dans les deux vases.

Le temps que la surface EF emploieroit à parvenir dans le vase BL, au même niveau que dans le vase BG, se trouve, en faisant $x = 0$, dans l'équation précédente; ce qui donne $t = \frac{2S\sqrt{k}}{\omega\sqrt{2g}}$.

Propriété qui résulte du cas qu'on vient d'analyser.

Cette valeur est précisément la même que celle du temps que le vase BL emploieroit à se vuider par un orifice ω, si on le remplissoit à une hauteur k au-dessus de cet orifice (734); valeur qui, comme on a vu article cité, est double de celle du temps que le vase BL, entretenu constamment plein à la hauteur k, au-dessus de l'orifice ω, emploieroit à dépenser une quantité d'eau égale à kS, ou au volume d'eau qui seroit contenu dans ce vase.

Cas où un vase, entretenu constamment plein, fournit de l'eau à une suite d'autres vases communiquant entre eux par de petits orifices.

743. Si le vase composé étoit l'assemblage d'un plus grand nombre de vases simples, comme on le voit par le profil de la *figure* 155, la hauteur BO étant supposée constante, et représentant, par des indéterminées x, y, z, et k les hauteurs BC, DE, FK, LO‴, etc.; on aura toujours, pour assigner les valeurs de ces hauteurs à un instant quelconque, un nombre d'équations égal au nombre des indéterminées. En effet, les vîtesses en O, O′, O″, O‴, etc., sont (740), $\sqrt{2\varphi x}$, $\sqrt{2\varphi y}$, $\sqrt{2\varphi z}$, $\sqrt{2\varphi k}$, etc.; on obtiendra donc les variations instantanées de hauteur des surfaces CD, EF, KL, etc., en divisant par chacune de ces surfaces la différence de dépense instantanée des deux orifices du vase simple auquel elle appartient; ce qui donnera un nombre d'équations égal à celui des indéterminées moins un; ensuite on a l'équation $BC + DE + FK + LO''' + \text{etc.} = BO$.

Observation sur les premiers instants où l'eau afflue dans les différents vases.

744. Nous observerons en passant, que, dans les premiers instants où l'eau afflue, soit dans le vase DO (*fig.* 153 et 154), soit dans les vases DO, FO′, LO″, etc. (*fig.* 155), elle doit y avoir un ébranlement qu'on n'a point fait entrer en considération dans la théorie précédente. Ainsi, pour appliquer avec sécurité les équations trouvées ci-dessus, il faut déterminer les limites des intégrales, en supposant que, lorsque $t = 0$, il y a déja une certaine quantité d'eau fournie par le vase BG. Ces objets d'expérience seront discutés plus en détail quand il en sera temps.

Examen du cas où les hauteurs de l'eau deviennent constantes dans les différents vases.

745. On conçoît aisément qu'après un certain temps d'écoulement, l'eau doit se mettre dans les vases DO, FO′, LO″, etc. (*fig.* 155),

Digitized by Google

(*fig.* 155), à des hauteurs telles que la dépense par l'orifice qui est du côté de O‴, soit égale à la recette par l'orifice qui est du côté de G. Dans ce cas, la vîtesse du fluide en O‴ sera uniforme, la dépense proportionnelle au temps, et égale à celle qui a lieu à chacun des autres orifices. Il y a plus; on pourra, par de simples équations du premier degré, déterminer les hauteurs x, y, z, etc., et la dépense commune de chaque orifice. En effet, supposons trois hauteurs x, y, z, dont la somme est égale à la hauteur de l'eau dans le premier vase, et soit Q le volume d'eau écoulé dans l'unité de temps; on aura les équations

$$Q = \omega\sqrt{2\varphi x},\ Q = \omega'\sqrt{2\varphi y},\ Q = \omega''\sqrt{2\varphi z},\ \text{et}\ x+y+z = h;$$

d'où on tire

Équations qui donnent ces hauteurs.

$$746\cdots\cdots x = \frac{\omega'\omega''}{\omega'\omega'' + \omega\omega'' + \omega\omega'}\,h,$$

$$y = \frac{\omega\omega''}{\omega'\omega'' + \omega\omega'' + \omega\omega'}\,h,$$

$$z = \frac{\omega\omega'}{\omega'\omega'' + \omega\omega'' + \omega\omega'}\,h,$$

$$Q = \omega''\sqrt{2\varphi h}\cdot\frac{\omega\omega'}{\sqrt{(\omega'\omega'' + \omega\omega'' + \omega\omega')}}.$$

Analyse du cas où deux vases, communiquant entre eux par un petit orifice, ne sont ni l'un ni l'autre entretenus constamment pleins.

747. Nous allons terminer nos recherches actuelles sur les vases composés, par la solution d'un problême où l'on considere deux vases communiquant entre eux par un petit orifice, et qui ne sont ni l'un ni l'autre entretenus constamment pleins. Nous donnerons cette solution telle qu'elle est dans l'*Hydrodynamique* de M. l'abbé Bossut. Voici l'énoncé du problême.

Le réservoir ISTL (*fig.* 156), rempli d'abord jusqu'en IL, se vuide par le petit tuyau TM, qui communique avec un second réservoir AMNC, contenant, au premier instant, de l'eau jusqu'en DE, et qui en laisse échapper par l'ouverture N. On suppose qu'au bout d'un certain temps les deux surfaces de l'eau, dans les deux réservoirs, soient parvenues respectivement en QP et KV, et on demande la relation des hauteurs verticales QH, KX, ainsi que l'expression du temps de l'écoulement.

Soient KX = x, KV = X, fonction de x, donnée par la figure du vase AMNC, QH = y, QP = Y, fonction de y, donnée par la figure du vase ISTL; l'aire de l'orifice M = M, celle de l'orifice N = N; il est clair (740) que dans l'instant dt le vase ISTL dépense une quantité d'eau exprimée par $M\,dt\sqrt{[2\varphi(y-x)]}$, laquelle a pour autre valeur $-Y\,dy$. On a donc cette premiere équation, $dt = \frac{-Y\,dy}{M\sqrt{[2\varphi(y-x)]}}$.

Digitized by Google

De plus si, de la quantité d'eau $M\,dt\sqrt{[2\varphi(y-x)]}$ que le vase ISTL fournit à chaque instant au vase AMNC, on retranche la dépense $N\,dt\sqrt{2\varphi x}$ que celui-ci fait par l'orifice N, le reste, $M\,dt\sqrt{[2\varphi(y-x)]} - N\,dt\sqrt{2\varphi x}$, sera évidemment l'incrément de l'eau dans le vase AMNC, incrément qui a pour valeur $X\,dx$. Ainsi on aura cette seconde équation

$$dt = \frac{X\,dx}{M\sqrt{[2\varphi(y-x)]} - N\sqrt{2\varphi x}},$$

Comparant ensemble les deux valeurs de dt, il vient

$$\frac{Y\,dy}{M\sqrt{(y-x)}} + \frac{X\,dx}{M\sqrt{(y-x)} - N\sqrt{x}} = 0,$$

équation fondamentale qu'il faudroit intégrer pour en tirer la relation de x à y, et pour parvenir ensuite à l'expression du temps. Cette intégration ne peut pas se faire en général.

Solution du problême lorsque les deux vases sont prismatiques.

748. Lorsque les deux vases sont, ou peuvent être censés prismatiques, ce qui a lieu ordinairement dans les sas d'écluse, l'équation devient homogene, et par conséquent séparable, parcequ'alors Y et X sont des quantités constantes. Soient donc, en ce cas, $Y = A$, $X = B$; on aura

$$\frac{A\,dy}{M\sqrt{(y-x)}} + \frac{B\,dx}{M\sqrt{(y-x)} - N\sqrt{x}} = 0,$$

d'où l'on tire, en faisant d'abord $y = xz$, puis $z - 1 = uu$,

$$\frac{dx}{x} = \frac{2A\,(N u\,du - M u^2\,du)}{M.A.u^3 - N.A.u^2 + (M.A + BM)u - N.A},$$

équation rationnelle, et par conséquent intégrable par des méthodes connues.

L'équation, dans ce cas, peut toujours être rapportée aux quadratures.

749. On voit par-là qu'en général les deux réservoirs étant prismatiques, x et y peuvent toujours être exprimés en fonctions d'une même variable, et que par conséquent on aura aussi t en fonctions de la même variable.

Cas où l'un des deux vases ne perd point d'eau.

750. Il y a un cas très simple et qui arrive souvent dans la pratique. Supposons que l'eau du vase supérieur ISTL passe dans l'inférieur AMNC (l'un et l'autre étant toujours prismatiques), et que le dernier ne perde point d'eau, ou du moins n'en perde qu'une quantité très petite et négligeable; alors on pourra faire $N = 0$, l'équation de l'art. (748) deviendra $A\,dy + B\,dx = 0$; intégrant, et complétant l'intégrale de maniere qu'elle s'évanouisse lorsque $y = HO = h$, et $x = b$, hauteurs données, on trouvera $Ay + Bx = Ah + Bb$. Donc

$$dt = \frac{-Y\,dy}{M\sqrt{[2\varphi(y-x)]}} = \frac{-A\,dy\sqrt{B}}{M\sqrt{2\varphi}.\sqrt{[(B+A)y - Ah - Bb]}},$$

Digitized by Google

dont l'intégrale, complétée de maniere que $t = 0$, donne $y = h$, est

$$t = \frac{A\sqrt{B}}{\frac{1}{2}M(B+A)\sqrt{2g}} \times \left\{\sqrt{(Bh - Bb)} - \sqrt{[(B+A)y - Ah - Bb]}\right\}.$$

Valeur du temps dans ce cas.

751. Pour déterminer le moment où l'eau se met de niveau dans les deux vases, il faut faire $x = y = \frac{Ah + Bb}{A+B}$, et alors on trouve

Détermination de l'instant auquel le fluide se met de niveau dans les deux vases.

$$t = \frac{AB}{M(A+B)} \times \frac{\sqrt{(h-b)}}{\frac{1}{2}\sqrt{2g}}.$$

752. Lorsque $A = B$, cette expression devient $t = \frac{A}{M}\frac{\sqrt{(h-b)}}{\sqrt{2g}}$.

753. La théorie du mouvement de l'eau dans des vases composés, dont les différentes parties sont séparées par des cloisons ou diaphragmes horizontaux, percés de petits orifices, ne comporte pas plus de difficultés que celle que nous venons d'exposer; cependant, faute d'expériences suffisantes, elle a encore quelque chose d'hypothétique, et nous ne nous en occuperons pas dans ce moment.

Du mouvement de l'eau dans les vases divisés par des diaphragmes horizontaux, et dans les pompes.

754. La théorie du mouvement de l'eau, dans les pompes, dépend en partie de celle dont on vient de parler; et par la même raison qu'on vient d'exposer, ce que nous en dirions dans ce moment, ou seroit trop vague, ou exigeroit des détails qui doivent être placés ailleurs. Comme notre objet est de traiter cette matiere avec étendue et d'une maniere utile, nous aimons mieux en renvoyer la discussion à la partie de cet ouvrage qui renfermera les détails nécessaires pour en rendre la théorie plus intelligible et l'application plus fructueuse.

De la courbe décrite par les molécules fluides qui jaillissent par un petit orifice.

755. Soit A (*fig.* 111) un petit orifice de figure quelconque, et AY la hauteur constante du réservoir qui fournit l'eau. L'orifice A peut être immédiatement pratiqué au réservoir, ou bien se trouver à l'extrémité d'un tuyau de longueur quelconque.

La courbe que décrit l'eau jaillissant par un petit orifice est une parabole.

Soit de plus AS la direction du jaillissement de l'eau au sortir de l'orifice, et AMCD la courbure du jet; AD est supposée une ligne horizontale.

756. Faisons $AY = h$, angle $SAD = a$, $AP = x$, $PM = y$; les particules fluides qui sortent par l'orifice A ont, dans la direction AS, une vîtesse due à la hauteur AY (722), et de plus on peut les considérer, au moins sensiblement, comme des

Digitized by Google

projectiles isolés. Leur mouvement, abstraction faite du frottement, de la résistance de l'air, etc., se calculera donc d'après les mêmes principes que celui du corps dont il est question art. (409 et suiv.), c'est-à-dire que le jet décrira une parabole ACD, dont le sommet C sera à l'extrémité de l'ordonnée, menée sur le milieu de AD, et qui aura pour équation

$$y = x \text{ tang. } a - \frac{xx}{4h \cos.^2 a}.$$

Détermination de différentes quantités relatives à cette courbe.

757. Le parametre de cette parabole est égal à $4h \cos.^2 a$; la plus grande hauteur BC, à laquelle le fluide s'éleve, est égale à $h \sin.^2 a$, et la distance $AD = 2h \sin.(2a)$. Toutes ces valeurs sont tirées de l'art. (409) cité ci-dessus.

758. Ainsi, connoissant la différence de niveau CB entre les points C et A, on connoîtra aisément la hauteur AY du réservoir : car soit h' cette différence de niveau, on a $h' = h \sin.^2 a$; d'où $h = \frac{h'}{\sin.^2 a}$. Cette valeur est cependant un peu trop foible dans l'état physique des choses, comme nous le verrons dans la suite.

759. La détermination de $\frac{h'}{\sin.^2 a}$ exige qu'on connoisse l'angle a; ce qui ne peut se faire avec une certaine exactitude que par la mesure de l'amplitude AD; faisant donc $AD = b$, on aura $b = 2h \sin.(2a)$, et $\sin.(2a) = \frac{b}{2h}$.

760. Si on veut avoir une équation entre la hauteur h et une ligne inclinée AD', que nous appellerons b', faisant un angle k avec l'horizon, on tirera la verticale D'Q, et on aura $AQ = b' \cos. k$, et $D'Q = b' \sin. k$. Substituant ces valeurs pour x et pour y dans l'équation $y = x \text{ tang. } a - \frac{xx}{4h \cos.^2 a}$, il vient, toutes réductions faites, et observant que $\frac{\sin. k}{\cos. k} = \text{tang. } k$,

$$h = \frac{b' \cos. k}{4 \cos.^2 a \, (\text{tang. } a - \text{tang. } k)}.$$

761. Si on fait, dans cette équation, $k = 0$, on aura $b' = b$, et $h = \frac{b}{4 \cos.^2 a \text{ tang. } a} = \frac{b}{4 \cos. a \sin. a} = \frac{b}{2 \sin.(2a)}$; ce qui est la même valeur résultante de l'équation de l'art. (756).

762. On pourra, en agissant d'une maniere semblable, et d'après la théorie exposée art. (409 et suiv.), résoudre toutes les questions relatives à la courbe décrite par un jet qui s'élance d'un petit orifice. Nous verrons dans la suite les modifications dont sont susceptibles les résultats ainsi obtenus, et nous allons

Digitized by Google

passer à la considération de l'écoulement de l'eau par des orifices de grandeur finie.

De l'écoulement des fluides par des orifices horizontaux, de figure quelconque, et qui ne peuvent point être supposés infiniment petits.

763. Les calculs des chapitres précédents peuvent être applicables à des orifices horizontaux dont la surface n'est pas la vingtieme partie de celle de la plus petite section horizontale du vase : lorsque ce rapport augmente, il faut avoir égard à la grandeur de l'orifice.

Rapport entre un orifice horizontal et la plus petite section du vase, au-delà duquel il faut avoir égard à la grandeur de l'orifice.

Nous supposerons encore ici, comme nous avons fait article (716), que les tranches infiniment minces, dans lesquelles les particules fluides se meuvent avec une égale vîtesse, sont planes et horizontales; ainsi l'axe ZY (*fig.* 150) sera une ligne droite verticale; la ligne désignée par h, dans la formule de l'art. (703), sera la distance verticale de l'orifice à la section supérieure du vase; la ligne désignée par z sera la distance verticale ZP, etc.

764. Cela posé, pour appliquer au cas dont il s'agit la formule générale (714),

Application de la formule générale de l'art. (714) aux orifices horizontaux.

$$Q\,dz - PB\,dz + \varphi h B\,dz \cos.\epsilon - AO^2 u\,du - \left(1 - \frac{O^2}{B^2}\right)\frac{1}{2} B u^2 dz = 0,$$

il faut faire $\epsilon = 0$, ou cos. $\epsilon - 1$; car on sait que ϵ est l'angle formé par la verticale et l'axe ZY du vase, et la formule se change en

765. $$Q\,dz - PB\,dz + \varphi h B\,dz - AO^2 u\,du - \left(1 - \frac{O^2}{B^2}\right)\frac{1}{2} B u^2 dz = 0.$$

766. Et lorsque les pressions Q et P, à la surface supérieure du fluide et à l'orifice, sont nulles, en

$$\varphi h B\,dz - AO^2 u\,du - \left(1 - \frac{O^2}{B^2}\right)\frac{1}{2} B u^2 dz = 0.$$

767. Si on nomme s la hauteur due à la vîtesse u, on aura $u^2 = 2\varphi s$, et $u\,du = \varphi\,ds$; ces valeurs, substituées dans l'équation précédente, la changent en

Introduction de la hauteur due à la vîtesse de l'eau, à l'orifice, dans l'équation qui résulte de cette application.

$$h B\,dz - AO^2\,ds - \left(1 - \frac{O^2}{B^2}\right) B s\,dz = 0,$$

ou en $$h B^2 dz - ABO^2\,ds - (B^2 - O^2)\,s\,dz = 0.$$

768. L'équation précédente conduit à des formules simples

Digitized by Google

Détermination de la relation entre la vitesse de l'eau à l'orifice et la quantité de fluide écoulé lorsque le vase est entretenu constamment plein.

et commodes pour exprimer toutes les circonstances du mouvement des fluides qui s'échappent des vases par des orifices horizontaux. Cherchons, pour premiere application, à déterminer quelle est la vîtesse à l'orifice, lorsqu'il y a une certaine quantité de fluide écoulé par cet orifice, en supposant le vase entretenu constamment plein.

On peut toujours imaginer que le volume de fluide écoulé est égal à celui d'un prisme qui auroit pour base la surface O de l'orifice et une hauteur k, ou égal à Ok. Au commencement du mouvement, on a $k = 0$, puisqu'il n'y a encore point de fluide écoulé, et à chaque instant k s'accroît de sa différentielle dk; Odk est donc la différentielle du volume de fluide écoulé par l'orifice, ou, ce qui est la même chose, du volume de fluide remplacé à chaque instant à la section supérieure B du fluide, lequel volume est égal à Bdz; d'où on tire $Odk = Bdz$, et $dz = \frac{O}{B}\,dk$. Substituant cette valeur dans l'équation précédente, elle devient $hBOdk - ABO^2ds - (B^2 - O^2)\frac{O}{B}\,sdk = 0$; d'où on tire, par un calcul trop aisé pour en développer les détails, $dk = \frac{ds}{\frac{k}{AO} - \frac{B^2 - O^2}{AB^2O}\,s}$. Le numérateur du second membre de cette équation est égal à la différentielle du dénominateur, divisée par $\frac{B^2 - O^2}{AB^2O}$; ainsi l'intégrale est, d'après les regles les plus élémentaires du calcul intégral,

$$k = \frac{-AB^2O}{B^2 - O^2} \cdot \log.\left(\frac{k}{AO} - \frac{B^2 - O^2}{AB^2O}\,s\right) + A.$$

La constante A doit se déterminer par la condition que s et k sont en même temps égaux à zéro; ce qui donne

$$A = \frac{AB^2O}{B^2 - O^2} \log.\frac{k}{AO}.$$

Equation qui donne cette relation.

769. Substituant cette valeur, il vient

$$k = \frac{-AB^2O}{B^2 - O^2} \log.\left(1 - \frac{B^2 - O^2}{kB^2}\,s\right), \text{ ou } \log.\left(1 - \frac{B^2 - O^2}{kB^2}\,s\right) = \frac{-(B^2 - O^2)k}{AB^2O}.$$

Réflexions sur les logarithmes hyperboliques.

On sait 1°. que les logarithmes qui résultent de l'intégration sont ceux qu'on nomme *hyperboliques* (*); 2°. qu'un logarithme, pris dans un système logarithmique quelconque, est l'exposant de la puissance à laquelle il faut élever le nombre dont le loga-

(*) Voyez ce qui a déja été dit art. (632) sur la maniere de réduire ces logarithmes aux logarithmes vulgaires.

rithme = 1, dans ce système, pour avoir le nombre auquel répond le logarithme dont il s'agit. Ainsi, dans l'équation précédente, le nombre $\frac{-(B^2-O^2)k}{AB^2O}$ est l'exposant de la puissance à laquelle il faut élever le nombre dont le logarithme hyperbolique = 1, pour avoir le nombre $1-\frac{B^2-O^2}{hB^2}$. Le nombre dont le logarithme hyperbolique = 1, est égal à 2,718281828459 ; nommons ce nombre e, et nous aurons, d'après ce qui vient d'être dit, $e^{\frac{-(B^2-O^2)k}{AB^2O}} = 1-\frac{B^2-O^2}{hB^2}s$, ou

$$770\cdots\cdots s=\frac{hB^2}{B^2-O^2}\left(1-e^{\frac{-(B^2-O^2)k}{AB^2O}}\right).$$

Équation exponentielle qui donne la même relation.

Au moyen de cette équation, et de celle de l'art. (769), on pourra, k étant donné, trouver la valeur correspondante de s, et réciproquement.

771. La section supérieure B du fluide étant supposée plus grande que l'orifice O, le nombre $e^{\frac{-(B^2-O^2)k}{AB^2O}}$ pourra être, dès l'origine, plus petit que l'unité, et diminuera à mesure que k augmentera; ainsi la plus grande valeur de s sera $\frac{hB^2}{B^2-O^2}$, et aura lieu, à la rigueur, quand k sera infini. Mais il faut remarquer qu'après une certaine augmentation, que k acquiert assez rapidement, $e^{\frac{-(B^2-O^2)k}{AB^2O}}$ devient une très petite fraction qu'on peut sensiblement négliger, et qu'ainsi on peut, après un certain temps d'écoulement, regarder la vîtesse comme constante, et avoir, pour la hauteur due à cette vîtesse, l'équation $s=\frac{hB^2}{B^2-O^2}$. Cette derniere valeur peut se tirer immédiatement de l'équation $hBO\,dk - ABO^2\,ds - (B^2-O^2)\frac{O}{B}s\,dk = 0$; car, en supposant la vîtesse à l'orifice constante, et faisant par conséquent $ds = 0$, on a, toutes réductions faites, $s=\frac{hB^2}{B^2-O^2}$, comme ci-devant.

La vîtesse peut être regardée comme constante après un petit espace de temps, équation qui donne la hauteur due à la vîtesse, eu égard à cette considération.

772. Si on suppose, dans toutes les équations précédentes, l'orifice O infiniment petit, on trouvera $s = h$; ce qui est conforme à ce qu'on a déja trouvé art. (719).

Cas de l'orifice infiniment petit.

773. On peut se proposer de chercher quelle est la vîtesse du fluide à l'orifice au bout d'un certain temps déterminé, ou

Digitized by Google

Recherche de la relation entre la vitesse du fluide à l'orifice et le temps de l'écoulement.

de chercher la relation entre t et s. Pour cela, observons que $dt = \frac{dk}{u}$, (u est, comme on sait (703), la vîtesse à l'orifice); que $u = \sqrt{2\varphi s}$, et que $dk = \frac{ds}{\frac{h}{AO} - \frac{B^2 - O^2}{AB^2O}}$; ce qui, en substituant, donnera $dt = \frac{ds}{\left(\frac{h}{AO} - \frac{(B^2 - O^2)s}{AB^2O}\right)\sqrt{2\varphi s}}$.

Faisons $s = y^2$, ou $ds = 2ydy$; $\frac{h}{AO} = q$; $\frac{B^2 - O^2}{AB^2O} = r$, et $\frac{q}{r} = m^2$; l'équation précédente se changera en

$$dt = \frac{2dy}{(q - ry^2)\sqrt{2\varphi}} = \frac{2}{r\sqrt{2\varphi}} \cdot \frac{dy}{m^2 - y^2} = \frac{1}{rm\sqrt{2\varphi}}\left(\frac{dy}{m+y} + \frac{dy}{m-y}\right).$$

L'intégrale de cette équation est $t = \frac{1}{rm\sqrt{2\varphi}} \cdot \log. \frac{m+y}{m-y}$; mettant pour m sa valeur $\frac{\sqrt{q}}{\sqrt{r}} = B\sqrt{\frac{h}{B^2 - O^2}}$, et pour y sa valeur $\sqrt{s}$, l'équation devient

Équation qui donne cette relation.

$$774 \cdots\cdots t = \frac{\sqrt{(B^2 - O^2)}}{Br\sqrt{2\varphi h}} \log. \frac{B\sqrt{\frac{h}{B^2 - O^2}} + \sqrt{s}}{B\sqrt{\frac{h}{B^2 - O^2}} - \sqrt{s}}.$$

On n'a point ajouté de constante à l'intégrale, parceque, t et s s'évanouissant en même temps, cette constante seroit nulle.

Recherche de la relation entre le temps de l'écoulem. et la quantité d'eau écoulée.

Cherchons maintenant la relation entre le temps et la quantité d'eau écoulée, ou entre t et k; on a, comme ci-devant, l'équation $dt = \frac{dk}{u} = \frac{dk}{\sqrt{2\varphi s}}$. Ensuite l'équation de l'art. (770) donne $s = \frac{hB^2}{(B^2 - O^2)}\left(1 - e^{\frac{-(B^2 - O^2)k}{AB^2O}}\right)$. Faisons $\frac{hB^2}{B^2 - O^2} = q$; $\frac{B^2 - O^2}{AB^2O} = r$; $e^{\frac{-(B^2 - O^2)k}{AB^2O}} = e^{-rk} = z$, et par conséquent $dk = -\frac{dz}{rz}$; l'équation $dt = \frac{dk}{\sqrt{2\varphi s}}$ deviendra

$$dt = \frac{-dz}{rz\sqrt{[2\varphi q(1-z)]}} = \frac{-1}{r\sqrt{2\varphi q}} \cdot \frac{dz}{z\sqrt{(1-z)}}.$$

Cette équation peut encore, en faisant $1 - z = xx$, et par conséquent $dz = -2xdx$, se transformer en

$$dt = \frac{2}{r\sqrt{2\varphi q}} \cdot \frac{dx}{1 - xx} = \frac{1}{r\sqrt{2\varphi q}}\left(\frac{dx}{1+x} + \frac{dx}{1-x}\right),$$

dont l'intégrale est $t = \frac{1}{r\sqrt{2\varphi q}} \log. \frac{1+x}{1-x}$. Substituant pour x sa valeur, on a

Équation qui donne cette relation.

$$t = \frac{1}{r\sqrt{2\varphi q}} \log. \frac{1 + \sqrt{(1-z)}}{1 - \sqrt{(1-z)}} = \frac{1}{r\sqrt{2\varphi q}} \log. \frac{1 + \sqrt{(1 - e^{-rk})}}{1 - \sqrt{(1 - e^{-rk})}}.$$

Il n'y

Digitized by Google

Il n'y a point encore de constante à ajouter à cette intégrale, parceque t et k s'évanouissent en même temps.

Du cas où le vase se vuide sans recevoir de nouvelle eau.

776. Tout ce que nous avons dit depuis l'art.(763) suppose que le vase est entretenu constamment plein : il faut maintenant déterminer les circonstances de l'écoulement lorsque le vase se vuide sans recevoir de nouvelle eau. Pour cela, on observera que h, qui exprime la distance de l'orifice à la surface supérieure du fluide, et qui est constante lorsque le vase est toujours plein, devient variable lorsque le vase se vuide; car alors la surface supérieure du fluide baisse continuellement. De plus, la variation dh, correspondante à l'élément de temps dt, est égale à l'épaisseur dz de la tranche supérieure du fluide, puisque le volume de cette tranche représente la dépense de l'orifice pendant un instant, et doit être prise avec un signe contraire, puisqu'elle est soustractive ; on a donc $dh = -dz$. Substituant cette valeur dans l'équation de l'art. (767), elle devient

Ce que devient dans ce cas la formule de l'article (767).

$$777 \cdots\cdots - B^2 h dh - ABO^2 ds + (B^2 - O^2)\, s dh = 0.$$

Faisons $\frac{B^2 - O^2}{ABO^2} = P$; $\frac{B}{AO^2} = Q$, et l'on aura la transformée $ds - P s dh + Q h dh = 0$. On peut supposer que cette équation différentielle provient de la différentiation d'une équation finie, telle qu'après cette différentiation, il se trouvoit un facteur variable, composé de la quantité h, avec d'autres quantités constantes, qui multiplioit tous les termes, et qui, par conséquent, a disparu par la division. Soit φ ce facteur variable, l'équation $\varphi ds - \varphi P s dh + \varphi Q h dh$ sera par conséquent une différentielle exacte. Faisons $\varphi s + \int \varphi Q h dh = 0$; ce qui est absolument permis, vu l'indétermination de φ; on aura $\varphi ds + s d\varphi + \varphi Q h dh = 0$. Retranchant cette équation de l'équation $\varphi ds - \varphi P s dh + \varphi Q h dh = 0$, on a, $s d\varphi + \varphi P s dh = 0$, ou $\frac{d\varphi}{\varphi} = -P dh$; ce qui, en intégrant, donne $\log. \varphi = -\int P dh$; et en introduisant le nombre dont le logarithme hyperbolique $= 1$, d'après la propriété de ce nombre énoncée art. (769), $\varphi = e^{-\int P dh}$. Substituant cette valeur de φ dans l'équation $\varphi s + \int \varphi Q h dh = 0$, et introduisant une constante $\varkappa$, on a $s e^{-\int P dh} + \int Q h dh e^{-\int P dh} = \varkappa$; d'où on tire, en faisant attention que diviser par $e^{-\int P dh}$, c'est la même chose que multiplier par $e^{\int P dh}$,

Équation qui donne la relation entre la vîtesse à l'orifice et la hauteur du fluide au-dessus de cet orifice.

$$778 \cdots\cdots s = \varkappa e^{\int P dh} - e^{\int P dh} \int Q h dh e^{-\int P dh}.$$

Digitized by Google

La constante $\varkappa$ se détermine par la condition qu'au commencement du mouvement, ou lorsque $s = 0$, h a toujours une valeur déterminée qui doit être connue, et qui est la hauteur primitive de la surface supérieure du fluide au-dessus de l'orifice.

Application à un vase prismatique.

779. Soit le vase un cylindre ou un prisme vertical; sa section horizontale sera égale à B, qui est la section à la surface supérieure du fluide; la quantité A sera, d'après ce qui a été dit art. (709), égale à la surface d'un parallélogramme dont une des dimensions seroit $\frac{1}{B}$, et l'autre dimension h; ainsi on aura $A = \frac{h}{B}$; ce qui donne $P = \frac{B^2 - O^2}{hO^2} = \frac{f}{h}$, en faisant $\frac{B^2 - O^2}{O^2} = f$. On a de plus $Q = \frac{B^2}{hO^2} = \frac{g}{h}$, en faisant $\frac{B^2}{O^2} = g$. Ces quantités, substituées dans l'équation de l'art. précédent, la changent en

$$s = \varkappa e^{\int f \frac{dh}{h}} - e^{\int f \frac{dh}{h}} \cdot \int g dh e^{-\int f \frac{dh}{h}};$$

et en effectuant les intégrales indiquées aux exposants,

$$s = \varkappa e^{f \log. h} - e^{f \log. h} \cdot \int g dh e^{-f \log. h}.$$

Mais, d'après ce qui a été dit art. (769), $\log. e^{f \log. h} = f \log. h = \log. h^f$; donc $e^{f \log. h} = h^f$, et l'équation précédente devient

$$s = \varkappa h^f - g h^f \int h^{-f} dh = \varkappa h^f - \frac{g h}{1-f}.$$

Soit H la hauteur primitive de la surface supérieure du fluide au-dessus de l'orifice; lorsque $s = 0$, on a $h = H$; ce qui réduit l'équation précédente à $\varkappa H^f = \frac{g}{1-f} H$, et donne $\varkappa = \frac{g}{1-f} H^{1-f}$. Substituant cette valeur de $\varkappa$, il vient $s = \frac{g}{1-f} (H^{1-f} \cdot h^f - h)$; et en substituant pour g, sa valeur $\frac{B^2}{O^2}$, et pour f, sa valeur $\frac{B^2 - O^2}{O^2}$; on a finalement

Équation pour ce cas.

$$780 \cdots\cdots s = \frac{B^2}{2O^2 - B^2} \left(H^2 - \frac{B^2}{O^2} \cdot h^{\frac{B^2}{O^2} - 1} - h \right).$$

Cas où le vase prismatique n'a point de fond.

781. Si on fait, dans cette équation, $B = O$, c'est-à-dire que le vase n'ait point de fond, on aura $s = H - h$; c'est-à-dire que la hauteur due à la vîtesse du fluide sera celle dont la surface supérieure aura descendu; ce qui doit être évidemment.

Cas où la section horizontale du prisme est égale au double de l'orifice.

782. Si on fait $B^2 = 2O^2$, on aura $s = \frac{0}{0}$; ce qui n'apprend rien: mais pour obtenir une valeur déterminée, il faut reprendre

Digitized by Google

l'équation $B^2 h dh + ABO^2 ds - (B^2 - O^2)\, s dh = 0$ de l'article (777), qui devient, dans cette hypothese, et en substituant pour A sa valeur $\frac{h}{B}$, $2 h dh + h ds - s dh = 0$; ou, en divisant par h^2, $\frac{h ds - s dh}{h^2} = -\frac{2 h dh}{h^2}$, dont l'intégrale est $\frac{s}{h} = \log. h^2 + C$. Faisant $h = H$, lorsque $s = 0$, on a $C - \log. H^2$, et pour intégrale complete, $s = h \log.\left(\frac{H^2}{h^2}\right)$.

Détermination de l'instant où la vîtesse est la plus grande.

783. On voit par l'équation de l'art. (780), que s augmente d'abord et diminue ensuite; qu'ainsi il y a une époque à laquelle elle est la plus grande possible. Pour trouver quelle est la valeur de h qui correspond à cette époque, il faut faire $ds = 0$, ou $\left(\frac{B^2}{O^2} - 1\right) H^{2 - \frac{B^2}{O^2}} \cdot h^{\frac{B^2}{O^2} - 2} \cdot dh - dh = 0$; d'où on tire $h^{\frac{B^2 - 2O^2}{O^2}} = \frac{O^2}{B^2 - O^2} \cdot H^{\frac{B^2 - 2O^2}{O^2}}$, et extrayant la puissance $\frac{B^2 - 2O^2}{O^2}$ des deux membres, $h = \left(\frac{O^2}{B^2 - O^2}\right)^{\frac{O^2}{B^2 - 2O^2}} H$. Cette valeur de h, substituée dans l'équation de l'art. (780), donnera, en quantités toutes connues, la plus grande valeur dont s est susceptible.

Au commencement du mouvement la tranche supérieure du fluide descend comme si elle étoit abandonnée à l'action libre de la pesanteur.

784. Au commencement du mouvement, la vîtesse, tant à la surface supérieure du fluide qu'à l'orifice, est infiniment petite, et on peut se proposer de trouver la relation entre les forces accélératrices qui, à cette époque, ont lieu dans ces deux endroits. Pour cela, nommons Φ la force accélératrice à la surface supérieure du fluide, et Φ' la force accélératrice à l'orifice; on a $\Phi' = \frac{B}{O} \Phi$; $\Phi' dk = u du$ (24); et $dk = \frac{B}{O} dz$; ce qui donne $u du = \frac{B^2}{O^2} \Phi dz$. Substituant, dans l'équation de l'art. (766), cette valeur de $u du$, ainsi que la valeur $\frac{h}{B}$ de A, et faisant ensuite $u = 0$, on trouve $\Phi = \varphi$; ainsi, au commencement du mouvement, la tranche supérieure du fluide descend comme si elle étoit abandonnée à l'action libre de la pesanteur.

Explication de l'espece de paradoxe que présente la proposition précédente.

785. On voit, par ce résultat, combien nous avons eu raison de faire observer (702) qu'à une petite distance de l'orifice (*fig.* 150) la section d'*eau vive* alloit en diminuant, et n'étoit plus égale à la section intérieure du vase. Ce n'est que par ce moyen qu'on peut retrouver la loi de continuité, dans les forces accélératrices des tranches, de l'extrémité inférieure du vase, et concevoir, *à priori*, comment la force accélératrice à l'orifice, étant plus grande que celle que comporte la gravité, peut

ed by Google

varier graduellement, jusqu'à la partie du vase où la section devient constante et égale à la surface supérieure, de maniere à devenir égale à la force accélératrice naturelle que donne la gravité. Cette explication est conforme à celles données par MM. d'Alembert, *Traité des fluides*, pag. 106, et l'abbé Bossut, *Hydrodynamique*, tome I, page 294 (*).

Cas où le fluide auroit reçu une impulsion primitive, une fois pour toutes, et cas où il éprouveroit une pression constante.

786. On a supposé, dans les équations des art. (767, 778), que le fluide étoit abandonné à la seule action de la pesanteur : mais deux autres cas peuvent avoir lieu ; savoir celui où le fluide auroit reçu une impulsion primitive et auroit été ensuite abandonné à lui-même, et celui où, dans tous les instants de son mouvement, il éprouveroit, outre l'action de la pesanteur, celle d'une pression constante exercée par un piston ou par un moyen quelconque.

Solution du premier cas.

787. Pour résoudre le premier, il faut, dans l'équation $s = {}_{\varkappa}h^{f} - \frac{\varepsilon h}{1-f}$ de l'art. (779), déterminer la constante $\varkappa$ de maniere que lorsque $h = \mathrm{H}$, s soit égal à une quantité σ, dépendante de l'impulsion primitive ; ce qui donne

$$\sigma = {}_{\varkappa}\mathrm{H}^{f} - \frac{\varepsilon \mathrm{H}}{1-f}, \text{ et } \varkappa = \sigma \mathrm{H}^{-f} + \frac{\varepsilon}{1-f}\mathrm{H}^{1-f}.$$

En substituant cette valeur de $\varkappa$, on verra que la valeur de s qui en résulte est plus grande que celle de l'art. (779) d'une quantité égale à $\sigma h^{\frac{\mathrm{B}'}{\mathrm{O}'}-1}\mathrm{H}^{1-\frac{\mathrm{B}'}{\mathrm{O}'}}$. Lorsque le rapport $\frac{\mathrm{B}'}{\mathrm{O}'}$ est grand, cet excès devient, en peu de temps, presque nul ; mais, à la rigueur, il ne s'évanouit jamais.

Solution du second cas.

788. Pour résoudre le second cas, il faut reprendre l'équation de l'art. (764), où entre la pression Q qu'on supposera constante pendant toute la durée du mouvement. Cette équation, traitée comme l'a été celle de l'art. (767) qui en dérive, donnera les relations entre les quantités variables.

789. Lorsqu'on pourra supposer que la pesanteur du fluide est nulle, ou qu'elle peut être négligée, les calculs se trouveront extrêmement simplifiés.

(*) Il faut se rappeller que toutes les citations de l'*Hydrodynamique* de M. l'abbé Bossut se rapportent à l'édition de 1786.

Digitized by Google

De l'écoulement des fluides par des orifices verticaux, de grandeur finie et de figure quelconque.

Moyen de ramener les recherches relatives à un orifice, à chaque point duquel la vîtesse varie, aux recherches relatives à un orifice, à tous les points duquel la vîtesse est la même.

790. Le cas du mouvement des fluides que nous allons considérer ne peut pas se déduire aussi immédiatement du problême général de l'art. (701) que les autres cas que nous avons traités précédemment; car nous avons supposé, dans ce problême, que la vîtesse du fluide étoit la même dans toute l'étendue de l'orifice; et cette hypothese ne peut être admise lorsque l'orifice est vertical et d'une certaine étendue. Cependant, quoique la vîtesse varie d'une partie de l'orifice à l'autre, comme cette vîtesse peut toujours être regardée, dans un instant déterminé, comme une fonction de la hauteur du fluide dans le vase, toutes les molécules qui se trouvent à la même hauteur, ou dans une même ligne horizontale, menée dans le plan de cet orifice, peuvent être censées avoir la même vîtesse. Il en est de même de toutes les molécules qui se trouvent dans un trapeze élémentaire, formé par deux lignes horizontales infiniment près, menées dans le plan de l'orifice; et voilà, par ce moyen, le cas de l'orifice à vîtesse variable ramené à celui de l'orifice à vîtesse constante.

On peut, par ce moyen, réduire l'écoulement, par des orifices verticaux, à l'écoulement par des orifices infiniment petits.

791. Pour pouvoir maintenant appliquer immédiatement le calcul à l'écoulement d'un fluide par un orifice vertical, il faut, à la propriété que nous venons d'exposer, en réunir une autre qui indique la relation entre la vîtesse dans chaque trapeze élémentaire, et la distance verticale de ce trapeze à la surface supérieure du fluide dans le vase. Cette seconde propriété se déduira de ce que nous avons dit art. (722), sur l'écoulement des fluides par des orifices infiniment petits, où l'on a vu que la vîtesse, à la sortie de ces orifices, étoit proportionnelle à la racine quarrée de leur distance verticale à la surface supérieure du fluide: nous adopterons ce rapport, ainsi que l'ont fait les meilleurs auteurs qui ont traité de l'hydraulique pratique, et nous aurons par-là toutes les données nécessaires pour établir nos calculs.

Réflexions sur cette maniere de considérer le mouvement des fluides.

792. On ne peut se dissimuler, et nous en avons déja prévenu (698), que cette maniere de considérer le mouvement des fluides, quoique fondée sur des considérations et des analogies très satisfaisantes, présente des choses hypothétiques sujettes à bien des difficultés. Mais il ne faut pas perdre de vue que, si on vouloit n'employer d'autres formules dans la pratique

Digitized by Google

que celles qui résultent de la théorie rigoureuse du mouvement des fluides, il faudroit absolument renoncer à toute application de l'hydraulique : on se convaincra bien de cette vérité par l'examen de cette théorie rigoureuse, qui sera exposée très clairement à la fin de cette section. D'un autre côté, les hypotheses que nous avons faites pour simplifier le calcul du mouvement des fluides, sont celles qui se rapprochent le plus de la nature; et en effet, l'expérience prouve que les formules qui en dérivent représentent assez bien les écoulements, ou au moins leur rapport : ainsi lorsque, dans le chapitre suivant, nous aurons appliqué à ces formules les corrections que comportent des expériences exactes et nombreuses, nous pensons qu'on pourra avec confiance s'en servir dans la pratique.

Recherche de la relation entre le temps et la quantité d'eau écoulée par un orifice vertical, le vase étant entretenu constamment plein.

793. Soit XV (*fig.* 152) le profil d'un vase de forme quelconque, et percé d'un orifice vertical dont le contour A*ts* est une courbe plane; menons une verticale SB, qui passe par le point A, supposé le point le plus élevé de l'orifice, et traçons les deux horizontales M'M, $m'm$, infiniment près l'une de l'autre.

La surface supérieure du fluide étant supposée en S, faisons SA $= h'$; SB $= h$; AP $= x$; M'M $= y$; la vîtesse que la pesanteur communique au bout d'une seconde ou de l'unité de temps $= \varphi$, et le temps $= t$. On a AB $= h - h'$, et P$p = dx$.

Proposons-nous d'abord de connoître quelle seroit la dépense de l'orifice pendant un temps déterminé T, en supposant que, pendant tout ce temps, le vase soit entretenu constamment plein jusqu'en S, et nommons s la dépense de la surface AM'M.

Puisque, d'après ce que nous avons dit plus haut (792), la vîtesse du fluide, dans le trapeze élémentaire M'Mmm', dont la surface est égale ydx, peut être considérée comme due à la hauteur PS, la dépense qui se fera par ce trapeze, pendant le temps t, sera (725),

$$tydx\sqrt{[2\varphi(h'+x)]}, \text{ ou } t\times ydx\sqrt{(h'+x)}\times\sqrt{2\varphi}.$$

Donc la dépense qui se fait pendant le temps t, par l'aire ou portion d'orifice AM'M, est égale à

$$t\,(\int ydx\sqrt{(h'+x)} + \text{A})\sqrt{2\varphi}.$$

Ainsi en prenant l'intégrale depuis A jusqu'en P, on aura pour la dépense cherchée,

Équation qui donne cette relation.

$$794\cdots\cdots s = t(\int ydx\sqrt{(h'+x)} + \text{A})\sqrt{2\varphi}.$$

Digitized by Google

Le temps peut toujours être exprimé en fonction d'une seule variable

795. Observons que, comme la nature de la courbe qui termine l'orifice est censée connue, on peut toujours substituer à y une fonction d'x, et qu'ainsi l'intégrale $\int y dx \sqrt{(h' + x)}$ peut toujours être ramenée à n'avoir d'autre variable que x; ensuite la constante A se détermine par la condition que, lorsque $x = 0$, la quantité de liqueur écoulée est nulle. Cette constante déterminée, pour avoir la dépense de tout l'orifice, c'est-à-dire depuis A jusqu'en B, il faut, dans l'expression qui donne la dépense de l'aire AM'M, substituer à x la valeur $AB = h - h'$.

Ce que c'est que la hauteur *moyenne* de l'eau au-dessus d'un orifice vertical, comment on détermine cette hauteur.

796. Soit s une hauteur telle que, si le fluide sortoit par tous les points de l'orifice avec une vîtesse due à cette hauteur, la dépense de cet orifice fût la même que celle qui a lieu naturellement, conformément à l'équation de l'art. (794); la vîtesse dont il s'agit sera (65), $\sqrt{2\varphi s}$: elle est considérée dans une étendue égale à $\int y dx$, dont, pendant le temps t, la dépense est exprimée par $t \int y dx \cdot \sqrt{2\varphi s}$; et puisque cette dépense doit être égale à la dépense ϵ, dont on a la valeur art. (794), égalant ces deux valeurs, il vient

$$t \int y dx \sqrt{2\varphi s} = t\left(\int y dx (h' + x)^{\frac{1}{2}} + A\right)\sqrt{2\varphi};$$

d'où on tire $s = \frac{\left(\int y dx (h' + x)^{\frac{1}{2}} + A\right)^2}{\left(\int y dx + B\right)^2}$.

L'intégrale $\int y dx$ du dénominateur doit être prise dans la même étendue que celle du numérateur, et la constante B se détermine par la condition que la surface est nulle quand $x = 0$.

797. Nous appellerons la quantité s qu'on vient de déterminer, *la hauteur moyenne de l'eau* au-dessus de l'orifice. On voit que la regle pour trouver cette hauteur se réduit à diviser la valeur de ϵ trouvée art. (794) par le produit fait de $t\sqrt{2\varphi}$ et de la surface de l'orifice, et à élever le quotient au quarré.

Recherche de la relation entre le temps et la quantité d'eau écoulée lorsque le vase se vuide sans recevoir de nouvelle eau.

798. Cherchons maintenant le rapport entre le temps et l'écoulement, en supposant que le vase se vuide, c'est-à-dire, déterminons, dans cette hypothese, la quantité de fluide qui s'écoulera pendant un temps donné : il est évident que cette détermination donnera en même temps l'abaissement du fluide dans le vase, dont la forme intérieure est censée connue, puisque la portion de sa capacité, qui devient vuide, est égale au volume de fluide écoulé.

Pour résoudre le problême, supposons qu'au commencement du mouvement la surface du fluide soit en S, qu'au bout du

Digitized by Google

temps donné t elle soit descendue en K, et faisons SK $= z$. Il s'agit d'avoir une équation entre z, t, φ, x, h et h'. Voici par quel artifice on y parviendra.

On supposera d'abord que le vase est entretenu constamment plein à la hauteur K pendant le temps t, et on trouvera, d'après ce qui est dit dans l'article précédent, pour la dépense pendant ce temps, la valeur $t(\int y\,dx\sqrt{(h'+x-z)}+\mathrm{A})\sqrt{2\varphi}$. Il faudra préliminairement intégrer cette expression, dans laquelle, comme on voit, z est supposée constante; déterminer la constante A par la condition que lorsque $x = 0$, la dépense est nulle, et prendre l'intégrale depuis A jusqu'en B, de la maniere exposée à l'article cité, c'est-à-dire en faisant $x = h - h'$.

La valeur de $t(\int y\,dx\sqrt{(h'+x+z)}+\mathrm{A})\sqrt{2\varphi}$, trouvée de la maniere qu'on vient d'exposer, ne renfermera plus que z et des quantités constantes; on supposera alors que le vase se vuide pendant l'élément de temps dt, et que la surface qQ s'abaisse en rR d'une quantité K$k = dz$; ce qui, en nommant S la section qQ du vase, donnera une dépense égale à $S\,dz$. Mais, dans cette hypothese, la descente Kk peut être censée avoir lieu avec une vîtesse uniforme, et la vîtesse à chaque point de l'orifice rester la même que lorsque le fluide étoit à la hauteur K; donc puisqu'à vîtesses égales, les dépenses doivent être proportionnelles au temps, on a l'analogie

$$t \times (\int y\,dx\sqrt{(h'+x+z)}+\mathrm{A})\sqrt{2\varphi} : S\,dz :: t : dt,$$

et l'équation

$$799\cdots\cdots dt = \frac{S\,dz}{(\int y\,dx\sqrt{(h'+x+z)}+\mathrm{A})\sqrt{2\varphi}},$$

qui, mise sous une forme finie, est

Équation qui donne cette relation.

$$800\cdots\cdots t = \frac{1}{\sqrt{2\varphi}}\int \frac{S\,dz}{\int y\,dx\sqrt{(h'+x-z)}+\mathrm{A}} + \mathrm{A}'.$$

La valeur du temps peut toujours y être exprimée en fonction d'une seule variable.

801. D'après la connoissance de la forme du vase, S est donnée en fonction de z et de constante; d'un autre côté, lorsque l'intégration indiquée au dénominateur est effectuée, comme on l'a dit plus haut (798), ce dénominateur ne contient pareillement que la quantité z et des constantes; ainsi toute la valeur de t peut être réduite à l'intégration d'une expression qui ne renferme d'autre variable que z. La constante A' se détermine par la condition que lorsque $z = 0$, on a en même temps $t = 0$.

802. Les intégrales qui, comme celles des art.(794, 800), ne renferment,

Digitized by Google

renferment, sous le signe d'intégration, qu'une variable et sa différentielle, peuvent toutes, comme on sait, être rapportées aux quadratures des courbes. En effet, soit X une expression composée de la variable x et de quantité constante, la différentielle $X dx$ sera l'élément de la surface d'une aire plane, terminée par une courbe dont X seroit l'ordonnée, x l'abscisse correspondante, et $\int X dx$ sera cette surface elle-même. Ainsi posant l'équation $y' = X$, et quarrant la courbe qu'exprime cette équation, depuis une certaine valeur de x jusqu'à une autre valeur de x, relatives à l'étendue que comporte l'intégrale, la surface trouvée sera la valeur de $\int X dx$, prise entre les limites convenables.

Réflexions sur les intégrales qui se rapportent aux quadratures, et sur la manière de les trouver par la méthode donnée dans la première section de cet ouvrage.

La méthode que nous avons donnée art. (223 et suiv.), pour toiser les aires planes, terminées par des courbes quelconques, peut être employée à l'espece d'intégration dont il s'agit; on a dû s'appercevoir, dans le cours de ce Traité, que cette méthode avoit des applications avantageuses dans bien des cas, et elle nous sera encore souvent utile dans la suite.

803. Nous allons donner quelques exemples de l'application des formules précédentes à différents cas particuliers, et nous commencerons par celle de l'art. (794), qui suppose le vase entretenu constamment plein.

804. Soit l'orifice un rectangle dont le côté supérieur, supposé horizontal, est égal à a; mettant cette valeur à la place d'y dans l'équation de l'article (794), et intégrant, il vient $s = ta \times \frac{2}{3}[(h' + x)^{\frac{3}{2}} + \Lambda] \sqrt{2\varphi}$. Déterminant la constante de la maniere indiquée article (795), on a $\Lambda = h'^{\frac{3}{2}}$. Cette valeur, substituée dans l'équation précédente, la change en $s = \frac{2}{3} at \sqrt{2\varphi}\,[(h' + x)^{\frac{3}{2}} - h'^{\frac{3}{2}}]$. Si on fait, ainsi qu'on l'a dit dans l'article cité, $x = h - h'$, afin d'avoir la dépense de tout l'orifice, et qu'on nomme E la dépense totale de cet orifice, on aura

Détermination de la quantité d'eau écoulée dans un temps donné, et réciproquement, par un orifice rectangulaire, le vase étant entretenu constamment plein, ainsi que de la hauteur moyenne du fluide dans le cas précédent.

805..... $\mathrm{E} = \frac{2}{3} at (h^{\frac{3}{2}} - h'^{\frac{3}{2}}) \sqrt{2\varphi}$.

806. Si on cherche la hauteur *moyenne* du fluide par la méthode exposée art. (797), on trouvera, par un calcul trop aisé pour le développer,

$$s = \frac{4(h^{\frac{3}{2}} - h'^{\frac{3}{2}})^2}{9(h - h')^2}.$$

807. Supposons l'orifice un triangle dont le sommet est le point le plus élevé, et dont la base est horizontale; k étant le

Les mêmes déterminations, dans le cas où

Digitized by Google

L'orifice est un triangle dont le sommet est le point le plus élevé et dont la base est horizontale.

rapport de la hauteur totale du triangle à sa base, on aura $y = kx$, et l'équation de l'art. (794) deviendra

$$\epsilon = t(\int kx\,dx\,(h' + x)^{\frac{1}{2}} + \mathrm{A})\sqrt{2\varphi}.$$

Faisons $h' + x = z$, on aura $dx = dz$, et $x = z - h'$; ce qui donnera $\int x\,dx\,(h' + x)^{\frac{1}{2}} = \int (z - h')\,z^{\frac{1}{2}}\,dz = \int (z^{\frac{3}{2}} - h'z^{\frac{1}{2}})\,dz = \frac{2}{5}z^{\frac{5}{2}} - \frac{2h'}{3}z^{\frac{3}{2}} + \mathrm{A} = \frac{2}{5}(h' + x)^{\frac{5}{2}} - \frac{2h'}{3}(h' + x)^{\frac{3}{2}} + \mathrm{A}$. L'intégrale s'évanouissant quand $x = 0$, on a $\mathrm{A} = -\frac{2}{5}h'^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}h'^{\frac{5}{2}} = \frac{4}{15}h'^{\frac{5}{2}}$, valeur de ϵ.

808..... $\epsilon = tk\left[\frac{2}{5}(h' + x)^{\frac{5}{2}} - \frac{2h'}{3}(h' + x)^{\frac{3}{2}} + \frac{4}{15}h'^{\frac{5}{2}}\right]\sqrt{2\varphi}$;

et lorsque $x = h - h'$, on a, pour la dépense totale de l'orifice,

809..... $\mathrm{E} = \frac{2tk\sqrt{2\varphi}}{15}\left[3h^{\frac{5}{2}} + 2h'^{\frac{5}{2}} - 5h'h^{\frac{3}{2}}\right]$.

810. On trouvera aisément que la surface du triangle est égale à $\frac{1}{2}(h - h')^2 k$; ce qui est la valeur de $\int y\,dx$, prise dans toute l'étendue du triangle. Ainsi

$$t\sqrt{2\varphi} \cdot \int y\,dx = tk\sqrt{2\varphi} \times \tfrac{1}{2}(h - h')^2;$$

et d'après ce qui a été dit art. (797), la hauteur *moyenne* de l'eau sera donnée par l'équation

811..... $s = \frac{16(3h^{\frac{5}{2}} + 2h'^{\frac{5}{2}} - 5h'h^{\frac{3}{2}})^2}{225(h - h')^4}$.

Cas où le sommet du triangle seroit en bas, et où la base horizontale formeroit la partie supérieure de l'orifice.

812. On peut supposer que le point le plus bas du triangle est son sommet, et que la base horizontale est au-dessus; on a, dans ce cas, $y = k(h - h' - x)$, et le calcul n'a pas plus de difficultés que celui de l'art. (807); on trouvera, en l'effectuant, que la dépense totale de l'orifice est donnée pour l'équation

$$\mathrm{E} = \frac{2tk\sqrt{2\varphi}}{15}(2h^{\frac{5}{2}} + 3h'^{\frac{5}{2}} - 5hh'^{\frac{3}{2}}).$$

813. On trouvera de plus, pour la hauteur moyenne de l'eau, l'équation

$$s = \frac{16(2h^{\frac{5}{2}} + 3h'^{\frac{5}{2}} - 5hh'^{\frac{3}{2}})^2}{225(h - h')^4}.$$

Les mêmes déterminations, lorsque l'orifice est circulaire.

814. Proposons-nous pour dernier exemple relatif à la formule de l'art. (794), de déterminer la dépense d'un orifice circulaire, et appellons a le diametre de cet orifice.

Digitized by Google

On a, d'après la propriété du cercle, $\frac{1}{2}y = \sqrt{(ax - xx)}$; ainsi l'équation de l'art. (794) se change en

$$t = 2t\sqrt{2\varphi}\int(ax - xx)^{\frac{1}{2}}(h' + x)^{\frac{1}{2}}dx + \mathrm{A}).$$

Faisons $\int(ax - xx)^{\frac{1}{2}}(h' + x)^{\frac{1}{2}}dx = \int z\,dx$, l'intégration se réduit à trouver l'aire de la courbe qui a pour équation $z = (ax - xx)^{\frac{1}{2}}(h' + x)^{\frac{1}{2}}$, à partir du point où $x = 0$. Supposons x divisée en quatre parties égales, on trouvera les cinq ordonnées correspondantes aux points de division, en substituant successivement dans l'équation $z = (ax - xx)^{\frac{1}{2}}(h' + x)^{\frac{1}{2}}$, pour x, les valeurs 0; $\frac{1}{4}x$; $\frac{1}{2}x$; $\frac{3}{4}x$; et x. Les valeurs de ces ordonnées trouvées, on évaluera la surface $\int z\,dx$, d'après la regle donnée art. (224); et multipliant la valeur de cette surface par $2t\sqrt{2\varphi}$, on aura

$$t = \left\{\begin{array}{l} 2\left(\frac{1}{4}ax - \frac{1}{16}xx\right)^{\frac{1}{2}}\left(h' + \frac{1}{4}x\right)^{\frac{1}{2}} \\ + \left(\frac{1}{2}ax - \frac{1}{4}xx\right)^{\frac{1}{2}}\left(h' + \frac{1}{2}x\right)^{\frac{1}{2}} \\ + 2\left(\frac{3}{4}ax - \frac{9}{16}xx\right)^{\frac{1}{2}}\left(h' + \frac{3}{4}x\right)^{\frac{1}{2}} \\ + \frac{1}{2}(ax - xx)^{\frac{1}{2}}(h' + x)^{\frac{1}{2}} \end{array}\right\}\frac{1}{3}xt\sqrt{2\varphi}.$$

815. Si on fait, dans l'équation précédente, $x = a = h - h'$, on aura pour la dépense totale de l'orifice, toutes réductions faites,

$$\mathrm{E} = ta^2\left[\frac{(h + 3h')^{\frac{1}{2}} + (h' + 3h)^{\frac{1}{2}}}{4\sqrt{3}} + \frac{1}{6}\left(\frac{h + h'}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\right]\sqrt{2\varphi},$$

formule aisée à calculer, que nous avons obtenue d'une maniere aussi courte et plus élémentaire que si nous eussions entrepris l'intégration rigoureuse, à laquelle on ne parvient qu'au moyen des suites infinies.

816. Si on suppose l'orifice infiniment petit, on aura $h = h'$, et

$$\mathrm{E} = ta^2\left[\frac{h^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{3}} + \frac{1}{6}h^{\frac{1}{2}}\right]\sqrt{2\varphi} = ta^2\sqrt{2\varphi h}\times\frac{2\sqrt{3}+1}{6} = 0{,}744\,a^2t\sqrt{\varphi h}.$$

Cas où l'orifice circulaire est infiniment petit.

Cette même dépense, évaluée d'après ce qui a été dit art. (728), seroit égale à $0{,}785\,a^2t\sqrt{2\varphi h}$, et plus forte que celle qu'on vient de trouver, d'environ $0{,}04$; mais en cela, la formule $\mathrm{E} = 0{,}744\,a^2t\sqrt{2\varphi h}$ s'approche plus de la vérité que celle de l'art. (728), ainsi qu'on le verra bientôt.

Digitized by Google

Cas où cet orifice est une portion de cercle.

817. On trouvera aisément, au moyen de la formule de l'art. (814), ce que deviendroit l'écoulement si l'orifice étoit une demi-circonférence terminée à sa partie inférieure par un diametre horizontal. Veut-on supposer que la demi-circonférence a le sommet en bas et le diametre horizontal à la partie inférieure ; alors il faut prendre l'équation rapportée au centre du cercle, $\frac{1}{2}y = \sqrt{(b^2 - x^2)}$, b étant le rayon, et la formule générale devient

$$t = 2t\sqrt{2\varphi}\,[\int (h^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}\,(h' + x)^{\frac{1}{2}}\,dx + \mathrm{A}].$$

La courbe à quarrer est $z = (b^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}\,(h' + x)^{\frac{1}{2}}$. Nous laissons au lecteur à achever le calcul, qui, comme on voit, n'a aucune difficulté.

818. La surface de l'orifice circulaire, dont le diametre est a, est égale à $0,785\,a^2$, ou à-peu-près, $\frac{3}{4}a^2$; divisant la valeur de E donnée à l'art. (815), par $\frac{3}{4}a^2 t\sqrt{2\varphi}$, et élevant le quotient au quarré, on aura, d'après la regle de l'art. (797), la hauteur moyenne s de l'eau. Cette valeur, considérée relativement à l'orifice infiniment petit, auquel cas $h = h'$, donne $s = h$, à très peu près.

Valeur de la dépense d'un orifice circulaire, et de la haut. moyenne de l'eau, exprimée par une suite infinie.

819. Si on nomme b le rayon de l'orifice, n le quotient de la distance du centre de cet orifice à la surface supérieure de l'eau, divisée par b, et π le rapport de la circonférence au diametre, la valeur de E, déduite rigoureusement de l'art. (794), sera $\mathrm{E} = \pi t b^2\sqrt{(2\varphi b n)}\,(1 - \frac{1}{3.2n^2} - \frac{5}{1024n^4} - \text{etc.})$, les trois premiers termes de la suite infinie suffisant pour les plus grandes approximations toutes les fois que la surface de l'eau ne descendra pas plus bas que le haut de l'orifice.

820. La hauteur moyenne de l'eau sera, d'après l'équation précédente, $s = bn\,(1 - \frac{1}{16n^2} - \frac{9}{1024n^4} - \text{etc.})$ (Voyez l'*Hydrodynamique* de M. l'abbé Bossut, tome I, page 274).

Réflexion sur les hauteurs moyennes de l'eau, trouvées précédemment.

821. On observera, en général, que les hauteurs moyennes de l'eau, trouvées précédemment, sont moindres que les distances des centres de gravité des orifices à la surface supérieure de l'eau ; mais qu'à mesure que ces distances augmentent, elles s'approchent d'être égales aux hauteurs moyennes.

Application à un vase prismatique, de la formule qui donne la relation entre le temps et la

822. Donnons un exemple de l'application de la formule de l'art. (800), qui donne la quantité z dont l'eau s'abaisse, pendant un temps donné t, dans un vase qui se vuide sans recevoir de nouvelle eau. Supposons que le vase est un prisme

Digitized by Google

vertical, et que l'orifice est un parallélogramme ; la section S du vase, et la largeur y de l'orifice, seront deux quantités constantes.

quantité d'eau écoulée, lorsque le vase se vuide sans recevoir de nouvelle eau.

D'après la méthode exposée art. (798), on cherchera d'abord la quantité d'eau qui s'écouleroit par l'orifice pendant le temps t, en supposant l'eau entretenue constamment à la hauteur $h' - z$, au-dessus du côté supérieur de l'orifice ; et pour cela, on intégrera l'expression $y\int dx\,(h' + x - z)^{\frac{1}{2}}$, en supposant z constante ; ce qui donnera, pour la dépense cherchée, $\frac{2}{3}y\,(h' + x - z)^{\frac{3}{2}} + A$. Cette quantité étant nulle quand $x = 0$, on a $A = -\frac{2}{3}y\,(h' - z)^{\frac{3}{2}}$, et l'intégrale complete est $\frac{2}{3}y\,[(h' + x - z)^{\frac{3}{2}} - (h' - z)^{\frac{3}{2}}]$. Pour avoir cette intégrale dans toute l'étendue de l'orifice, il faut faire $x = h - h'$, et dans ce cas elle deviendra $\frac{2}{3}y\,[(h - z)^{\frac{3}{2}} - (h' - z)^{\frac{3}{2}}]$. Substituant cette valeur à la place de $\int y\,dx\,(h' + x - z)^{\frac{1}{2}} + A$ dans l'équation de l'art. (800), elle devient

$$t = \frac{3S}{2y\sqrt{2g}} \int \frac{dz}{(h - z)^{\frac{3}{2}} - (h' - z)^{\frac{3}{2}}}.$$

Nommons a la hauteur de l'orifice, b sa base, et Ψ la distance de la surface supérieure du fluide à la partie inférieure de l'orifice, on aura $\Psi = h - z$; $dz = -d\Psi$; $h = h' + a$; $h' = \Psi - a$; et l'équation précédente deviendra

$$t = \frac{-3S}{2b\sqrt{2g}} \cdot \int \frac{d\Psi}{\Psi^{\frac{3}{2}} - (\Psi - a)^{\frac{3}{2}}}.$$

La quantité qui, dans cette équation, se trouve sous le signe d'intégration, est susceptible de devenir rationnelle, et par conséquent de donner une intégrale finie : mais l'équation deviendroit compliquée. On parviendra très aisément à un résultat, en quarrant par approximation la courbe qui, pour chaque valeur de Ψ, auroit une ordonnée égale à $\frac{1}{\Psi^{\frac{3}{2}} - (\Psi - a)^{\frac{3}{2}}}$, de la même maniere qu'on l'a fait article (814) ; et observant que, lorsque $\Psi = h$, $t = 0$, la surface pourra être comptée depuis $\Psi = h$ jusqu'à $\Psi = a$, c'est-à-dire jusqu'à la partie supérieure de l'orifice ; comme, par cette méthode, on n'a, pour ainsi dire, que des termes à transcrire, nous nous dispenserons de placer ici l'équation finie.

823. La théorie que nous avons exposée dans les chapitres précédents contient ce qui est nécessaire pour résoudre toutes

Digitized by Google

les questions de l'écoulement des fluides, en admettant les différentes hypotheses dont nous avons parlé plusieurs fois, hypotheses qui ont été admises par les meilleurs auteurs d'hydraulique, et sans lesquelles, nous le répétons, il faudroit renoncer à toute application de la théorie des fluides. Nous allons maintenant parler des expériences qui servent à rectifier les résultats donnés par cette théorie, pour les écoulements par de petits orifices, afin d'avoir des formules corrigées qui puissent être appliquées à la pratique de l'hydraulique.

Expériences faites sur l'écoulement de l'eau qui sort par des orifices ou par des tuyaux, de vases, soit entretenus constamment pleins, soit se vuidant librement.

Pourquoi, près de l'orifice, la vîtesse des molécules fluides n'est pas la même dans toute l'étendue d'une section horizontale.

824. Il résulte de ce que nous avons dit (702), que, si un fluide s'écoule d'un vase par un orifice horizontal, la vîtesse des molécules comprises dans une section horizontale, peu distante de l'orifice, n'est pas la même dans tous les points de cette section, et qu'elle doit être beaucoup plus grande dans les parties qui répondent verticalement à l'orifice, que dans celles qui s'éloignent de la projection orthogonale faite de cet orifice sur la section horizontale dont on parle.

On peut, sans prétendre donner une explication complete de tous les phénomenes relatifs au mouvement des fluides, se rendre néanmoins raison, jusqu'à certain point, tant de cette différence de vîtesse, que des effets qui en résultent. Pour cela, il faut considérer que les molécules fluides ont une tendance commune à se mouvoir vers l'orifice : celles qui ne sont pas placées verticalement au-dessus de cet orifice, sont obligées de s'y rendre par des directions plus ou moins obliques. Leur vîtesse peut donc être décomposée en deux autres, l'une horizontale, en vertu de laquelle elles se meuvent parallèlement à l'orifice, et l'autre verticale, en vertu de laquelle elles s'approchent du plan horizontal dans lequel est cet orifice, chacune de ces deux vîtesses composantes étant plus petite que la vîtesse absolue de la molécule. Une pareille décomposition doit avoir lieu pour une partie des molécules qui sont placées verticalement au-dessus de l'orifice, à cause de l'action des molécules voisines : cependant on conçoit que la composante horizontale doit être moindre, et la composante verticale plus grande pour ces dernieres que pour les premieres, tellement qu'on peut supposer qu'il y en a qui tendent à l'orifice sans

Digitized by Google

déviation, et s'en approchent avec toute leur vîtesse absolue.

825. On s'est assuré, par l'expérience, que ces différents phénomenes avoient réellement lieu : de petits corps, spécifiquement plus pesants que l'eau, sont tombés verticalement jusqu'à une distance d'environ trois ou quatre pouces du plan de l'orifice ; là, ils se sont détournés de cette direction, et sont venus se rendre à l'orifice, en décrivant des courbes plus ou moins obliques, suivant qu'ils en étoient plus ou moins éloignés. Voyez l'*Hydrodynamique* de Daniel Bernoulli, sect. IV, §. III ; et l'*Hydrodynamique* de M. l'abbé Bossut, tome II, page 3.

Expériences qui prouvent la convergence des molécules fluides vers l'orifice.

826. Les molécules qui arrivent de l'orifice sont donc réellement animées de différentes vîtesses, dans différentes directions, relatives aux différentes courbes qu'elles ont parcourues pour y arriver. On conçoit aisément, d'après cela, qu'elles ne doivent pas parvenir toutes en même temps à une distance déterminée de cet orifice ; et comme la petite adhésion qu'elles ont entre elles, provenant de la viscosité du fluide, les empêche de se séparer, le diametre du jet doit diminuer graduellement jusqu'à une certaine distance de l'orifice, et la colonne fluide, que nous nommerons *veine fluide*, doit affecter jusqu'à cette distance la forme d'une pyramide ou d'un cône tronqué dont l'orifice forme la plus grande base.

Diminution qui doit résulter de cette convergence dans le diametre du jet.

827. C'est encore ce dont on s'est assuré par l'expérience : on a reconnu que la surface de la section de la veine fluide étoit, à une certaine distance, plus petite que la surface de l'orifice. Cette diminution est très sensible lorsque l'orifice est percé dans une mince paroi : elle est moindre lorsqu'il y a un tuyau additionnel assez long pour que l'eau puisse en sortir à plein tuyau ou à gueule-bée, mais toujours assez grande pour qu'on doive y avoir égard dans la mesure des écoulements.

Expériences qui prouvent que cette diminution a lieu.

828. La diminution de la surface de la section de la veine fluide est ce qu'on appelle *la contraction de la veine fluide*.

Ce qu'on appelle *contraction* de la veine fluide.

829. La contraction a lieu non seulement pour les orifices horizontaux, mais pour les orifices inclinés d'une maniere quelconque : on peut s'en rendre raison, *à priori*, par des raisonnements à-peu-près semblables à ceux que nous avons appliqués aux orifices horizontaux ; mais en ne regardant ces raisonnements, ainsi que nous avons fait, que comme des explications propres à rendre raison, jusqu'à un certain point seulement, de divers effets sur lesquels l'expérience seule doit ultérieurement nous éclairer.

Cette contraction a lieu, quelle que soit l'inclinaison de l'orifice.

Digitized by Google

Distance de l'orifice à la plus grande contraction de la veine.

830. Lorsque l'orifice est circulaire, sa distance à la plus grande contraction, ou à la plus petite section de la veine fluide, est à-peu-près égale au demi-diametre de cet orifice.

Influence qu'ont sur la contraction la paroi du vase et la position de l'orifice par rapport aux côtés du vase.

831. Le rapport de la surface de la section de la veine fluide, à l'endroit de la plus grande contraction, à la surface de l'orifice, ne dépend pas beaucoup de la figure de l'orifice; mais ce rapport subit des variations auxquelles on doit avoir égard lorsque la paroi du vase est plus ou moins épaisse, ou que l'on adapte à l'orifice un tuyau additionnel : nous examinerons ces différents cas.

832. La situation de l'orifice, par rapport aux côtés du vase, influe aussi certainement sur la contraction : car on conçoit aisément que l'orifice, suivant les différentes formes du vase, peut être placé de maniere que les filets d'eau y affluent plus directement et avec le moins de déviation possible; mais ces différences peuvent être négligées dans la pratique.

Il faut, dans les différents cas, substituer à la surface réelle de l'orifice la surface de la plus petite section de la veine fluide.

833. La conclusion des faits et des raisonnements précédents est que, pour avoir des formules qui puissent donner des résultats applicables à la pratique, il faut, dans les différents cas, substituer à la surface réelle de l'orifice la surface de la plus petite section de la veine fluide. On regardera cette section de plus petite contraction, comme le vrai orifice par lequel se fait l'écoulement, et sa distance verticale à la surface supérieure du fluide sera considérée comme la hauteur due à la vîtesse dans le cas des petits orifices.

Il s'agit à présent de voir quel rapport on peut adopter, d'après les expériences faites, entre la surface de la section de plus petite contraction et celle de l'orifice. Nous allons considérer d'abord les écoulements à travers de minces parois, et ensuite ceux par des tuyaux additionnels, dont la longueur est très petite par rapport à la hauteur de l'eau dans le réservoir.

Expériences propres à donner le rapport entre ces deux surfaces, pour les orifices percés dans de minces parois.

834. M. l'abbé Bossut, qui a fait des expériences nombreuses et exactes, tant sur le mouvement que sur la résistance des fluides, donne, dans son *Hydrodynamique* (tome II, page 47), la table suivante, relative aux petits orifices percés dans de minces parois, à laquelle nous avons ajouté la quatrieme colonne, qui exprime le rapport entre les résultats de l'expérience et ceux de la théorie.

Hauteurs

Hauteurs constantes de l'eau dans le réservoir, exprimées en pieds.	Dépenses théoriques en 1 minute, par un orifice circulaire de 1 pouce de diametre, exprimées en pouces cubes.	Dépenses effectives, pendant le même temps, par le même orifice, exprimées aussi en pouces cubes.	Rapport des dépenses effectives aux dépenses théoriques.
1	4381	2722	0,62133
2	6196	3846	0,62073
3	7589	4710	0,62064
4	8763	5436	0,62034
5	9797	6075	0,62010
6	10732	6654	0,62000
7	11592	7183	0,61965
8	12392	7672	0,61911
9	13144	8135	0,61892
10	13855	8574	0,61883
11	14530	8990	0,61873
12	15180	9384	0,61819
13	15797	9764	0,61810
14	16393	10130	0,61795
15	16968	10472	0,61716

On voit d'abord, par cette table, que les dépenses effectives sont, ainsi que les dépenses théoriques, sensiblement proportionnelles aux racines quarrées des hauteurs. Prenons pour exemple les hauteurs 4 et 9, dont les racines sont dans le rapport de 2 : 3; les dépenses correspondantes prises dans la troisieme colonne sont 5436 et 8135, nombres dont le rapport est aussi, à très peu de chose près, celui de 2 : 3.

Ces expériences prouvent que, pour les petits orifices, les rapports des dépenses observées sont sensiblement les mêmes que ceux des dépenses calculées.

M. l'abbé Bossut a reconnu de plus que, sous une même hauteur d'eau, les dépenses étoient proportionnelles aux aires des orifices; ainsi il est constant que, pour les petits orifices, les dépenses effectives sont, ainsi que les théoriques, à peu de chose près, en raison composée des racines quarrées des hauteurs et des surfaces des orifices.

835. D'après cela, il doit y avoir un rapport sensiblement constant entre les produits effectifs et les produits théoriques pour une hauteur d'eau et une ouverture de petit orifice quelconques. On voit, par la table précédente, que ce rapport ne s'éloigne pas de 0,62, qui differe peu de la fraction $\frac{5}{8}$. Cette fraction est donc, d'après les notions établies précédemment (833), le nombre par lequel il faut multiplier la surface réelle de

Nombre par lequel il faut multiplier la surface de l'orifice pour avoir la section de plus grande contraction.

Digitized by Google

l'orifice pratiqué au vase, afin d'avoir la surface de la section de la veine fluide à l'endroit de sa plus grande contraction, qu'on substituera à la valeur de l'orifice dans la formule de l'art. (726).

Formules corrigées pour l'écoulement de l'eau par un petit orifice.

836. Ainsi lorsque le vase est entretenu constamment plein, h étant la hauteur de l'eau, et ω un petit orifice, la formule corrigée, pour avoir la dépense effective Q pendant un temps t, est $Q = 0{,}62\ \omega t\sqrt{2\varphi h}$, ou comme $\sqrt{2\varphi} = 7{,}77125$,

$$Q = 4{,}818 \cdot \omega t\sqrt{h}.$$

Q exprime des pieds cubes; ω des pieds quarrés; h des pieds-de-roi, et t des secondes de temps. Il faut observer que lorsque l'orifice sera circulaire, a étant son diametre; on aura $\omega = 0{,}7853982 \cdot a^2$; ce qui change la formule en $Q = 3{,}7842\, a^2 t\sqrt{h}$.

837. On tire de l'équation $Q = 4{,}818 \cdot \omega t\sqrt{h}$,

$$\omega = \frac{Q}{4{,}818 \cdot t\sqrt{h}};\ t = \frac{Q}{4{,}818\,\omega\sqrt{h}},\ \text{et}\ h = \frac{Q^2}{(4{,}818\,\omega t)^2}.$$

Moyen de donner à ces formules une plus grande précision encore que celle nécessaire pour la pratique.

838. Les formules précédentes peuvent être appliquées à presque tous les cas de la pratique; mais lorsqu'on voudra une plus grande précision, il faudra, au coëfficient 0,62, substituer le nombre de la quatrieme colonne de la table de l'art. (834) qui se rapporte à la hauteur d'eau qu'on a, ou qui en approche le plus. Supposons qu'on veuille avoir la dépense, en 8 minutes ou 480 secondes, d'un orifice de 16 lignes, ou 0,11111 pieds de diametre, sous une hauteur d'eau de 11 pieds six pouces. Je prends, dans la quatrieme colonne de la table, le nombre 0,61873, qui est vis-à-vis la hauteur de 11 pieds; et au lieu de la formule $Q = 0{,}62\ \omega t\sqrt{2\varphi h}$, j'ai la formule

$$Q = 0{,}61873\ \omega t\sqrt{2\varphi h},$$

qui, en substituant la valeur $0{,}7854 \times (0{,}11111)^2$ de ω, ainsi que celles de t, φ et h, devient.

$$Q = 0{,}61873 \times 0{,}7854 \times (0{,}11111)^2 \times 480 \times \sqrt{(2 \times 30{,}196 \times 11{,}5)}$$
$$= 75{,}889 \text{ pieds cubes.}$$

Des corrections relatives à la différente grandeur des orifices.

839. Il y auroit encore quelques considérations à faire relativement à la différente grandeur des orifices; mais la correction qu'elles comportent doit être comptée pour rien dans la pratique, tant que les orifices peuvent être censés infiniment petits: nous en parlerons néanmoins dans une autre circonstance,

Digitized by Google

et nous allons passer aux écoulements par des tuyaux additionnels dont la longueur est très petite par rapport à la hauteur de l'eau dans le réservoir.

840. On trouve dans l'ouvrage précédemment cité, de M. l'abbé Bossut, la table suivante, à laquelle nous avons ajouté, comme à celle de l'art. (834), la quatrieme colonne, qui exprime le rapport entre les résultats de l'expérience et ceux du calcul.

Expériences relatives à l'écoulement par un petit orifice auquel est adapté un petit tuyau.

Hauteurs constantes de l'eau dans le réservoir au-dessus de l'orifice extérieur du tuyau, exprimées en pieds.	Dépenses théoriques en une minute, par un orifice d'un pouce de diametre, exprimées en pouces cubes.	Dépenses effectives, pendant le même temps, par un tuyau cylindrique qui a un pouce de diametre et deux pouces de longueur, exprimées aussi en pouces cubes.	Rapport des dépenses effectives aux dépenses théoriques
1	4381	3539	0,81781
2	6196	5002	0,80729
3	7589	6126	0,80724
4	8763	7070	0,80681
5	9797	7900	0,80638
6	10732	8654	0,80638
7	11592	9340	0,80573
8	12392	9975	0,80496
9	13144	10579	0,80485
10	13855	11151	0,80483
11	14530	11693	0,80477
12	15180	12205	0,80403
13	15797	12699	0,80390
14	16393	13177	0,80382
15	16968	13620	0,80270

841. En comparant cette table avec celle de l'art. (834), on voit que les dépenses effectives sont constamment plus grandes, et que le rapport moyen des dépenses effectives, par de petits tuyaux additionnels, aux dépenses par des orifices percés dans de minces parois, toutes les circonstances étant les mêmes, est celui de 81 : 62, à très peu de chose près. Ceci confirme ce que nous avons dit (831) sur la variation de la contraction dans les orifices auxquels on adapte un tuyau. Au reste, les dépenses faites par le même orifice sont toujours sensiblement proportionnelles aux racines quarrées des hauteurs; et comme, par des expériences rapportées dans l'ouvrage ci-dessus cité,

Valeur de la plus grande contraction, déduite de ces expériences, qui prouvent de plus que les dépenses observées sont entre elles dans le même rapport que les dépenses calculées.

Digitized by Google

on a reconnu que, sous la même hauteur, ces dépenses sont proportionnelles aux surfaces des orifices; nous n'aurons d'autre changement à faire à la formule qui donne les dépenses théoriques, que celui de multiplier la surface de l'orifice par le nombre 0,81; ce qui donnera la formule suivante analogue à celle de l'art. (837), $Q = 0,81\ \omega t\sqrt{2\varphi h}$.

Formules corrigées pour l'écoulement par un petit tuyau additionnel.

842. Comme, dans le cas d'un tuyau additionnel, ω exprime presque toujours l'aire d'un cercle; nommant a le diametre de ce cercle, on aura $\omega = 0,7853982\ a^2$; ce qui, en faisant attention que $\sqrt{2\varphi} = 7,77125$, donne $Q = 4,9438 \cdot a^2 t\sqrt{h}$.

843. On tire de-là, comme à l'art.(837),

$$a = \sqrt{\left(\frac{Q}{4,9438\, t\sqrt{h}}\right)};\ t = \frac{Q}{4,9438 \cdot a^2\sqrt{h}},\ \text{et}\ h = \frac{Q^2}{(4,9438 \cdot a^2 t)^2}.$$

Moyen de donner à ces formules une plus grande précision encore que celle nécessaire pour la pratique.

844. Ces formules suffiront dans presque tous les cas qu'offre la pratique: mais si l'on veut une plus grande exactitude, il faut suivre la méthode indiquée et appuyée d'un exemple, art. (838), c'est-à-dire substituer dans la formule $Q = 0,81 \cdot \omega t\sqrt{2\varphi h}$, au coëfficient moyen 0,81, le coëfficient que comporte la hauteur d'eau, et qu'on trouvera dans la quatrieme colonne de la table.

Cas où l'eau ne sort pas à plein tuyau.

845. Tout ce que nous venons de dire sur les dépenses par les tuyaux additionnels suppose que l'eau en sort à plein tuyau ou à gueule-bée: mais si le tuyau est trop petit pour que l'eau puisse, avant de sortir, couler le long de sa paroi; alors les circonstances de l'écoulement seront les mêmes que s'il n'y avoit pas de tuyau, et il faudra évaluer la dépense d'après la formule de l'art.(837).

846. Il paroît, d'après les expériences de M. l'abbé Bossut, que, pour que l'eau puisse suivre la paroi du tuyau, il faut que la longueur de ce tuyau soit au moins double de son diametre.

Diminution de vîtesse dans les tuyaux additionnels dont l'eau sort à gueule-bée.

847. La contraction de la veine fluide, lorsque l'eau sort à gueule-bée, ayant toujours lieu dans le tuyau, près de son ouverture intérieure, et le fluide affectant sensiblement, à sa sortie, la forme cylindrique, il n'y a plus de contraction au-delà de ce tuyau, et les molécules comprises dans la section faite à son extrémité extérieure peuvent, à peu de chose près, être censées avoir toutes des vîtesses égales et des directions paralleles (*). Si on veut donc évaluer la dépense, en employant

(*) Il est vraisemblable, ainsi que l'observe M. le chevalier du Buat, que le filet central conserve encore plus de vîtesse que ceux qui sont plus près des bords de l'orifice; mais cet

Digitized by Google

cette section extrême du tuyau, et la vîtesse commune des molécules qu'elle contient, on doit trouver cette vîtesse moindre que celle due à la hauteur du fluide. L'expérience confirme cette assertion : car, comme nous le verrons dans la suite, les jets d'eau qui sortent par des tuyaux additionnels, s'élevent moins haut que ceux qui sortent par des orifices percés dans de minces parois.

Pourquoi, avec plus de vîtesse, les minces parois donnent un moindre produit.

848. D'après cette observation, les écoulements qui se font par des orifices percés dans de minces parois ont l'avantage d'une plus grande vîtesse : mais ils perdent plus par l'excès de contraction de la veine fluide qu'ils ne gagnent par l'augmentation de vîtesse ; et voilà pourquoi leur dépense est moindre.

Expériences propres à faire connoître la relation entre la dépense des tuyaux coniques et celle des tuyaux cylindriques.

849. Nous avons supposé jusqu'à présent que le tuyau étoit cylindrique : si on fait varier cette forme, on fera, toutes choses égales d'ailleurs, varier les produits. On peut juger de cette variation par des expériences décrites dans le Traité *de Castellis* de M. Poleni, et rapportées dans l'*Hydrodynamique* de M. l'abbé Bossut. Ces expériences ont eu pour objet de comparer les produits d'un orifice percé dans une mince paroi, d'un tuyau cylindrique, et de quatre tuyaux coniques : leurs résultats sont présentés dans la table suivante.

			Diametre intérieur.	Diametre extérieur.	Produit en une minute, exprimé en pouces cubes.
Hauteur constante de l'eau dans le réservoir, 256 lignes, ou 1 pied 9 pouces 4 lignes.	Longueur de chaque tuyau, 92 lignes, ou 7 pouces 8 lignes.	Orifice percé dans une mince paroi...	26 lig.	26 lig.	15877
		Tuyau cylindrique.	26	26	23434
		1er tuyau conique...	33	26	24758
		2e tuyau conique...	42	26	24619
		3e tuyau conique...	60	26	24345
		4e tuyau conique...	118	26	23687

Nous ne discuterons pas les valeurs absolues des produits rapportés dans la derniere colonne de la table précédente : le premier, qui est de 15877 pouces cubes, ou 9,1881 pieds cubes, devroit être, d'après la formule $Q = 4{,}818\,\omega t\sqrt{h}$, (337), égal à $4{,}818 \times 0{,}7854 \times (0{,}18056)^2 \times 60 \times \sqrt{(1{,}7778)} = 9{,}8696$ pieds cubes (*); mais on peut toujours juger, par la relation entre

excès de vîtesse ne doit pas être aussi grand que dans le cas d'une mince paroi ; il diminue à mesure qu'on alonge le tuyau, et disparoît entièrement lorsque ce tuyau a une certaine longueur.

(*) M. l'abbé Bossut soupçonne que l'étalon dont s'est servi M. Poleni étoit défectueux par excès.

Digitized by Google

La forme conique des tuyaux favorise l'écoulement tant que l'évasement ne passe pas certaines bornes ; cet écoulem. est cependant toujours moindre que la dépense théorique.

les produits, que la forme conique favorise l'écoulement tant que l'évasement ne passe pas par certaines bornes : car, comme le remarque M. l'abbé Bossut, si cet évasement étoit trop grand, il tendroit à produire une contraction extérieure, et à ramener l'écoulement à la classe de ceux qui se font par des orifices percés dans de minces parois. Au reste, la dépense par les tuyaux coniques est toujours moindre que la dépense théorique : car le premier tuyau de la table précédente, qui est celui dont la dépense est la plus forte, a donné 24758 pouces cubes, ou 14, 327 pieds cubes, en 60 secondes, et la dépense théorique calculée par la formule $Q = 6,1035\, a^2 t \sqrt{h}$, (728), donneroit

$$6,1035\,(0,18056)^2 \times 60 \times \sqrt{(1,7778)} = 15,918 \text{ pieds cubes.}$$

850. Nous ne nous étendrons pas davantage, dans ce moment-ci, sur les écoulements par des tuyaux additionnels : notre objet étoit seulement de faire voir quels changements apportent, dans la dépense, ceux dont la longueur est très petite par rapport à la hauteur de l'eau, et dans lesquels le frottement contre la paroi intérieure peut être supposé n'avoir pas d'influence sensible sur l'écoulement. Nous verrons dans la suite tout ce qui concerne l'écoulement de l'eau par de longs tuyaux. Passons aux vases qui se vuident librement par de petits orifices.

Obstacles à l'exactitude des expériences sur le temps de l'écoulem. total des vases qui se vuident librement.

851. Les expériences sur la durée de l'écoulement des vases qui se vuident librement n'ont pas pu se faire, au moins d'une maniere concluante, sur la durée de l'écoulement total de ces vases. On a éprouvé que lorsque l'eau étoit parvenue à une petite distance, comme de quelques pouces, pour un orifice horizontal, il se formoit au-dessus de cet orifice un enfoncement conique ou entonnoir, qui diminuoit le produit et mettoit de l'incertitude dans la fin de l'écoulement. On s'est donc borné à mesurer le temps de l'écoulement depuis une hauteur déterminée jusqu'à différentes hauteurs moindres que celles-là, mais assez grandes pour que l'entonnoir ne pût pas avoir lieu.

Formule corrigée qui donne le temps de l'écoulem. d'un vase qui se vuide librement.

852. Nous avons vu (733) que lorsque la hauteur primitive de l'eau, dans un vase prismatique, étoit égale à h, la section du vase étant S, le temps t que le fluide employoit à descendre d'une hauteur z se calculoit par l'équation

$$t = \frac{2S}{a\sqrt{2g}} \left[h^{\frac{1}{2}} - (h - z)^{\frac{1}{2}}\right].$$

Digitized by Google

Maintenant que nous savons qu'à l'orifice ω, supposé percé dans une mince paroi, il faut substituer l'orifice contracté $0,62\,\omega$, cette formule deviendra

$$t = \frac{2}{0,62 \times 7,7712} \cdot \frac{S}{\omega}\left[h^{\frac{1}{2}} - (h-z)^{\frac{1}{2}}\right] = 0,4151 \cdot \frac{S}{\omega}\left[h^{\frac{1}{2}} - (h-z)^{\frac{1}{2}}\right].$$

Cas où l'orifice est circulaire.

853. Lorsque l'orifice est circulaire, et son diametre égal à a, on a $\omega = 0,7854\,a^2$, et la formule devient

$$t = 0,52852\,\frac{S}{a^2}\left[h^{\frac{1}{2}} - (h-z)^{\frac{1}{2}}\right].$$

Expériences qui prouvent l'exactitude de cette formule.

854. Nous allons appliquer cette formule à des expériences faites par M. l'abbé Bossut, afin de comparer les résultats qu'elle donne aux résultats fournis par les expériences : le tout est compris dans le tableau suivant.

	Diametre de l'orifice circulaire horizontal, ou valeur de a.	Abaissement de l'eau, ou valeur de z.	Durée observée de l'abaissement de l'eau.	Durée de l'abaissement de l'eau, calculée par la formule de l'art. (853).
La section constante S, du vase, est de neuf pieds quarrés. La hauteur primitive h de l'eau est de 11,667 pieds.	pieds.	pieds.	secondes.	secondes.
	0,083333	4	445,5	443,04
		9	1224,5	1221,2
	0,16667	4	112	110,76
		9	306	305,25

On voit que la différence des résultats calculés, aux résultats observés, est extrêmement petite, sur-tout eu égard à toutes les circonstances qui peuvent faire varier les temps donnés par l'observation. Ainsi nous pouvons regarder les formules des art. (852 et 853), comme très suffisantes pour la pratique, en ayant égard aux observations de l'art. (851).

Comment les recherches précédentes s'appliquent aux orifices latéraux.

855. Ce que nous venons de dire s'applique principalement aux orifices horizontaux : mais, d'après la propriété énoncée art. (720), on peut encore l'appliquer aux orifices latéraux lorsque l'eau sera un peu plus élevée que le bord supérieur de l'orifice, en prenant pour la hauteur h de l'eau la distance du centre de gravité de l'orifice à la surface supérieure du fluide.

Conclusion de ce chapitre.

856. On voit, par tout ce que nous avons dit dans ce chapitre, comment l'expérience sert à modifier la théorie et à corriger les formules fondées sur des hypotheses qui, ou s'éloignent un peu de la nature, ou n'embrassent pas toutes les cir-

Digitized by Google

constances physiques qui se compliquent dans ses opérations. Les formules corrigées que nous avons données sont d'un usage très étendu dans la pratique, et nous aurons souvent occasion de nous en servir dans la suite de cet ouvrage. Nous donnerons avec le même détail, et à mesure que les matieres que nous aurons à traiter l'exigeront, ce qui nous reste à dire sur la théorie expérimentale du mouvement des fluides.

De la pression que l'eau exerce contre les parois des tuyaux dans lesquels elle se meut.

Difficultés d'appliquer la théorie à la détermination de l'épaisseur des tuyaux.

857. Les épaisseurs des tuyaux de conduite se déterminent, dans la pratique, par des regles déduites de l'expérience, et il n'est guere possible de les fixer autrement, vu la complication et la multitude des causes de destruction des matieres dont ces tuyaux sont composés. Il est cependant intéressant de se faire une idée de la pression qu'ils éprouvent par la seule action de l'eau, et nous allons, pour en donner un exemple, prendre un cas particulier de la formule de l'art.(710), qui contient la solution générale du problême.

Application de la formule générale de l'article (710) à la détermination de la pression d'un tuyau vertical.

858. Supposons le réservoir ABCD (*fig.* 157) entretenu constamment plein, au fond duquel est adapté le tuyau vertical *abcd*, percé d'un petit orifice q, et cherchons la pression qui s'exerce près de l'extrémité de ce tuyau, en supposant, d'après ce que nous avons dit art.(771), que le mouvement est parvenu à l'uniformité. Faisons $Hq = h$; la section horizontale st, qu'on peut regarder comme étant au niveau de cd, $= S$; l'orifice $q = O$; puisque cet orifice est supposé petit, la vîtesse de l'eau qui en sort sera égale à $\sqrt{2\varphi h}$; et puisque cette vîtesse est constante, sa différentielle est nulle. Faisant, d'après toutes ces données, dans la formule de l'art.(710), $\xi = 0$; $du = 0$; $z = h$; $P = 0$; $\frac{1}{2}u^2 = \varphi h$; cette formule devient

$$859 \cdots\cdots p = \varphi\left(h - \frac{O}{S}h\right),$$

équation qui exprime la pression qui s'exerce près de cd, rapportée à l'unité de surface. On voit que cette pression est égale au poids d'un prisme d'eau qui auroit l'unité de surface pour base, et pour hauteur $h\left(1 - \frac{O}{S}\right)$.

860. Puisque (719 et 720) la vîtesse de l'eau qui sort par un petit orifice se mesure par la racine quarrée du double de la pression,

Digitized by Google

sion, la vîtesse de l'eau qui sortiroit par un petit orifice vertical, pratiqué en s ou en t, seroit donc égale à

$$\sqrt{[2\varphi(h - \frac{O^2}{S^2}h)]}.$$

Vîtesse de l'eau qui sortiroit par un trou fait à ce tuyau.

861. Cette vîtesse est, comme on voit, toujours moindre que celle due à la hauteur entiere h, et ne lui devient égale que lorsque $O = o$, ou peut être négligé par rapport à S.

Cas où la pression devient nulle.

862. Lorsque $S = O$, la pression devient nulle, et par conséquent l'on n'auroit aucune vîtesse par un petit orifice latéral s ou t. Si donc, dans ce cas, on perçoit le tuyau dans l'un ou l'autre des points s ou t, il n'en sortiroit point d'eau.

Cas où l'orifice et le tuyau sont circulaires.

863. L'orifice et le tuyau étant supposés circulaires, et d et D étant leurs diametres, on a $\frac{O^2}{S^2} = \frac{d^4}{D^4}$, et l'équation de la pression devient $p = \varphi(h - \frac{d^4}{D^4}h)$.

Détermination de la pression lorsque le tuyau est horizontal.

864. Si le tuyau $abcd$, au lieu d'être vertical, étoit horizontal, comme dans la *figure* 158, la vîtesse à l'orifice q n'en seroit pas moins égale à $\sqrt{2\varphi h}$, (720), h étant, comme dans le cas précédent, la hauteur de l'eau au-dessus de l'orifice. La vîtesse de chaque tranche verticale, depuis ab jusqu'en dc, seroit exactement la même que dans le tuyau $abcd$ de la *figure* 157, et l'ouverture ab étant supposée (*fig.* 158) petite en comparaison de la hauteur AC, la pression, dans tout l'espace $abcd$, sera évidemment la même que la pression près de l'orifice cd (*fig.* 157), et aura par conséquent pour valeur

$$\varphi(h - \frac{d^4}{D^4}h).$$

Expériences de M. l'abbé Bossut sur la pression des tuyaux.

865. M. l'abbé Bossut a fait des expériences pour prouver que, lorsqu'on avoit $d = D$, la pression devenoit nulle. Nous les rapporterons, lorsque nous reviendrons sur cette matiere, avec tous les détails qu'exige la pratique.

Comment ce problême peut se résoudre d'une maniere très générale.

866. On voit qu'au moyen de la formule de l'art.(710), on peut résoudre la question d'une maniere bien plus générale que nous ne l'avons fait ici, même en supposant le mouvement parvenu à l'uniformité. On peut employer, dans ce cas, la formule approchée de l'art.(771), qui donne, pour la vîtesse, une valeur finie avec laquelle la valeur, donnée par l'équation de l'art.(770), se confond sensiblement au bout d'un temps assez court.

Digitized by Google

Du choc et de la résistance des fluides.

De la loi de continuité dans la communication du mouvem. en général ; l'action des fluides est toujours une pression

867. Nous avons vu, art.(440 et suiv.), que la nature ne dérogeoit jamais à la loi de continuité, dans la communication du mouvement, entre des corps de nature quelconque. Nous avons expliqué comment, lorsque deux masses viennent à se choquer, il y a toujours, quelle que soit leur dureté, un temps souvent très court, mais néanmoins appréciable (483), pendant lequel, pour arriver de la vîtesse qu'elles avoient avant le choc, à la vîtesse qu'elles doivent avoir après ce choc, elles passent par toutes les vîtesses intermédiaires. Cette propriété de la percussion ne se manifeste nulle part aussi sensiblement que dans les phénomenes relatifs au mouvement communiqué par les fluides aux corps soumis à leur action : elle n'est plus ici, comme dans le choc des corps solides, un phénomene qui échappe aux yeux, et dont le calcul peut seul constater l'existence ; les expériences qui peuvent nous le faire appercevoir n'ont aucune difficulté, et les occasions de les faire se présentent assez souvent. Ainsi l'action d'un fluide sur un corps et réciproquement, soit dans le cas du mouvement, soit dans celui de l'équilibre, est toujours une véritable pression, et nous substituerons le plus souvent ce mot à ceux de percussion, choc ou résistance.

Réflexion sur l'application de la théorie physico-mathématique de la percussion au choc des fluides ; pourquoi cette théorie n'y est pas applicable.

868. La théorie physico-mathématique de la percussion, que nous avons donnée art. (438 et suiv.), étant applicable à des corps de nature quelconque, il sembleroit que les loix du choc des fluides devroient dériver de cette théorie comme simples conséquences ; mais l'application qu'on en voudroit faire dans ce cas, seroit sujette à bien des difficultés. La dureté du fluide devant être supposée nulle par rapport à celle du corps qu'il choque, ou par lequel il est choqué, les différentes équations qui donnent la valeur de la force de percussion art.(451, 476, etc.), n'apprennent rien quand on y a introduit cette condition, quoique donnant néanmoins des résultats véritables. D'un autre côté, l'action d'un fluide sur un point d'une surface dépend non seulement de la vîtesse respective de la surface et du fluide, mais encore de la quantité dont le point qu'on considere est enfoncé dans le fluide ; circonstance étrangere aux questions traitées dans le chapitre cité.

Il est donc nécessaire que nous frayions une nouvelle route pour parvenir à la solution des problêmes relatifs au choc des

Digitized by Google

fluides, et en cela nous prendrons encore pour guide l'auteur de l'*Examen maritime*, etc., cité art. (223 et 444, *note*). Sa théorie a été confirmée par de très bonnes expériences, auxquelles il faut joindre l'examen de sa conformité reconnue avec la marche et les autres mouvements des vaisseaux : cette théorie a d'ailleurs l'avantage de présenter la discussion de la question, avec les différentes circonstances physiques que comporte cette question, d'en rendre raison, et cet avantage ne se trouve pas dans la théorie ordinaire. Ainsi, quoique quelques points de la doctrine que nous allons exposer puissent, comme toutes les autres parties de l'hydraulique, paroître sujets à des difficultés, nous croyons rendre un service aux lecteurs en l'exposant avec quelques détails, tant à cause de son utilité actuelle, que pour présenter un modele, dont l'examen réfléchi peut fournir des vues pour reculer les bornes de la science. Nous ne nous dispenserons pas néanmoins de parler aussi, avec l'étendue suffisante, de la théorie ordinaire du choc des fluides, et des expériences qui y ont rapport.

869. Les recherches qui vont suivre, et qui seront d'abord relatives aux fluides incompressibles et pesants, exigent que nous ayons recours aux formules qui donnent la vîtesse d'un fluide jaillissant par un petit orifice. Nous nous servirons d'abord de ces formules sans correction, vu que la correction qu'exige l'application à la pratique peut être appliquée ultérieurement, et une fois pour toutes, aux formules du choc des fluides dans lesquelles ces premieres auront été employées; ce qui, dans le cas dont il s'agit, rend les corrections partielles inutiles.

870. Nous avons vu (719) que ω étant un orifice infiniment petit, et h sa distance à la surface supérieure de l'eau, la vîtesse u, avec laquelle le fluide jailliroit par cet orifice, est égale à $\sqrt{2\varphi h}$, ou qu'on a $u^2 = 2\varphi h$.

Recherche d'une équation entre la pression d'une différencio-différentielle de surface, et la vîtesse avec laquelle le fluide jailliroit par cette différencio-différentielle.

Supposons cet orifice fermé par un plan ou lame plane; la portion de cette lame qui se trouvera dans le plan de l'orifice éprouvera une pression absolue p, égale à $\varphi\delta\omega h$ (557), δ étant la densité du fluide. Substituant dans cette expression, pour h, sa valeur $\frac{u^2}{2\varphi}$, tirée de l'équation précédente, il vient

871 . . . . . $p = \frac{1}{2}\delta\omega u^2$,

équation qui renferme la relation entre la pression qu'éprouve un élément différencio-différentiel de la paroi d'un vase, et la vîtesse avec laquelle le fluide tend à jaillir par cet élément de surface.

Digitized by Google

Valeur de la pression lorsque la différencio - différentielle se meut perpendiculairement à son plan

872. Qu'on imagine à présent que cet élément se meut perpendiculairement à son plan (*) avec une vîtesse v, et de maniere qu'il ne rencontre le fluide qu'à sa partie antérieure; ce qu'on peut concevoir, en supposant qu'il se meut dans un petit canal où le fluide ne peut entrer que d'un côté; alors le fluide tendra à jaillir avec une vîtesse $u \pm v$, suivant que l'élément de surface ira à la rencontre ou s'éloignera du fluide. Il faudra donc, pour ce cas, substituer dans l'équation $p = \frac{1}{2} \delta \omega u^2$, à la vîtesse u, la vîtesse $u \pm v$, ou $\sqrt{(2\varphi h)} \pm v$; ce qui donnera, pour la pression, l'équation

$$873 \cdots\cdots p = \tfrac{1}{2} \delta \omega \left[(2\varphi h)^{\frac{1}{2}} \pm v \right]^2.$$

Ce que devient cette équation lorsqu'on substitue à la pression une masse d'un poids équivalent.

874. Il faut se rappeller que p exprime un poids, c'est-à-dire (174) le produit de φ par une masse m; en sorte qu'on a $p = \varphi m$. Cette valeur, substituée dans l'équation précédente, donnera

$$m = \delta \omega \left(h^{\frac{1}{2}} \pm \tfrac{v}{\sqrt{2\varphi}} \right)^2.$$

Ce que devient cette équation lorsque la différencio-différentielle est un parallélogramme rectangle dont la base est horizontale.

875. Comme les valeurs précédentes ont lieu, quelle que soit la figure de la différencio-différentielle ω, on peut supposer qu'elle est un petit parallélogramme rectangle dont la base est horizontale et égale à l'incrément d'une ligne a, c'est-à-dire à da. Nommant f l'angle que fait avec l'horizon un des autres côtés, imaginant ce côté projeté orthogonalement sur un plan vertical qui passeroit par la base da, cette projection sera l'incrément de la hauteur verticale h; ainsi $\frac{dh}{\sin. f}$ sera la valeur du côté incliné à l'horizon du parallélogramme élémentaire, dont la surface sera $\frac{da \, . \, dh}{\sin. f} = \omega$; cette valeur, substituée dans l'équation de l'art. (874), la change en

$$876 \cdots\cdots m = \tfrac{\delta \, . \, da dh}{\sin. f} \left(h^{\frac{1}{2}} \pm \tfrac{v}{\sqrt{2\varphi}} \right)^2.$$

Valeur de la pression perpendiculaire à la différencio-différentielle, dans le cas où elle se meut obliquement à son plan.

877. Supposons maintenant que l'élément $\frac{da \, . \, dh}{\sin. f}$, étant toujours animé d'une vîtesse v, ne se meuve pas perpendiculairement à son plan, mais dans une direction qui fasse constamment un angle θ avec son plan; la vîtesse v, décomposée dans le sens de la perpendiculaire à l'élément, sera $v \sin. \theta$, et pour avoir la

(*) En parlant d'un élément différencio-différentiel de surface, nous entendrons toujours par *son plan* le plan dont cet élément fait partie.

Digitized by Google

pression dans le même sens, il faut, dans l'équation précédente, substituer $v \sin.\theta$, à v; ce qui donnera

878..... $m = \frac{\delta . da . dh}{\sin.f} \left(h^{\frac{1}{2}} \pm \frac{v \sin.\theta}{\sqrt{2g}} \right)^2$.

Nous désignerons, dans les articles qui vont suivre, par m, la pression perpendiculaire à l'élément différencio-différentiel; par m', la pression faisant un angle quelconque avec sa surface; par m'', la pression horizontale; et par m''', la pression verticale.

Valeur, dans le cas précédent, de la pression décomposée suivant une direction qui fait un angle quelconque avec le plan de la différencio-différentielle.

879. Pour décomposer la pression qu'exprime l'équation précédente dans une direction qui fasse un angle ε avec la surface de l'élément différencio-différentiel, il faut la multiplier par $\sin.\varepsilon$, et on aura

880..... $m' = \frac{\delta . da . dh . \sin.\varepsilon}{\sin.f} \left(h^{\frac{1}{2}} \pm \frac{v \sin.\theta}{\sqrt{2g}} \right)^2$.

Valeur de la même pression, dans laquelle on introduit la projection de la direction précédente sur un plan horizontal passant par la base inférieure horizontale de la différencio-différentielle et l'angle formé par cette projection, et par une perpendiculaire à la base inférieure prolongée de la différencio-différentielle.

881. Il sera utile de faire pour la direction ε ce que nous avons fait plusieurs fois lorsque nous avons considéré des directions de ligne dans l'espace, c'est-à-dire de lui substituer sa projection sur un plan horizontal, et l'angle que fait cette projection avec une ligne donnée de position dans le même plan horizontal.

Soit YAX, (*fig.* 159, n° 1), un plan horizontal passant par le côté inférieur Aa du petit rectangle différencio-différentiel dont on considere la pression. Soit ZAX, n° 3, un plan vertical perpendiculaire au côté aA, dans lequel se trouve l'autre côté AC du rectangle élémentaire, ce plan ZAX coupant le précédent YAX sur la ligne AX qui leur est commune. Soit enfin AB, n° 1, la projection orthogonale de la direction ε, et AKC, n° 2, un plan vertical passant par AB, n° 1, dans lequel AK est la ligne qui fait l'angle ε avec le plan différencio-différentiel, et AC la coupe de ce plan sur la ligne AB, la ligne dénommée AB, n°s 1 et 2, étant l'intersection commune de ces deux plans.

Cela posé, les angles à substituer à l'angle ε sont, 1°. l'angle KAB, n° 2, que forme la direction ε avec l'horizontale AB, ou avec le plan YAX, lequel angle a toujours été nommé σ, (257 et suiv.); 2°. l'angle BAX, n° 1, que forme, avec l'axe AX, la projection AB, n° 1, de la direction AK, n° 2, angle que nous sommes accoutumés à désigner par Ψ, (253).

La ligne AK, n° 2, étant projetée en AK, n° 3, si on abaisse la perpendiculaire KN sur le côté AC, cette perpendiculaire sera égale à celle menée de la ligne AK, considérée dans l'es-

Digitized by Google

pace, sur le rectangle qui a aA, n° 1, pour base, et AC, n° 3, pour hauteur. On aura donc la proportion 1 : sin.ϵ :: AK, n° 2 : KN, n° 3; ou sin.$\epsilon = \frac{\text{KN, n° 3}}{\text{AK, n° 2}}$. Cherchons les valeurs de KN, n° 3, et de AK, n° 2.

Faisons AB, n° 1, $= q$; sa projection AB, n° 3, sera égale à q cos.Ψ. Menons par le point B, n° 3, la parallele MH à NK, sur laquelle nous abaisserons la perpendiculaire KH, et traçons les verticales KBC, n°s 3 et 2. L'angle CAB, n° 3, est égal à l'angle f, formé par le rectangle différencio-différentiel et l'horizon, et on a 1 : sin.f :: AB, n° 3, : BM $=$ sin.$f \times$ AB, n° 3 $= q$ sin.f cos.Ψ. Le triangle AKB, n° 2, donne cos.σ : sin.σ :: AB : BK $= \frac{\text{AB} \times \text{sin.}\sigma}{\text{cos.}\sigma} = \frac{q \text{ sin.}\sigma}{\text{cos.}\sigma}$. Ensuite KB, n° 2, étant égal à KB, n° 3, et l'angle HBK, n° 3, étant égal à l'angle BAM, n° 3, ou à l'angle f; on a 1 : cos.f :: BK : BH $=$ KB $\times$ cos.$f = \frac{q \text{ sin.}\sigma \text{ cos.}f}{\text{cos.}\sigma}$. Mais KN $=$ MH $=$ MB $+$ BH $= q$ sin.f cos.$\Psi + \frac{q \text{ sin.}\sigma \text{ cos.}f}{\text{cos.}\sigma}$, et AK, n° 2, est le quatrieme terme de la proportion cos.σ : 1 :: q : AK $= \frac{q}{\text{cos.}\sigma}$; donc

$$\frac{\text{KN, n° 3}}{\text{AK, n° 2}} = \text{sin.}\epsilon = \text{sin.}f \text{ cos.}\Psi \text{ cos.}\sigma + \text{sin.}\sigma \text{ cos.}f.$$

Substituant cette valeur de sin.ϵ dans l'équation de l'art. (880), elle devient

Équation résultante de cette substitution.

882 . . . . . $m' = \delta \cdot da \cdot dh \left(\text{cos.}\Psi \text{ cos.}\sigma + \frac{\text{sin.}\sigma \text{ cos.}f}{\text{sin.}f}\right)\left(h^{\frac{1}{2}} \pm \frac{v \text{ sin.}\theta}{(2g)^{\frac{1}{2}}}\right)^2$.

Ce que devient cette équation quand on substitue à la base horizontale de la différencio-différentielle la projection de cette base sur un plan vertical perpendiculaire à un autre plan vertical qui passe par la direction suivant laquelle s'évalue la pression.

883. Si, de l'extrémité a, n° 1, du côté horizontal du rectangle différencio-différentiel, on abaisse la perpendiculaire ab sur la projection Ab, comme ang.Aab $=$ ang.bAX $= \Psi$, on aura 1 : cos.Ψ :: Aa : ab; d'où ab $=$ A$a \cdot$ cos.$\Psi = da$ cos.Ψ. Supposant que ab est l'incrément d'une ligne k, ou égal à dk, l'équation $dk = da$ cos.Ψ donne $da = \frac{dk}{\text{cos.}\Psi}$, valeur qui, substituée dans l'équation précédente, la change en

884 . . . . . $m' = \delta \cdot dh\,dk \left(\text{cos.}\sigma + \frac{\text{sin.}\sigma \text{ cos.}f}{\text{cos.}\Psi \text{ sin.}f}\right)\left(h^{\frac{1}{2}} \pm \frac{v \text{ sin.}\theta}{(2g)^{\frac{1}{2}}}\right)^2$.

Équation qui donne la pression dans le second plan mentionné précédemment, décomposée horizontalement.

885. Pour avoir la pression horizontale m'', qui s'exerce parallèlement au plan KAC, n° 2, il faut faire $\sigma = 0$, ou cos.$\sigma = 1$, et sin.$\sigma = 0$; ce qui donne $m'' = \delta \cdot dh \cdot dk \left(h^{\frac{1}{2}} \pm \frac{v \text{ sin.}\theta}{(2g)^{\frac{1}{2}}}\right)^2$.

886. Pour avoir la pression verticale m''', qui s'exerce paral-

Digitized by

lèlement au même plan, il faut faire $\sigma = 90°$, ou $\cos.\sigma = 0$, et $\sin.\sigma = 1$, et on a $m''' = \frac{\delta\, dh\, .\, dk\, .\, \cos.f}{\cos.\Psi\, \sin.f} \left(h^{\frac{1}{2}} \pm \frac{v \sin.\delta}{(2\phi)^{\frac{1}{2}}}\right)^2$.

887. On a, dans le triangle CBA, n° 3, $\cos.f : \sin.f :: AB : BC$; et comme $BC = dh$, il vient $dh = \frac{\sin.f}{\cos.f} AB$. Supposons que AB soit l'incrément d'une ligne g, on aura $AB = dg$, et $dh = \frac{\sin.f}{\cos.f} dg$. Cette valeur, substituée dans l'équation de l'article (882), la change en

Équation de la pression dans laquelle on introduit la projection, sur un plan horizontal, de la hauteur du parallélogramme différencio-différentiel.

$$888 \cdots\cdots m' = \delta \cdot da\, dg \left(\frac{\cos.\Psi \cos.\sigma \sin.f}{\cos.f} + \sin.\sigma\right) \left(h^{\frac{1}{2}} \pm \frac{v \sin.\theta}{(2\phi)^{\frac{1}{2}}}\right)^2.$$

889. Les pressions horizontales et verticales, parallèles au plan AKC, n° 2, déduites de l'équation précédente, sont

Pressions horizontales et verticales dans lesquelles entre la même projection.

$$m'' = \frac{\delta\, da\, dg \cos.\Psi \sin.f}{\cos.f} \left(h^{\frac{1}{2}} \pm \frac{v \sin.\theta}{(2\phi)^{\frac{1}{2}}}\right)^2, \text{ et } m''' = \delta \cdot da \cdot dg \left(h^{\frac{1}{2}} \pm \frac{v \sin.\delta}{(2\phi)^{\frac{1}{2}}}\right)^2.$$

890. Pour avoir la pression dans le sens du mouvement de l'élément différencio-différentiel, il faut faire $\delta = \theta$, ou $\sin.\theta = \sin.f \cos.\Psi \cos.\sigma + \sin.\sigma \cos.f$.

Comment on obtient la pression dans le sens du mouvement de la différencio-différentielle.

891. Si, de plus, l'élément différencio-différentiel se mouvoit horizontalement, on auroit $\sin.\theta = \sin.f \cos.\Psi$; substituant cette valeur dans l'équation de l'art. (885), on a

Cas où cette différencio-différentielle se meut horizontalement ou verticalement.

$$m'' = \delta \cdot dh \cdot dk \left(h^{\frac{1}{2}} \pm \frac{v \sin.f \cos.\Psi}{(2\phi)^{\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

892. Et s'il se mouvoit verticalement, on auroit $\cos.\sigma = 0$, $\sin.\sigma = 1$, et $\sin.\theta = \cos.f$. Ces valeurs, substituées dans la seconde équation de l'art. (889), donnent

$$m''' = \delta \cdot da\, dg \left(h^{\frac{1}{2}} \pm \frac{v \cos.f}{(2\phi)^{\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

893. La surface dont le rectangle différencio-différentiel, considéré dans les articles précédents, est un des éléments, peut être ou entièrement, ou en partie seulement, plongée dans le fluide. Il est à propos de disposer les équations données jusqu'à présent, de maniere à pouvoir désigner dans laquelle de ces deux circonstances se trouve la surface qui se meut dans le fluide. Pour cela, nommons b la distance verticale du point le plus élevé de cette surface à la surface supérieure du fluide, et z la distance verticale du même point à l'élément différencio-différentiel dont on considere la pression ; on aura $h = b + z$, et $dh = dz$. Substituant ces valeurs dans les équa-

Comment il faut disposer les équations données jusqu'à présent, pour pouvoir désigner si la surface à laquelle appartient la différencio-différentielle est entièrement, ou en partie, plongée dans le fluide.

Digitized by Google

tions précédentes, on aura, pour la pression dans une direction quelconque (880 et 884),

Équations disposées pour parvenir à ce but.

$$894 \cdots\cdots m' = \frac{\delta \cdot da \cdot dz \cdot \sin.\epsilon}{\sin.f}\left[(b+z)^{\frac{1}{2}} \pm \frac{v \sin.\theta}{\sqrt{2\phi}}\right]^2 = \delta \cdot dz \cdot dk\,(\cos.\sigma + \frac{\sin.\sigma \cos.f}{\cos.\Psi \sin.f})\left[(b+z)^{\frac{1}{2}} \pm \frac{v \sin.\theta}{(2\phi)^{\frac{1}{2}}}\right]^2.$$

895. Pour la pression horizontale dans un plan vertical passant par la direction précédente (885),

$$m'' = \delta dz dk\left[(b+z)^{\frac{1}{2}} \pm \frac{v \sin.\theta}{(2\phi)^{\frac{1}{2}}}\right]^2.$$

896. Pour la pression verticale dans le même plan (889),

$$m''' = \delta \cdot da dg\left[(b+z)^{\frac{1}{2}} \pm \frac{v \sin.\theta}{(2\phi)^{\frac{1}{2}}}\right]^2.$$

897. Pour la pression, dans la direction du mouvement, cette direction étant quelconque (880 et 890),

$$m' = \frac{\delta \cdot da dz \sin.\theta}{\sin.f}\left[(b+z)^{\frac{1}{2}} \pm \frac{v \sin.\theta}{(2\phi)^{\frac{1}{2}}}\right]^2.$$

898. Laquelle pression, décomposée horizontalement, a pour valeur (891),

$$m'' = \delta dz dk\left[(b+z)^{\frac{1}{2}} \pm \frac{v \sin.f \cos.\Psi}{(2\phi)^{\frac{1}{2}}}\right]^2.$$

899. Et, décomposée verticalement, est égale à (892),

$$m''' = \delta da dg\left[(b+z)^{\frac{1}{2}} \pm \frac{v \cos.f}{(2\phi)^{\frac{1}{2}}}\right]^2.$$

Analyse du cas où le fluide se meut, et où la différencio-différentielle est immobile; pourquoi ce cas diffère de celui où le fluide en repos est choqué par la différencio-différentielle.

900. Il semble, au premier coup-d'œil, que la pression doit être la même lorsque le fluide est en repos et que la surface différencio-différentielle se meut, et lorsque le corps est en repos, et que cette surface se meut, toutes les autres circonstances étant les mêmes; néanmoins, le mouvement du fluide introduit une différence entre le premier et le second de ces cas, qui, quoique souvent assez légère pour être négligée dans la pratique, ne doit pas être omise ici; car les réflexions auxquelles elle donnera lieu nous serviront ailleurs. Cette différence vient de ce que, lorsqu'un fluide se meut, sa surface supérieure cesse d'être de niveau, et que la pression des molécules fluides ne doit plus s'évaluer par leur distance verticale à cette surface supérieure, mais par leur distance perpendiculaire.

Pour mieux entendre ceci, soit CI (*fig.* 160) la surface supérieure d'un fluide qui se meut d'un mouvement uniforme, et qui le conserve par la seule action de la pesanteur; les molécules de

Digitized by Google

de ce fluide sont censées, dans toute sa hauteur, se mouvoir parallèlement à la ligne CI. Soit de plus FB une verticale, et EB une perpendiculaire à la surface CI. Si on décompose la force accélératrice, due à la pesanteur qui agit sur la particule B, en deux autres, l'une dirigée suivant EB, et l'autre dirigée parallèlement à EF; cette derniere sera détruite par une cause quelconque, puisque, d'après l'hypothese, le mouvement étant uniforme, l'accélération qu'elle devroit produire n'a aucun effet. Les molécules fluides ne pressent donc l'une sur l'autre qu'en vertu de la composante parallele à EB; et en vertu de cette composante seule, tout le système fluide demeureroit en équilibre si le mouvement progressif, parallele à CI, venoit à s'arrêter tout-à-coup (552). Dans cet état, la vîtesse du fluide, jaillissant par un petit orifice en B, doit s'estimer, non par la hauteur verticale BF, mais par la hauteur BE, perpendiculaire à la surface CI, puisque c'est cette derniere hauteur qui est proportionnelle à la pression, laquelle pression détermine la vîtesse du fluide jaillissant (720). Faisant $BF = h$, et angle $BFE = \tau$, on aura $BE = h \sin.\tau$, quantité qu'il faudra substituer à h ou à $z + b$, dans celles des équations précédentes qui contiennent ces quantités, lorsque le corps sera en repos et qu'on voudra avoir égard à l'inclinaison de la surface supérieure du fluide en mouvement.

901. L'expérience nous apprend qu'ordinairement τ approche beaucoup de 90°, et qu'ainsi on peut, le plus souvent, faire $\sin.\tau = 1$; dans ce cas, les expressions où l'on aura introduit $h \sin.\tau$, se réduiront à ce qu'elles étoient avant cette introduction.

Cas où le fluide et la différencio-différentielle sont tous les deux en mouvem.

902. Lorsqu'on supposera que la différencio-différentielle de surface, et le fluide, sont tous deux en mouvement, il faudra chercher la valeur de la vîtesse composée des deux autres, savoir, de celle de la surface et de celle du fluide, et la substituer, dans les formules dont il est parlé art. (900), à la place de v. On substituera de même, à la place de θ, la valeur de l'angle que forme la direction composée, avec la différencio-différentielle de la surface. Ces substitutions faites, on aura les formules qui conviennent au cas proposé, comme il est évident par la théorie de la composition et de la décomposition des forces.

De la pression d'un rectangle à base horizontale et d'une hauteur infiniment petite.

903. Nous n'avons parlé jusqu'à présent que d'une différencio-différentielle de surface, et nous ne l'avons supposée choquée que d'un côté seulement; examinons à présent ce qui se passe lorsqu'un plan de grandeur finie choque les fluides ou en

Digitized by Google

est choqué. Appellons *face antérieure de ce plan*, celle qui va à la rencontre du fluide, ou qui en est rencontrée lorsque le fluide se meut; et *face postérieure*, la face opposée à celle-ci. Supposons d'abord que le fluide est immobile; que le plan se meut dans le fluide et a la forme d'un parallélogramme rectangle AB, n° 1, (*fig.* 161), dont deux côtés soient horizontaux; menons les deux horizontales FG, HI, et les deux verticales KL, MN, infiniment près l'une de l'autre, et supposons que la différencio-différentielle KN est enfoncée dans le fluide d'une quantité h, a étant égal au côté horizontal du parallélogramme. Cela posé, la pression de la différencio-différentielle, considérée suivant une direction quelconque faisant un angle ϵ avec le plan AB, sera, (880), $m' = \frac{f.da dh.\sin.\epsilon}{\sin.f}\left(h^{\frac{1}{2}} \pm \frac{\nu \sin.\theta}{(2\varphi)^{\frac{1}{2}}}\right)^2$; intégrant cette équation par rapport à a, c'est-à-dire dans l'étendue du rectangle différentiel FI, on a $fm' = \frac{af.dh.\sin.\epsilon}{\sin.f}\left(h^{\frac{1}{2}} \pm \frac{\nu \sin.\theta}{(2\varphi)^{\frac{1}{2}}}\right)^2$ pour la valeur de la pression de ce rectangle.

Explication de la maniere dont les dénivellations sont produites, et détermination de leur hauteur.

904. Soit CD, n° 2, une ligne menée à la surface supérieure du fluide, perpendiculairement au plan AB, n° 1; les lignes QS, n° 1, et QS, n° 2, étant les mêmes, ainsi que les points N, n° 1, et N, n° 2. Soit PN, n° 2, $= h$; il est évident que, si le plan va du côté de D, la molécule qui se trouve en N, du côté de C, suit ce plan ou afflue dans l'espace qu'il tend à laisser vuide derriere lui, avec une vîtesse égale à $\sqrt{2\varphi h}$. Mais le plan est supposé se mouvoir, du côté de D, avec une vîtesse $\nu \sin.\theta$; donc, pour que les molécules N puissent remplir l'espace qu'il tend à laisser vuide derriere lui, il faut que leur vîtesse d'affluence $\sqrt{2\varphi h}$ soit plus grande que la vîtesse $\nu \sin.\theta$, ou qu'on ait $\sqrt{2\varphi h} > \nu \sin.\theta$; ainsi, à partir du point où on aura $\sqrt{2\varphi h} = \nu \sin.\theta$, et dans toute la partie supérieure à ce point, où on a $\sqrt{2\varphi h} < \nu \sin.\theta$, les molécules fluides n'auront point assez de vîtesse pour atteindre le plan QS, et laisseront un vuide CEP derriere lui, dont on calculera la profondeur PE par l'équation $\sqrt{(2\varphi \times PE)} = \nu \sin.\theta$, ou $PE = \frac{\nu^2 \sin^2.\theta}{2\varphi}$.

La même valeur de PE peut s'obtenir en cherchant, par les formules de pression, quel est le point de la face postérieure du plan QH, où la pression devient nulle. Pour cela, il faut, dans l'équation $m' = \frac{f.da.dh.\sin.\epsilon}{\sin.f}\left(h^{\frac{1}{2}} - \frac{\nu \sin.\theta}{(2\varphi)^{\frac{1}{2}}}\right)^2$, (on donne le signe négatif à $\nu \sin.\theta$ (872), parceque la face postérieure du plan tend à s'éloigner des molécules placées du côté de C),

Digitized by Google

faire $m' = 0$, ou $h^{\frac{1}{2}} - \frac{v \sin.\theta}{(2\varphi)^{\frac{1}{2}}} = 0$; ce qui donne, comme précédemment, $h = \frac{v^2 \sin.^2\theta}{2\varphi}$.

Si on veut trouver quel est le point de la face antérieure du plan QS, où la pression devient nulle, il faut, par la même raison, faire $m' = 0$ dans l'équation $m' = \frac{\delta dadk \sin.\epsilon}{\sin.f}\left(h^{\frac{1}{2}} + \frac{v \sin.\theta}{(2\varphi)^{\frac{1}{2}}}\right)^2$, (on donne le signe positif à $v \sin.\theta$, (872), parceque la face antérieure du plan tend à s'approcher des molécules placées du côté de D); ce qui donne $h^{\frac{1}{2}} = \frac{-v \sin.\theta}{(2\varphi)^{\frac{1}{2}}} = 0$, ou $h = \frac{v^2 \sin.^2\theta}{2\varphi}$.

905. On voit donc que le fluide s'éleve à la face antérieure du plan d'une hauteur PF égale à la hauteur PE dont il s'abaisse à la face postérieure. Pour avoir la pression qui s'exerce en un point donné de PF, il faut, dans l'équation générale qui donne la pression, faire $h^{\frac{1}{2}}$ négative; et pour avoir la pression qui, sans le vuide CEP, s'exerceroit au point correspondant de PE, il faut, dans l'équation générale de la pression, faire $h^{\frac{1}{2}}$ positive. Ces deux cas s'accordent à donner

$$m' = \frac{\delta dadk \sin.\epsilon}{\sin.f}\left(h - \frac{2v \sin.\theta h^{\frac{1}{2}}}{(2\varphi)^{\frac{1}{2}}} + \frac{v^2 \sin.^2\theta}{2\varphi}\right).$$

906. Nous appellerons *dénivellations* du fluide le vuide CEP, et l'élévation ou intumescence, FPD.

907. Ces dénivellations sont celles qu'on peut remarquer tous les jours lorsque des corps se meuvent dans des fluides. Il est très aisé d'appercevoir l'élévation ou intumescence qui se forme à la partie antérieure, et la cavité ou abaissement qui a lieu à la partie postérieure. Les hauteurs verticales de ces dénivellations sont telles que nous venons de les déterminer; mais on ne prétend pas cependant que la face qui, suivant la théorie, devroit correspondre à la cavité, soit entièrement exempte de pression, ni que l'intumescence qui lui est égale demeure complete ou soit la même dans toute la longueur du plan, parceque le fluide s'introduit dans la cavité par les côtés du plan, et s'écoule de l'intumescence dans des directions contraires aux premieres. Il résulte de-là une augmentation de pression à la partie postérieure, et une diminution de pression à la partie antérieure: nous verrons dans la suite comment on doit, d'après l'expérience, avoir égard à ces différences.

L'existence de ces dénivellations est constatée par des expériences journalieres; modifications qu'il faut apporter à la détermination précéd. de leur étendue.

908. Supposons qu'un plan ayant la forme d'un parallélogramme rectangle dont deux côtés sont horizontaux, se meut

Digitized by Google

Détermination des pressions horizont. antérieure et postérieure qu'éprouve, dans une direction quelconque, un parallélog. rectangle, dont deux côtés sont horizontaux, et qui se meut dans un fluide.

dans un fluide, et que son côté horizontal supérieur n'éprouve aucune pression, et cherchons les pressions horizontales qu'éprouvent, dans une direction quelconque, les parties des faces antérieure et postérieure de ce parallélogramme, exposées à l'action du fluide.

La dénivellation ayant lieu à la face antérieure du plan jusqu'à une hauteur $\frac{v^2 \sin.^2\theta}{2g}$, il faut, pour que le côté supérieur du parallélogramme n'éprouve aucune pression, que sa hauteur, au-dessus de la surface supérieure du fluide, soit ou égale à $\frac{v^2 \sin.^2\theta}{2g}$, ou plus grande que cette quantité. Soit AB, n° 1, (*fig.* 161), le parallélogramme en question, la pression horizontale de la différencio-différentielle KN est (885) égale à $\delta dh dk (h^{\frac{1}{2}} \pm \frac{v \sin.\theta}{(2g)^{\frac{1}{2}}})^2$; intégrant une premiere fois par rapport à k, qui est (883) la projection de FG sur une ligne perpendiculaire au plan vertical qui passe par la direction dans laquelle on considere la pression, on a $k\delta dh\,(h^{\frac{1}{2}} \pm \frac{v \sin.\theta}{(2g)^{\frac{1}{2}}})^2$, pour la pression horizontale du rectangle différentiel FI; et intégrant une seconde fois par rapport à h, on a

$$k\delta\left(\tfrac{1}{3}h^3 \pm \tfrac{4}{5}h^{\frac{5}{2}} \cdot \frac{v \sin.\theta}{(2g)^{\frac{1}{2}}} + \frac{kv^2 \sin.^2\theta}{2g}\right) + C.$$

Le signe supérieur est pour la face antérieure, et l'inférieur pour la face postérieure.

Il est évident que si on supposoit la pression nulle lorsque $h = 0$, ou qu'on n'eût pas égard à la dénivellation, on auroit $C = 0$; d'après cela, la constante C est une quantité qui, lorsqu'on a égard à la dénivellation, doit, pour la face antérieure, s'ajouter à la pression qui a lieu au-dessous de la surface du fluide ou de l'origine de h, et, pour la face postérieure, se retrancher de cette pression. Cette constante se détermine en faisant sur l'expression précédente une hypothese dans laquelle la pression soit nulle, et égalant l'expression à zéro. L'hypothese dont nous parlons est (904) que $h^{\frac{1}{2}} \pm \frac{v \sin.\theta}{(2g)^{\frac{1}{2}}} = 0$, ou que $h^{\frac{1}{2}} = \mp \frac{v \sin.\theta}{(2g)^{\frac{1}{2}}}$. Substituant cette valeur dans l'expression précédente, et égalant à zéro, il vient, toutes réductions faites, $C + \frac{k\delta}{6} \cdot \frac{v^4 \sin.^4\theta}{4g^2} = 0$; ainsi $\frac{k\delta}{6} \cdot \frac{v^4 \sin.^4\theta}{4g^2}$ est une quantité constante qui doit être portée en augmentation de pression pour la face

Digitized by Google

antérieure, et en diminution pour la face postérieure, puisqu'elle est relative à la dénivellation, sans laquelle il n'y auroit point de constante à ajouter, et la pression horizontale totale sera $k\delta\left(\frac{1}{2}h^2 \pm \frac{4}{5}h^{\frac{5}{2}}\frac{\rho\sin.\theta}{(2\rho)^{\frac{1}{2}}} + \frac{h\rho^2\sin.^2\theta}{2\rho} \pm \frac{\rho^4\sin.^4\theta}{6.4\rho^2}\right)$.

Cas où le côté supérieur du parallélogramme est à la surface supérieure du fluide.

909. Lorsque le côté supérieur du parallélogramme coïncide avec la surface supérieure du fluide, il n'y a point de dénivellation à la face antérieure, et il faut, pour cette face, faire $\frac{\rho^4\sin.^4\theta}{6.4\rho^2} = 0$, dans l'expression précédente. Mais la dénivellation subsiste toujours à la face postérieure dont la pression ne change pas de valeur.

Cas où le parallélogramme est entièrement plongé dans le fluide.

910. Supposons maintenant que le plan parallélogrammique est entièrement plongé dans le fluide, et cherchons les mêmes pressions que ci-devant.

On a, pour ce cas (895), l'équation

$$m'' = \delta dz dk\left[(b+z)^{\frac{1}{2}} \pm \frac{\rho\sin.\theta}{(2\rho)^{\frac{1}{2}}}\right]^2.$$

Cette équation, intégrée par rapport à k, ensuite par rapport à z, donne finalement, pour la valeur de la pression cherchée,

$$\delta k\left[bz + \frac{1}{3}z^2 \pm \frac{\frac{4}{5}(b+z)^{\frac{5}{2}}\rho\sin.\theta}{(2\rho)^{\frac{1}{2}}} + \frac{z\rho^2\sin.^2\theta}{2\rho}\right] + C.$$

Cette pression devient nulle lorsque $z = 0$; et cette condition donne $C = \pm\frac{\frac{4}{5}b^{\frac{5}{2}}\rho\sin.\theta}{(2\rho)^{\frac{1}{2}}}$. Substituant cette valeur de C, on a, pour l'intégrale complete ou pression entiere, la valeur

$$\delta k\left[bz + \frac{1}{3}z^2 \pm \frac{\frac{4}{5}\rho\sin.\theta\left[(b+z)^{\frac{5}{2}} - b^{\frac{5}{2}}\right]}{(2\rho)^{\frac{1}{2}}} + \frac{z\rho^2\sin.^2\theta}{2\rho}\right].$$

911. Les mêmes valeurs trouvées précédemment auront lieu lorsque le plan sera immobile et que le fluide se mouvra, pourvu que son mouvement puisse être censé horizontal, c'est-à-dire qu'on ait (900) $\sin.\tau = 0$. Il faudra bien observer que, dans le cas dont il s'agit, on doit entendre par faces antérieure et postérieure, le contraire de ce qu'on entend par les mêmes mots lorsque le plan se meut et que le fluide est immobile.

Observation sur la solution du cas précédent.

912. Il faut observer cependant que, dans le cas dont on vient de parler, l'application des formules précédentes à la pression de la face postérieure suppose que les molécules y ont la même vîtesse qu'au devant de la face antérieure; ce qui n'a pas lieu dans la nature, vu que le barrage, occasionné par un plan immobile, produit une espece de stagnation en *aval*, ou

Digitized by Google

du côté de la face postérieure de ce plan. C'est une circonstance à laquelle il faut avoir égard dans la pratique.

Cas où le fluide et le plan sont tous deux en mouvement.

913. Lorsque le plan et le fluide sont tous deux en mouvement, il faut chercher la vîtesse composée de celle de la surface et de celle du fluide, qu'on substituera, dans les formules, à la place de v. On substituera de même à la place de θ, la valeur de l'angle que forme la direction composée avec la surface : le tout ainsi qu'on l'a déja expliqué art. (902).

Maniere de déterminer la pression horizontale qu'éprouve une surface quelconque qui se meut dans un fluide.

914. Tout ce que nous venons de dire sur la pression qu'éprouve un plan choqué par un fluide, conduit naturellement à la détermination de la pression horizontale d'une surface quelconque. Pour cela, on divisera cette surface, par des plans horizontaux et verticaux, en petites surfaces quadrilateres sensiblement planes; on cherchera la pression qui agit sur chacune de ces surfaces; si on en fait une somme, en donnant des signes contraires à celles qui agissent en sens opposé, on aura la résultante de la pression horizontale totale.

Ainsi b étant la distance du côté supérieur d'un de ces quadrilateres à la surface du fluide, et z la hauteur de ce quadrilatere, sa pression horizontale sera (910),

$$\delta k \left[bz + \tfrac{1}{2} z^2 \pm \frac{\frac{2}{3} v \sin.\theta \left[(b+z)^{\frac{3}{2}} - b^{\frac{3}{2}} \right]}{(2g)^{\frac{1}{2}}} + \frac{z v^2 \sin.^2\theta}{2g} \right].$$

915. Nommons Z la distance de la surface du fluide au centre d'un des petits quadrilateres; on aura $Z = b + \frac{1}{2} z$, ou $b = Z - \frac{1}{2} z$. Substituant cette valeur de b dans l'expression précédente, elle devient

$$\delta k \left\{ Zz \pm \frac{\frac{2}{3} v \sin.\theta}{(2g)^{\frac{1}{2}}} \left[(Z + \tfrac{1}{2} z)^{\frac{3}{2}} - (Z - \tfrac{1}{2} z)^{\frac{3}{2}} \right] + \frac{z v^2 \sin.^2\theta}{2g} \right\}.$$

916. Ainsi la pression horizontale qu'éprouve la surface entiere aura pour valeur

Valeur de cette pression.

$$\delta \int k \left\{ Zz \pm \frac{\frac{2}{3} v \sin.\theta}{(2g)^{\frac{1}{2}}} \left[(Z + \tfrac{1}{2} z)^{\frac{3}{2}} - (Z - \tfrac{1}{2} z)^{\frac{3}{2}} \right] + \frac{z v^2 \sin.^2\theta}{2g} \right\}.$$

917. La quantité $(Z + \frac{1}{2} z)^{\frac{3}{2}} - (Z - \frac{1}{2} z)^{\frac{3}{2}}$, développée ou réduite en série par la regle très connue du binôme, devient

Cette même valeur réduite en série.

$$\tfrac{3}{2} Z^{\frac{1}{2}} z \left(1 - \frac{z^2}{96 Z^2} - \frac{z^4}{2048 Z^4} - \text{etc.} \right);$$

ce qui change l'expression précédente en

$$\delta \int k \left[Zz \pm \frac{2 v \sin.\theta Z^{\frac{1}{2}} z}{(2g)^{\frac{1}{2}}} \left(1 - \frac{z^2}{96 Z^2} - \frac{z^4}{2048 Z^4} - \text{etc.} \right) + \frac{z v^2 \sin.^2\theta}{2g} \right].$$

918. Et lorsque le rapport $\frac{z}{Z}$ est très petit, ce qui est le

Digitized by Google

cas ordinaire dans l'hypothese actuelle, cette expression devient

Cas où l'on peut négliger les termes de la série, à partir du second inclusivement.

$$\delta f k \left[Zz \pm \frac{2v \sin.\theta Z^{\frac{1}{2}} z}{(2\varphi)^{\frac{1}{2}}} + \frac{zv^2 \sin.^2\theta}{2\varphi} \right].$$

919. On conçoit aisément que, lorsque cette intégrale est calculée depuis une certaine valeur de Z jusqu'à $Z = 0$, il faut, à la pression de la face antérieure, ajouter celle qui résulte de la dénivellation, qu'on trouve, (904 et 907), en prenant l'intégrale depuis $Z = 0$ jusqu'à une certaine valeur négative de $Z^{\frac{1}{2}}$. Cette pression, provenant de la dénivellation, doit être au contraire retranchée de la pression de la face postérieure, et on a pour sa valeur, dans l'un et l'autre cas, comme à l'article (905),

Comment on fait entrer la dénivellation dans les valeurs précédentes.

$$\delta f k \left[Zz - \frac{2v \sin.\theta Z^{\frac{1}{2}} z}{(2\varphi)^{\frac{1}{2}}} + \frac{zv^2 \sin.^2\theta}{2\varphi} \right],$$

l'intégrale étant prise dans les limites dont on vient de parler.

920. Il est aisé maintenant de déterminer la résultante de toutes les pressions particulieres qui agissent sur les différentes surfaces qui terminent un corps. Il ne s'agit donc que de déterminer, par les regles précédentes, toutes ces différentes pressions particulieres, et d'en calculer la résultante, en ayant égard aux directions et aux quantités des composantes, d'après les regles que nous avons données pour résoudre de pareilles questions.

Comment on détermine la résultante des pressions qui agissent sur les différentes parties de la surface d'un corps.

921. Supposons qu'on cherche la résultante des pressions horizontales qu'éprouve un parallélipipede rectangle qui se meut horizontalement dans un fluide ayant deux de ses faces paralleles à l'horizon, et la direction de son mouvement étant parallele à deux de ses autres faces.

Application à un parallélipipede rectangle.

Lorsque la surface supérieure du solide sera élevée au-dessus de la surface du fluide d'une quantité plus grande que la hauteur de la dénivellation, la pression de la face antérieure sera (908), en faisant attention que $\theta = 90°$, et que $\sin.\theta = 1$,

$$\delta k \left(\tfrac{1}{2} h^2 + \frac{\frac{4}{3} v h^{\frac{3}{2}}}{(2\varphi)^{\frac{1}{2}}} + \frac{vh^2}{2\varphi} + \frac{v^4}{6.4\varphi^2} \right),$$

et la pression de la face postérieure aura pour valeur

$$\delta k \left(\tfrac{1}{2} h^2 - \frac{\frac{4}{3} v h^{\frac{3}{2}}}{(2\varphi)^{\frac{1}{2}}} + \frac{vh^2}{2\varphi} + \frac{v^4}{6.4\varphi^2} \right),$$

Les deux faces latérales n'éprouvent aucune pression dans le sens du mouvement, et les pressions horizontales perpendi-

Digitized by Google

culaires à la direction de ce mouvement se détruisent, puisqu'elles sont égales et directement opposées. Quant à la face horizontale inférieure, elle n'éprouve qu'une pression verticale, de bas en haut, qui est détruite par le poids du parallélipipede.

Ainsi la résultante des pressions horizontales du parallélipipede est égale à la pression de la face antérieure, moins la pression de la face postérieure : car cette derniere pression doit être prise avec un signe contraire ; ce qui donne, pour la valeur de cette résultante,

$$\delta k\left(\frac{8vh^{\frac{3}{2}}}{3(2g)^{\frac{1}{2}}}+\frac{\frac{1}{2}v^4}{4g^2}\right),\text{ ou }\frac{1}{3}\delta kv\left(\frac{8h^{\frac{3}{2}}}{(2g)^{\frac{1}{2}}}+\frac{v^3}{4g^2}\right).$$

Cas où les faces antérieure et postérieure ont une inclinaison.

922. Si on supposoit que les faces antérieure et postérieure ont une inclinaison, toutes choses restant les mêmes d'ailleurs, en faisant le calcul comme dans l'article précédent, et en restituant $\sin.\theta$, on trouveroit que la résultante de la pression qui agit sur le solide est égale à

$$\frac{1}{3}\delta kv\sin.\theta\left(\frac{8h^{\frac{3}{2}}}{(2g)^{\frac{1}{2}}}+\frac{v^3\sin.^3\theta}{4g^2}\right).$$

923. On conçoit aisément que, dans les deux expressions précédentes, h doit exprimer la distance de la surface du fluide à la face inférieure du solide, puisque les intégrales doivent être prises dans toute l'étendue des surfaces submergées.

Cas où le solide est entièrement submergé.

924. Le solide étant supposé entièrement submergé, la pression de sa face antérieure sera (914),

$$\delta k\left[bz+\frac{1}{2}z^2+\frac{\frac{1}{2}v\sin.\theta\left[(b+z)^{\frac{3}{2}}-b^{\frac{3}{2}}\right]}{(2g)^{\frac{1}{2}}}+\frac{zv^2\sin.^2\theta}{2g}\right],$$

et celle de la face postérieure sera

$$\delta k\left[bz+\frac{1}{2}z^2-\frac{\frac{1}{2}v\sin.\theta\left[(b+z)^{\frac{3}{2}}-b^{\frac{3}{2}}\right]}{(2g)^{\frac{1}{2}}}+\frac{zv^2\sin.^2\theta}{2g}\right].$$

Retranchant celle-ci de la premiere, on aura, pour la résultante des pressions,

$$\frac{8\delta kv\sin.\theta\left[(b+z)^{\frac{3}{2}}-b^{\frac{3}{2}}\right]}{3(2g)^{\frac{1}{2}}}=\frac{4\delta kb^{\frac{1}{2}}v\sin.\theta}{(2g)^{\frac{1}{2}}}\left(1+\frac{z}{4b}-\frac{z^2}{24b^2}+\text{etc.}\right).$$

925. Lorsque z, qui exprime la distance des faces supérieure et inférieure du solide, sera petit par rapport à b, l'expression précédente se changera en $\frac{4\delta kb^{\frac{1}{2}}zv\sin.\theta}{(2g)^{\frac{1}{2}}}$.

926. Nous n'avons, dans aucun des calculs précédents, fait entrer

entrer en considération la distance des faces antérieure et postérieure, et leur différence d'inclinaison, ni en général les différences d'inclinaison des différentes faces contiguës qui terminent un corps soumis à l'action d'un fluide : cependant, en considérant les dénivellations dues à ces différentes surfaces, et les influences de ces dénivellations sur la résultante des pressions, on parvient à des résultats qui font connoître que cette résultante est susceptible de variations sensibles relativement aux éléments dont on vient de parler. L'auteur de l'*Examen maritime* y a eu égard ; et quoique les recherches qu'il a faites sur cet objet n'aient aucune difficulté, nous ne les rapporterons pas à cause de la longueur des calculs. Nous nous contenterons de rapporter la formule qu'il donne pour calculer la résultante des pressions horizontales du solide considéré art. (921 et suiv.), avec les mêmes hypotheses de mouvement des articles cités ; q exprime la longueur du solide dans la direction du mouvement : les faces antérieure et postérieure sont supposées verticales. Cette résultante a pour valeur,

Formules de pression, dans lesquelles on fait entrer la distance des faces antérieure et postérieure.

$$\delta k\left(\frac{8h^{\frac{5}{2}}(v\sin.\theta+q)}{6(2\rho)^{\frac{5}{2}}}+\frac{v^4\sin.^4\theta+q^4}{6.4\rho^2}+\frac{h(v^2\sin.^2\theta-q^2)}{2\rho}\right).$$

927. Cette expression coïncide avec celle de l'art. (922) ; lorsque $q = v\sin.\theta$. lorsque $q = 0$, c'est-à-dire, lorsque le solide est réduit à un plan, elle devient

Ce que devient cette formule dans le cas où les deux faces antérieure et postérieure coïncidant ensemble, le solide devient un plan.

$$\frac{\delta k\rho\sin.\theta}{6}\left(\frac{8h^{\frac{5}{2}}}{(2\rho)^{\frac{5}{2}}}+\frac{v^2\sin.^2\theta}{4\rho^2}+\frac{6h\rho\sin.\theta}{2\rho}\right).$$

Cette expression est précisément égale à la moitié de celle trouvée art. (922), plus la quantité $\frac{\delta khv^2\sin.^2\theta}{2\rho}$; et lorsque cette quantité pourra être négligée, pour avoir la résultante de la pression du plan, il faudra prendre la moitié de la résultante de la pression du solide.

Nous ne suivrons pas l'auteur de l'*Examen maritime* dans les applications variées de sa méthode, qui sont principalement applicables au mouvement des navires.

Expériences qui confirment la théorie précédente.

Expériences de don George Juan sur la pression d'une planche verticale exposée à l'action d'un courant.

928. Don George Juan, après avoir parlé de quelques expériences de M. Mariotte, en rapporte d'autres qu'il a faites pour s'assurer de leur exactitude, et qui s'éloignent beaucoup des premieres, ainsi que des résultats que donne la théorie ordi-

Digitized by Google

naire. Voici ces expériences, tirées de l'édition françoise de M. Lévêque.

Une planche de la forme d'un parallélogramme d'un pied de large, exposée perpendiculairement à l'action d'un courant dont la vîtesse étoit de deux pieds par seconde, a supporté un poids de 15 livres $\frac{1}{2}$, étant submergée d'un pied juste dans le fluide (*). La même planche, enfoncée de deux pieds, a supporté un poids de 26 livres $\frac{1}{4}$, exposée à un courant de $\frac{4}{3}$ de pieds de vîtesse par seconde.

Application des formules de pression à ces expériences.

En négligeant l'épaisseur de la planche d'après ce qui est dit art. (927), on trouve que sa pression a pour valeur

$$\frac{\delta k v \sin.\phi}{6}\left(\frac{8h^{\frac{3}{2}}}{(2\varphi)^{\frac{1}{2}}}+\frac{v^2\sin.^2\theta}{4\varphi^2}+\frac{6hv\sin.\theta}{2\varphi}\right).$$

Les vîtesses étant petites, et l'angle θ étant égal à 90°, cette expression se réduit à $\frac{1}{6}\delta k v h^{\frac{3}{2}}$ (on suppose que $\sqrt{2\varphi}=8$; voyez *la note*). D'après cela, la pression de la planche, dans la premiere expérience, doit être, d'après la théorie, $\frac{1}{6}\cdot 1000\cdot 2 = 333$ onces ou 20 livres $\frac{1}{2}$, poids qui est seulement de cinq livres plus fort que celui qu'a donné l'expérience. Dans la seconde expérience, la pression de la planche, évaluée théoriquement, est de $\frac{1}{6}\cdot 1000\cdot\frac{4}{3}\cdot(2)^{\frac{3}{2}} = 628$ onces, ou 39 livres $\frac{1}{4}$, poids qui est de 13 livres plus grand que l'expérience ne l'a donné.

A quoi il faut attribuer l'excès des pressions calculées sur les pressions observées.

929. L'excès des poids calculés sur ceux qui résultent de l'expérience, s'explique par ce qui a été dit, art. (907), sur les altérations qu'éprouvent les dénivellations à l'avant et à l'arriere du corps, desquelles il résulte une augmentation de pression à la face postérieure, et une diminution à la face antérieure.

L'expérience et la théorie s'accordent sur le rapport des pressions.

930. Mais l'expérience et la théorie sont d'accord dans les rapports que les résultats calculés et observés ont entre eux. Le rapport des résultats calculés est celui de $\frac{1}{6}\cdot 1000\cdot$ à $\frac{1}{6}\cdot 1000\cdot\frac{4}{3}\cdot(2)^{\frac{3}{2}}$, ou $2 : \frac{4}{3}(2)^{\frac{3}{2}}$, qui est sensiblement le rapport de 15 à 28, et celui des résultats observés est $15\frac{1}{2} : 26\frac{1}{4}$, rapport qui differe peu du précédent.

La pression observée est à-peu-près moindre d'un tiers que la pression théorique.

931. Les deux expériences donnent, à peu de différence, la mesure absolue de la résistance, moindre d'un tiers que celle

(*) Nous devons avertir que les mesures dont il s'agit ici sont les mesures angloises, au moyen de quoi $\sqrt{2\varphi}$, qui, en mesures françoises, est égale à 7,771, se trouve égale à 8. De plus, l'auteur de l'*Examen maritime* évalue à 1000 onces le poids d'un pied cube d'eau. Nous n'avons fait aucune réduction à ces quantités, vu que ce seroit priver inutilement de leur simplicité des calculs qui doivent plutôt donner des rapports que des résultats absolus.

Digitized by Google

qui résulte de la théorie, comme on vient de le voir, et comme on devoit s'y attendre d'après ce qui a été dit art. (207); en sorte que, pour avoir la mesure juste et absolue de cette résistance, nous devons prendre les deux tiers de ce qui résulte de la théorie.

Expériences de M. J. Smeaton sur la force des fluides pour faire tourner les roues à aubes; machine dont il s'est servi.

932. L'auteur de l'*Examen maritime* a placé deux appendices à la fin du premier volume de son ouvrage; l'un contient une application de sa théorie à la résistance des fluides élastiques, matiere que nous traiterons dans la suite avec quelques détails, et l'autre un examen de quelques expériences consignées dans le tome 51 des *Transactions philosophiques*, part. 1, page 100, et faisant l'objet d'un mémoire de M. J. Smeaton, qui a pour titre : *An experimental inquiry concerning the natural powers of water and wind to turn mills, and other machines depending on a circular motion;* ou *Recherches expérimentales sur la force naturelle de l'eau et du vent pour faire tourner les moulins et les autres machines assujetties à un mouvement circulaire.*

M. J. Smeaton donne, dans le mémoire cité, la description d'une machine de son invention, dont il a fait usage pour déterminer, par des expériences répétées, la pression qu'exerce l'eau qui, en sortant d'un réservoir par une ouverture, choque les aubes d'une roue verticale disposée comme celle d'un moulin. Sur l'axe de cette roue s'enveloppe une corde à laquelle est suspendu un poids qui sert à mesurer l'effet de la machine : l'auteur, en soumettant ces matieres à un nouvel examen, prouve clairement le peu de confiance qu'il avoit dans les déterminations données jusqu'alors sur la résistance de l'eau. Avant de commencer, il examine les différences qui doivent résulter de faire les expériences avec des modeles, ou de les faire avec des machines en grand, à cause du frottement, qui, ainsi qu'on le verra dans la suite, doit être différent suivant les différentes dimensions et pesanteurs des pieces qui composent la machine. Pour éviter cette difficulté, il donne une méthode très ingénieuse pour déterminer les frottements et en corriger les effets dans les expériences, afin qu'on puisse avoir confiance dans leurs résultats, autant qu'il est possible, ou au moins suffisamment pour connoître la loi suivant laquelle l'eau produit son action.

Nous ne nous arrêterons pas à l'examen ou à la détermination des pressions absolues; nous nous contenterons de faire

Digitized by Google

voir combien les résultats de ces expériences s'accordent avec la théorie que nous avons donnée.

Nous rappellerons ici, d'après les principes donnés art. (487 et suivants), que l'effet d'une machine, pendant un temps déterminé, est proportionnel (494) au produit du poids qu'elle éleve, par la vîtesse avec laquelle ce poids est élevé. Il suit de là, et de ce qui est dit art. (498 et suiv.), qu'il y a une certaine valeur du poids qui convient au plus grand effet de la machine, et de laquelle résulte une valeur déterminée de la vîtesse ascensionnelle de ce poids.

Détermination théorique du plus grand effet de la machine de M. Smeaton, et accord de cette détermination avec l'expérience.

933. Cela posé, soit supposé, dans le cas de M. J. Smeaton,

U la vîtesse avec laquelle se meut l'eau qui frappe les aubes de la roue;

u la vîtesse de ces aubes;

P le poids élevé;

R le rayon de la roue;

r le rayon de l'axe sur lequel s'enroule la corde à laquelle est suspendu le poids;

n le coëfficient constant, par lequel on suppose qu'il faut multiplier le poids P pour avoir le moment de la résistance du frottement provenant de ce poids;

F une autre constante exprimant le moment de la résistance du frottement provenant du poids de toute la machine.

On a vu, art. (902), que, pour trouver la pression dans le cas où le corps et le fluide sont tous deux en mouvement, il faut chercher la résultante des deux vîtesses, et la substituer, dans les formules, à la place de v. Cette résultante est, dans le cas dont il s'agit, $U - u$, et la pression a pour valeur, lorsque $U - u$ n'est pas grand, et que le courant est dirigé à angle droit sur l'aube, $\frac{1}{3} \delta k h^{\frac{3}{2}} (U - u)$, ou $A (U - u)$, A étant une constante.

Cette pression, qui est l'effort du moteur, doit (493) faire équilibre à l'effort de la résistance, et on trouvera sans peine, d'après cette condition (318 et 319), l'équation

$$RA (U - u) = rP + nP + F;$$

d'où on tire

$$P = \frac{RA (U - u) - F}{r + n}, \text{ et } P \times \frac{r}{R} u = \frac{r}{R} \times \frac{RAu (U - u) - Fu}{r + n};$$

équation qui donne la valeur de l'effet $P \times \frac{r}{R} u$ de la machine. Égalant à zéro la différentielle de la valeur de cet effet, il vient

Digitized by Google

$RA(U - 2u) - F = 0$; d'où $u = \frac{1}{2}U - \frac{F}{2RA}$: ainsi la vîtesse des aubes doit être un peu moindre que la moitié de la vîtesse de l'eau qui les choque; c'est aussi ce qu'on a trouvé par expérience, et ce qui est exprimé, à très peu près, dans la colonne 12 de la page 115 du volume cité des *Transactions philosophiques.*

Autre conformité de la théorie de don George Juan, avec les expériences de M. J. Smeaton.

Mais ce n'est pas seulement cet accord qui confirme la théorie de don George Juan. Observons que, dans la valeur $A(U - u)$, ou $\frac{1}{3}\delta k h^{\frac{1}{2}}(U - u)$, kh exprime la valeur de la section verticale de l'eau dans le canal ou dans l'orifice par lequel elle sort. Ainsi on voit que plus cette ouverture sera grande, plus la quantité $A = \frac{1}{3}\delta k h^{\frac{3}{2}}$ sera grande aussi; ce qui diminuera la valeur de $\frac{F}{2RA}$, et augmentera par conséquent la vîtesse u des aubes, ainsi que la vîtesse $\frac{r}{R}u$ du poids. Or, rien n'est plus conforme aux expériences de M. J. Smeaton. Dans la même page 115, on voit qu'il a fait ses expériences avec six orifices différents, les uns plus grands que les autres. Les dix premieres, faites avec le plus petit orifice, donnent, en prenant un milieu entre elles, et supposant $U = 10$; donnent, disons-nous, $u = 3{,}548$, et $\frac{F}{2RA} = 1{,}452$; les sept secondes, faites avec un plus grand orifice, donnent $u = 3{,}89$, et $\frac{F}{2RA} = 1{,}11$; les quatre troisiemes, avec un autre orifice plus grand, donnent $u = 4{,}3$, et $\frac{F}{2RA} = 0{,}7$; les trois quatriemes, avec un orifice encore plus grand, donnent $u = 4{,}53$, et $\frac{F}{2RA} = 0{,}47$; les deux cinquiemes, faites avec un orifice plus grand, donnent $u = 4{,}775$, et $\frac{F}{2RA} = 0{,}225$; enfin la sixieme, faite avec le plus grand orifice, donne $u = 5{,}2$; quantité qui excede de quelque chose la plus grande valeur que puisse avoir u, qui est 5 : mais cette différence est bien petite en comparaison de celles que donnent les autres.

Exposition de la théorie ordinaire du choc et de la résistance.

Recherche des formules ordinaires de pression par une méthode analogue à celle employée dans la théorie précédente du choc des fluides.

934. Nous avons dit, art. (872), que la vîtesse avec laquelle, dans l'hypothese du mouvement, un fluide jailliroit par une différencio-différentielle de surface, s'il y avoit un passage libre, étoit égale à $\sqrt{2\varphi h} \mp v$, ou généralement (877), à

Digitized by Google

$\sqrt{2\varphi h} \pm v \sin.\theta$, et que cette quantité est proportionnelle à la pression qu'éprouve la différencio-différentielle en question. Supposons, au lieu de cela, que la pression de cette différencio-différentielle est égale au poids de la colonne fluide qui lui répond verticalement, et qui, eu égard à la dénivellation, a pour hauteur (904), $h \pm \frac{v^2 \sin.^2\theta}{2\varphi}$. La pression d'un élément horizontal de la surface supposée une des faces d'un parallélipipede, tel que celui considéré dans l'art. (921 et suiv.), sera $\delta k dh \left(h \pm \frac{v^2 \sin.^2\theta}{2\varphi}\right)$, dont l'intégrale est $\delta k \left(\frac{1}{2} h^2 \pm \frac{hv^2 \sin.^2\theta}{2\varphi}\right) + A$. Déterminant la constante par la condition que la pression est nulle lorsque $h \pm \frac{v^2 \sin.^2\theta}{2\varphi} = 0$, ou que $h = \mp \frac{v^2 \sin.^2\theta}{2\varphi}$, on a $A = \frac{\delta k}{2} \frac{v^4 \sin.^4\theta}{4\varphi^2}$, et l'intégrale complete devient $\delta k \left(\frac{1}{2} h^2 \pm \frac{hv^2 \sin.^2\theta}{2\varphi} + \frac{v^4 \sin.^4\theta}{2.4\varphi^2}\right)$, le signe supérieur servant pour la face antérieure, et l'inférieur pour la face postérieure. D'après cela, la différence entre la pression des faces antérieure et postérieure, ou la résultante de ces pressions, sera $\frac{\delta k h v^2 \sin.^2\theta}{\theta}$. Cette résultante doit être réduite à moitié (927) lorsque le parallélipipede devient un plan, auquel cas elle devient $\frac{\delta k h v^2 \sin.^2\theta}{2\varphi}$. Si on nomme a la hauteur due à la vîtesse v, on aura $v = \sqrt{2\varphi a}$, ou $a = \frac{v^2}{2\varphi}$, valeur qui, substituée dans l'expression précédente, le change en $\delta k h a \sin.^2\theta$.

935. On voit que, dans l'hypothese que nous venons de poser, la pression, évaluée perpendiculairement à la ligne k, est proportionnelle à la projection kh, ou à la surface choquée lorsqu'on évalue le choc perpendiculairement à cette surface, à la hauteur due à la vîtesse ou au quarré de cette vîtesse, et au quarré du sinus de l'angle que fait la surface choquée avec la direction du mouvement.

Voici une autre maniere de déterminer la pression qui donne les mêmes rapports.

Autre maniere de déterminer les formules ordinaires de pression.

936. Qu'un corps Q, dont la surface de la face antérieure est égale à S, se meuve dans un fluide avec une vîtesse v, et dans une direction qui fasse un angle θ avec la surface S ; la vîtesse de ce corps, dans le sens perpendiculaire à la surface S, sera $v \sin.\theta$: il déplacera, pendant l'instant dt, un prisme fluide qui aura pour hauteur l'espace parcouru $vdt \sin.\theta$, S pour base, et dont la masse sera par conséquent $\delta S v dt \sin.\theta$. Supposons maintenant que ce prisme fluide peut être assimilé à un corps

Digitized by Google

parfaitement dur, de même masse, rencontré et choqué par le corps Q, supposé aussi parfaitement dur; la masse $\delta S v dt \sin.\theta$ acquerra la vîtesse $v \sin.\theta$ et la quantité de mouvement $\delta S v^2 dt \sin.^2\theta$, qu'elle fera par conséquent perdre au corps Q. Supposons encore que le prisme fluide choqué s'anéantisse après le choc, et qu'un autre prisme fluide lui succede pour produire le même effet, l'expression $\delta S v^2 dt \sin.^2\theta$, dans laquelle v est supposée variable, sera la valeur de la diminution instantanée de la quantité de mouvement du corps Q, produite par la pression (25) du fluide, et $\frac{\delta S v^2 \sin.^2\theta}{Q}$ sera la force retardatrice.

Soit a la hauteur due à la vîtesse v, on a $v^2 = 2\varphi a$, et la quantité $\delta S v^2 \sin.^2\theta$ devient $2\varphi\delta S a \sin.^2\theta$; ainsi la pression d'un même fluide est, dans ce cas-ci, comme dans le précédent, proportionnelle à la surface antérieure, à la hauteur due à la vîtesse ou au quarré de la vîtesse, et au quarré du sinus de l'angle que fait la surface choquée avec la direction du mouvement. Tel est le théoreme fondamental de ce que nous appellons la théorie ordinaire de la résistance des fluides.

Ce qu'on entend par angle d'incidence, choc perpendiculaire et choc oblique.

937. L'angle que fait la surface choquée avec la direction du mouvement, se nomme communément *angle d'incidence;* le choc est appellé *perpendiculaire* lorsque cet angle est droit, et *oblique* lorsque cet angle n'est pas droit.

Volume d'eau dont le poids équivaut à la pression donnée par la théorie ordinaire; différents sentiments sur la mesure absolue de ce volume.

938. Dans le cas du choc perpendiculaire, l'expression de l'art. (934) devient $\delta S a$; c'est la masse d'un prisme fluide qui auroit pour base la surface choquée ou pressée S, pour hauteur la hauteur a due à la vîtesse du corps, et dont le poids mesure la pression, d'après la notation dont nous sommes convenus art. (174). L'expression de l'art. (936), trouvée en second lieu, devient, dans la même hypothese du choc perpendiculaire, $2\varphi\delta S a$, et c'est le double du poids que donne la valeur trouvée en premier lieu.

939. Les différents auteurs qui ont traité de la résistance des fluides et adopté la théorie ordinaire, ont été partagés entre l'une et l'autre des deux valeurs absolues données dans l'article précédent. Il paroît en général que les expériences sont plus favorables à la premiere valeur qu'à la seconde, ainsi que nous le verrons bientôt. Quant au choc oblique, la mesure réelle absolue s'écarte beaucoup de la valeur qui résulte des expressions des art. (934) et (936).

Difficultés auxquelles est sujette la théorie ordinaire du choc des fluides.

940. On ne peut pas se dissimuler que la théorie qu'on vient d'exposer porte, d'un côté, sur une hypothese physiquement

inadmissible; car la maniere dont on y suppose que le mouvement est retardé par la percussion d'une petite tranche fluide qui s'anéantit après avoir produit son effet, ne peut pas même passer pour une approximation; d'un autre côté, cette théorie ne tient aucun compte de plusieurs circonstances qui doivent influer sensiblement sur le mouvement: en effet, on ne fait entrer dans la valeur de la pression d'une différencio-différentielle que la vîtesse du corps ou celle du fluide, sans avoir égard à la hauteur du fluide au-dessus de cette différencio-différentielle; il s'ensuivroit de-là que, dans le cas du repos, la pression de cet élément seroit nulle; ce qui est contraire à ce que nous avons vu art.(757). La pression, dans le cas de l'équilibre, ne doit être qu'un cas particulier de celle qui a lieu dans le cas du mouvement, et c'est ce que donne la formule fondamentale $p = \frac{1}{2}\delta\omega\left[(2\varphi h)^{\frac{1}{2}} \pm v\right)^2$ de l'art.(873), qui, lorsque $v = 0$, devient $p = \varphi\delta\omega h$, conformément à ce qui est démontré article (557). Ensuite la théorie ordinaire de la résistance des fluides ne considere que la face antérieure du corps choqué, sans avoir égard à la forme de côtés et de l'arriere de ce corps: il est cependant certain qu'il s'exerce une pression sur les faces latérale et postérieure du corps, qui doit se composer avec la pression de la face antérieure, et que ce qu'on appelle *la résistance du fluide*, ou *pression résultante*, doit être égal à la résultante des pressions qui s'exercent sur toutes les faces décomposées dans le sens où l'on considere la résistance: il est inutile d'observer que nous ne considérons ici que le mouvement progressif.

Ajoutons que la théorie dont il s'agit ne rend point raison, comme celle de don George Juan, des dénivellations qui ont lieu, et que la nature nous offre constamment. On sentira aisément, par tous les motifs que nous venons d'exposer, et par beaucoup d'autres qui peuvent se présenter à l'esprit, combien il étoit essentiel, dans des recherches aussi importantes que celles qui sont relatives à la résistance des fluides, de donner, outre la théorie ordinaire, une autre théorie plus adaptée aux phénomenes, et qui, quoique laissant des choses à desirer pour la pratique, n'en est pas moins un modele raisonnable de la maniere dont la question doit être traitée. Il est intéressant, dans un ouvrage destiné à présenter, sous tous les aspects, l'état actuel de la science, de s'attacher sur-tout aux méthodes qui réunissent à l'utilité actuelle la propriété précieuse de pouvoir servir de base aux progrès ultérieurs des connoissances.

Résultats

Digitized by Google

Résultats des expériences relatives à la théorie ordinaire de la résistance des fluides.

Expériences défavorables à la théorie ordinaire du choc des fluides.

941. L'auteur de l'*Examen maritime*, en donnant les résultats des expériences rapportées art. (928 et suivants), et ceux de sa théorie, compare les uns et les autres avec les résultats donnés par la théorie ordinaire, exposée dans le chapitre précédent, à laquelle cette comparaison n'est point favorable.

Pour s'en convaincre, il n'y a qu'à reprendre les valeurs des expériences des articles cités, et les substituer dans la formule δSa, ou $\frac{\delta Sv^2}{2g}$ de l'art. (938); elle donnera pour la valeur de la pression, dans la premiere expérience, $\frac{1000 \times 1 \times 4}{64} = 62,5$ onces $= 3$ livres 14,5 onces (*); et pour la valeur de la pression dans la seconde expérience, $\frac{1000 \times 2 \times \frac{9}{4}}{64} = 56$ onces $= 3,5$ livres.

942. On voit par ces résultats que le choc direct, calculé par la théorie ordinaire, est très éloigné de ce qu'ont donné les expériences, puisque, dans la premiere, la pression réelle a été de 15,5 livres, au lieu de 3,9 livres, données par le calcul, et que, dans la seconde, la pression réelle a été de 26,25 livres, au lieu de 3,5 livres, données par le calcul. Il est à remarquer que la seconde expérience donne une pression plus grande que la premiere, d'une quantité qui surpasse les limites des erreurs présumables, et que cependant l'une et l'autre des formules qui résultent de la théorie ordinaire (934 et 938) donnent au contraire la seconde pression plus petite que la premiere. Il est évident, d'après cela, que le rapport des pressions, donné par cette théorie, doit être très différent du rapport des pressions observées; car ce rapport, qui est celui des produits des surfaces choquées par les quarrés des vîtesses, est égal à $1 \times 4 : 2 \times \frac{16}{9}$, ou $9 : 8$, au lieu que le rapport des pressions observées est égal à $15,5 : 26,25$, ou à $9 : 15,24$.

943. Les résultats des expériences de M. J. Smeaton, rapportés art. (932 et 933), different aussi de ceux calculés d'après la théorie ordinaire. Reprenons la notation de l'article cité; puisque la pression de l'aube est proportionnelle au quarré de la vîtesse, qui, d'après ce qui est dit art. (902), doit être exprimée par la différence des vîtesses de l'eau et de l'aube, ou

(*) Voyez sur ces calculs la note de l'article (928)

Digitized by Google

par $U - u$, le moment de l'impulsion de l'eau sera égal à $AR(U-u)^2$, A étant un coëfficient constant. Substituant cette quantité à la quantité $RA(U-u)$ dans l'équation $RA(U-u) = Pr + Pn + F$, de l'art.(933), il vient $AR(U-u)^2 = Pr + Pn + F$; d'où on tire

$$P = \frac{AR(U-u)^2 - F}{n+r}, \text{ et } P \times \frac{r}{R} u = \frac{r}{R} \cdot \frac{ARn(U-u)^2 - Fn}{n+r}.$$

Différenciant le second membre par rapport à u, et égalant la différentielle à zéro, on a l'équation $AR(U^2 - 4Uu + 3u^2) - F = 0$, qui donne $u = \frac{2}{3}U - \left(\frac{F}{3AR} + \frac{1}{9}U^2\right)^{\frac{1}{2}}$, expression de la vîtesse que doivent prendre les aubes de la roue pour que la machine produise le plus grand effet. Si on suppose $F = 0$, ou le frottement nul, on aura $u = \frac{1}{3}U$ (*), et en général, en ayant égard au frottement, u sera toujours plus petit que $\frac{1}{3}U$, c'est-à-dire que la vîtesse des aubes sera moindre que le tiers de celle du fluide. Ce résultat n'est point d'accord avec les expériences de M. J. Smeaton: car examinant la colonne 12 de la page 115 du volume des *Transactions philosophiques*, cité art. (932), on ne trouve pas une seule expérience, parmi les 27 qui y sont exposées, qui ne donne la vîtesse des aubes plus grande que le tiers de la vîtesse de l'eau: il y en a même quelques unes qui donnent la vîtesse des aubes moitié de celle de l'eau.

Expériences sur la résistance des fluides faites par MM. d'Alembert, le marquis de Condorcet et l'abbé Bossut.

944. Quelque peu favorables que paroissent les expériences précédentes à la loi du quarré des vîtesses, pour le choc direct, on peut cependant citer, en faveur de cette loi, des expériences nombreuses faites avec grand soin par des savants dont l'autorité est très respectable. M. Turgot, contrôleur général des finances, chargea, au commencement de l'année 1775, MM. d'Alembert, le marquis de Condorcet, et l'abbé

(*) Ce rapport de 1 à 3 a été d'abord déterminé par M. Parent, *Mém. de l'académie des sciences*, adopté ensuite par plusieurs auteurs, et entre autres par M. Bélidor, qui en parle dans son *Architecture hydraulique*, tom. I, page 248, avec une sorte d'enthousiasme. C'est le même rapport qui résulte de la formule donnée art. (498), pour évaluer l'effet d'une machine, ainsi qu'on peut le voir art. (499). Il faut, pour juger de l'identité, observer, 1°. que nous avons appellé *vîtesse du moteur* (491) la vîtesse du point où il exerce son action; la vîtesse u des aubes représente donc ici celle du moteur, et la vîtesse de la résistance est $\frac{r}{R} u$: 2°. que si la vîtesse u des aubes devenoit la vîtesse U du fluide, ce fluide n'exerceroit plus aucune action sur les aubes; et en effet, U est, dans la formule de l'art. (498), la vîtesse à laquelle le moteur étant parvenu (496), son effort devient nul.

Il ne faut pas perdre de vûe que la formule de l'art. (496), pour calculer l'effort du moteur, et de laquelle résulte le rapport de M. Parent, n'a été donnée qu'en attendant une détermination plus exacte, et pour avoir provisoirement un moyen de fournir quelques exemples de l'application des principes généraux exposés art.(493).

Digitized by Google

Bossut, d'examiner les moyens de perfectionner la navigation dans l'intérieur du royaume, et ils regarderent le problême de la résistance des fluides comme le premier et le principal objet de leurs recherches. Ils firent en conséquence des expériences, à Paris, sur une grande piece d'eau située dans l'enceinte de l'École militaire, pendant les mois de juillet, août et septembre de l'année 1776. Ces expériences ont été rédigées par M. l'abbé Bossut, et publiées, en 1777, avec tous les détails nécessaires pour en faciliter l'intelligence et l'application : elles ont principalement pour objet la résistance directe, et sont divisées en deux grandes classes, dont l'une comprend la résistance des fluides indéfinis, et l'autre la résistance des fluides dans des canaux étroits.

Comment ces expériences ont été faites.

945. Pour faire ces expériences, on a fait courir successivement sur l'eau plusieurs bateaux ou vaisseaux de différentes dimensions et de différentes formes, et on a mesuré le temps de leur mouvement avec une pendule à demi-secondes. Ce mouvement étoit produit par la descente d'un poids qui, au moyen d'un cordon et de différentes poulies de renvoi, faisoit avancer le bateau. On conçoit aisément que le mouvement devoit être accéléré dans les premiers instants de la descente du poids ; mais bientôt le bateau acquéroit une vîtesse telle que la résistance de l'eau, relative à cette vîtesse, se trouvoit en équilibre avec la force motrice du poids due à la pesanteur, le frottement, la résistance de l'air, etc. ; ce dont on jugeoit en comparant les espaces parcourus avec les temps employés à les parcourir : le mouvement devenoit alors sensiblement uniforme, et la résistance de l'eau avoit pour mesure le poids employé à produire le mouvement, moins les petits obstacles provenants de la machine et de la résistance de l'air.

Il résulte de ces expériences, que les rapports des pressions observées est, relativement aux vîtesses, sensiblement le même que celui des pressions calculées par la théorie ordinaire.

Les chapitres II, III et IV, de l'ouvrage publié en 1777, contiennent les résultats absolus des expériences. Le chapitre V contient la comparaison de ces résultats avec ceux donnés par la théorie ordinaire. On y trouve deux tables, dont les quatrieme et cinquieme colonnes présentent les résistances calculées et les résistances observées. Les calculs sont faits en prenant, pour chaque bateau, une des résistances observées qui sert d'unité ou de base, et de laquelle on déduit toutes les autres, dans l'hypothese que les résistances sont comme les quarrés des vîtesses. Les résistances ainsi déduites different généralement assez peu des résistances observées : on en pourra juger par la table suivante, qui contient les rapports entre les

Digitized by Google

résistances observées et calculées des bateaux n°s 1 et 2, dont la proue étoit un plan parallélogrammique vertical et perpendiculaire à la section longitudinale. Le nombre 12 sert de base ou de module pour les expériences faites avec le n° 1, et le nombre 24 sert de module pour les expériences faites avec le bateau n° 2.

VAISSEAU, n° 1.			VAISSEAU, n° 2.		
Demi-secondes employées à parcourir uniformém. 20 pieds.	Résistances calculées.	Résistances observées.	Demi-secondes employées à parcourir uniformém. 20 pieds.	Résistances calculées.	Résistances observées.
17, 08	12,00	12	21, 11	16,16	16
15, 90	13,84	14	18, 92	20,11	20
14, 84	15,89	16	17, 32	24,00	24
14, 00	17,86	18	16, 12	27,70	28
13, 50	19,21	20	15, 12	31,49	32
12, 75	21,53	22	14, 19	35,75	36
12, 45	22,58	24	13, 68	38,47	40
			13, 25	41,01	44
			12, 59	45,42	48

Observations de M. l'abbé Bossut sur les variations dont ce rapport est susceptible.

946. On voit, dit M. l'abbé Bossut dans des réflexions qui suivent les deux tables, dont la précédente fait partie, « que les « résistances d'une même surface, mue avec différentes vîtesses « dans un fluide indéfini, suivent à-peu-près la raison des « quarrés des vîtesses. Cette loi s'observe tant pour la résistance « directe que pour les résistances qui proviennent des chocs « obliques. Mais il faut remarquer qu'à la rigueur la résistance « augmente en plus grand rapport que le quarré de la vîtesse. « La raison physique de cette augmentation de rapport est fa- « cile à trouver : car aussitôt que le corps flottant vient à se « mouvoir, le fluide est obligé de se diviser et de céder pour « lui faire place. Or l'eau ne peut pas se prêter, dans un ins- « tant indivisible, au mouvement du bateau. Dans le commen- « cement de ce mouvement, la vîtesse s'accélere par degré. « Tant qu'elle est fort petite, l'eau se détourne facilement, et « coule le long des parois du corps flottant, de maniere que le « fluide demeure de niveau, au moins sensiblement, de l'avant « à l'arriere du corps dont il s'agit : mais à mesure que la vîtesse « augmente, le fluide a plus de peine à se détourner ; il s'amon- « celle au-devant de la proue, il y forme une espece de proue « fluide qui a plus ou moins d'étendue, selon que la vîtesse est

Digitized by Google

« plus ou moins grande, et que la proue solide a plus ou moins « de largeur ; de plus, le fluide s'abaisse vers la partie posté- « rieure du bateau : ce double effet est d'autant plus sensible, « toutes choses égales d'ailleurs, que la vîtesse est plus grande. « Ainsi l'augmentation de vîtesse doit faire augmenter la résis- « tance que le bateau éprouve à diviser le fluide. »

Ces observations favorisent la théorie de don George Juan.

947. Ces réflexions de M. l'abbé Bossut viennent à l'appui de la théorie de don George Juan ; car elles tendent à corriger, d'après l'expérience, les formules ordinaires, d'erreurs produites par des effets ou circonstances physiques qui entrent essentiellement dans la composition des formules de l'auteur espagnol. Ces effets sont la dénivellation du fluide à l'avant et à l'arriere du corps, qui, comme on a vu (908), servent à déterminer les constantes des intégrales qui donnent la pression des surfaces.

Expériences sur les pressions de différentes surfaces sous une même vîtesse.

948. La loi du quarré des vîtesses étant ainsi établie pour une même surface, M. l'abbé Bossut examine si les résistances, sous une même vîtesse, suivent les raisons des surfaces. Il fait une distinction entre les surfaces également ou inégalement enfoncées dans le fluide ; il trouve, eu égard aux *remous* ou dénivellations, que, pour les premieres, la résistance augmente dans une raison un peu plus grande que n'augmente l'étendue de la surface, et que le cas contraire a lieu pour les secondes.

Valeur assignée par M. l'abbé Bossut à la résistance directe et perpendiculaire d'une surface plane.

949. M. l'abbé Bossut cherche ensuite à déterminer, par le moyen de ses expériences, quelle est la valeur absolue de la résistance perpendiculaire et directe qu'éprouve une surface qui se meut parallèlement à elle-même. Il a égard, dans cette détermination, au frottement et à la résistance de l'air, et la conclusion de ses comparaisons et de ses calculs donne, en dernier résultat, une mesure de la résistance cherchée, conforme à celle qu'on déduiroit de la premiere des formules de l'article (938) ; ainsi ce résultat est que, dans la pratique, on peut supposer, sans craindre d'erreur sensible, que *la résistance perpendiculaire et directe d'une surface plane qui se meut parallèlement à elle-même dans un fluide indéfini, est égale au poids d'une colonne du même fluide, laquelle auroit pour base la surface choquée, et pour hauteur celle qui est due à la vîtesse avec laquelle se fait la percussion.*

Conclusion générale de ses expériences sur la résistance des fluides indéfinis.

950. Enfin sa conclusion générale des expériences faites sur la résistance des fluides indéfinis est,

1°. *Que les résistances qu'éprouve un même corps de figure quelconque qui divise un fluide avec différentes vîtesses, sont*

Digitized by Google

sensiblement proportionnelles aux quarrés de ces vîtesses; ce qui est suffisamment conforme à la théorie.

2°. *Que les résistances directes et perpendiculaires des surfaces planes sont sensiblement proportionnelles* (pour une même vîtesse) *aux étendues de cette surface; ce qui est encore assez conforme à la théorie.*

3°. *Que les résistances qui proviennent des mouvements obliques ne diminuent pas, à beaucoup près, toutes choses égales d'ailleurs, dans la raison des quarrés des sinus des angles d'incidence; que par conséquent, sur ce troisieme point, la théorie ordinaire de la résistance des fluides doit être entièrement abandonnée lorsque les angles d'incidence sont petits, puisqu'alors elle donneroit nécessairement des résultats très fautifs. On voit aussi qu'elle ne peut pas être employée pour trouver le solide de la moindre résistance, ni en général pour déterminer aucune courbe propre à remplir un objet proposé, puisque, dans ces sortes de problêmes, la loi de la courbure est un élément inconnu: mais pour les cas où les angles d'incidence seroient grands, comme dans l'intervalle de 50 à 90 degrés, on peut employer la théorie ordinaire comme un moyen d'approximation, en observant qu'elle donnera, pour les résistances, des quantités un peu moindres qu'on ne les trouveroit par l'expérience, et d'autant moindres, que les angles s'éloigneront davantage de 90 degrés.*

4°. *Que la mesure de la résistance directe et perpendiculaire d'une surface plane, dans un fluide indéfini, est le poids d'une colonne du fluide qui a pour base cette surface, et pour hauteur la hauteur due à la vîtesse.*

Conclusion particuliere des expériences sur la résistance des fluides dans les canaux étroits, relative à la percussion de l'eau qui coule dans un coursier.

951. Les expériences sur la résistance des fluides dans les canaux étroits ont conduit M. l'abbé Bossut à des conclusions qui intéressent particulièrement la navigation, et dont nous nous occuperons dans la suite. Nous nous contenterons de citer celle qui est relative à la résistance de l'eau dans un coursier.

La résistance ou la percussion, dans un coursier qui conduit l'eau contre les ailes d'une roue, est plus grande, et à-peu-près double de celle qui a lieu dans un fluide indéfini.

Expériences faites par MM. le marquis de Condorcet et l'abbé Bossut sur la résistance oblique des fluides.

952. La question de la résistance oblique des fluides ne formoit pas l'objet principal du travail fait en 1776 par MM. d'Alembert, le marquis de Condorcet, et l'abbé Bossut : ils ne l'avoient traitée qu'incidentellement; mais à raison de l'importance de cette théorie, MM. l'abbé Bossut et le marquis de

Digitized by Google

Condorcet entreprirent, en 1778, « une nouvelle suite d'expé-« riences destinées en grande partie à découvrir la loi suivant « laquelle diminue, dans un fluide indéfini tel que la mer, la « résistance qu'éprouve une proue angulaire à mesure que « l'angle de cette proue devient plus aigu. »

Ces expériences ont été faites dans un vaste réservoir situé sur le côté nord des anciens boulevards de Paris, dans le prolongement de la vieille rue du Temple. On s'est servi de bateaux de différentes formes, mis en mouvement par l'action d'un poids, comme ceux dont nous avons déja parlé, et au moyen d'une machine à-peu-près semblable. Tous ces détails se trouvent dans l'*Hydrodynamique* de M. l'abbé Bossut, tome II, chap. 17.

Tableau contenant les résultats de 69 de ces expériences.

953. Voici le tableau des 69 expériences de M. l'abbé Bossut sur les proues angulaires simples. Les cinq premieres ont été faites avec un bateau qui avoit la forme d'un parallélipipede rectangle, dont la longueur étoit de quatre pieds, la largeur de deux pieds, l'enfoncement dans le fluide de deux pieds, et la hauteur de la partie saillante hors de l'eau, 7 pouces environ.

Les 64 expériences qui suivent les précédentes ont été faites avec 14 bateaux prismatiques MO (*fig.* 162), ayant une proue isoscele MQN, dont l'angle Q du sommet varie de 12 en 12 degrés; la longueur MP de chacun d'eux = 4 pieds; la largeur MN = 2 pieds; l'enfoncement dans l'eau = 2 pieds; la partie saillante hors de l'eau = 7 pouces environ.

Les titres des colonnes indiquent suffisamment leur objet; la seconde donne, pour les 25 premieres expériences, la hauteur de la dénivellation vers le milieu de la proue, qui est le point où, d'après ce que nous avons dit art. (907), cette hauteur est la plus grande. Nous nommons, avec M. l'abbé Bossut, cette dénivellation *remou central*.

Digitized by Google

Valeur de l'angle MQN (*fig.* 162).	Remou central.	Poids moteur exprimé en livres.	Secondes employées à parcourir uniformément 96 pieds.	Nos des expériences.
		61,8	78,08	1
		112,5	57,51	2
180 degrés.	2 1/3 pouces	162,5	47,44	3
		212,5	41,49	4
		262,6	37,32	5
		62,5	77,50	6
		112,5	56,95	7
168	2 1/3 pouces	162,5	47,22	8
		212,5	41,26	9
		262,5	37,12	10
		62,5	75,09	11
		112,5	56,15	12
156	2 1/3 pouces	162,5	46,44	13
		212,5	41,03	14
		262,5	36,52	15
		62,5	73,38	16
		112,5	54,75	17
144	21 lignes	162,5	45,35	18
		212,5	39,58	19
		262,5	37,57	20
		60,5	72,08	21
		111,5	53,25	22
132	.....	162,5	43,75	23
		212,5	38,26	24
		262,5	34,30	25
		62,0	68,32	26
		112,5	50,84	27
120	.....	162,5	41,84	28
		212,5	36,62	29
		262,5	32,77	30
		61,5	65,85	31
		112,5	48,75	32
108	.....	162,5	39,50	33
		212,5	34,46	34
		262,5	31,05	35

Valeur

Digitized by Google

Valeur de l'angle MQN (*fig.* 162).	Remou central.	Poids moteur exprimé en pieds.	Secondes employées à parcourir uniformément 96 pieds (*).	Nos des expériences.
96	21 lignes	60, 5	63, 00	36
		110, 5	46, 45	37
		162, 5	38, 05	38
		212, 5	32, 66	39
		262, 5	29, 27	40
84	.....	60, 5	60, 55	41
		110, 5	44, 56	42
		162, 5	35, 78	43
		212, 5	31, 25	44
		262, 5	27, 51	45
72	.....	62, 5	57, 50	46
		112, 5	42, 75	47
		162, 5	34, 85	48
		212, 5	29, 65	49
		262, 5	25, 86	50
60	.....	60, 5	55, 45	51
		112, 5	40, 04	52
		162, 5	33, 05	53
		212, 5	28, 25	54
		262, 5	24, 77	55
48	.....	62, 5	52, 51	56
		112, 5	38, 05	57
		162, 5	31, 61	58
		212, 5	27, 56	59
		262, 5	24, 30	60
36	.....	62, 5	51, 15	61
		112, 5	36, 96	62
		162, 5	30, 53	63
24	.....	61, 5	49, 48	64
		112, 5	35, 76	65
		162, 5	20, 23	66
12	.....	62, 5	37, 04	67
		112, 5	26, 50	68
		162, 5	22, 51	69

(*) L'espace parcouru par le poids du moteur, dans les trois dernieres expériences, est de 72 pieds.

Digitized by Google

Formule déduite de ces expériences pour évaluer la résistance oblique des fluides.

954. Ces expériences faites, il a fallu découvrir la loi qui les lioit entre elles, ou donner une formule approchée qui pût en tenir lieu. Pour cela, M. l'abbé Bossut représente par le nombre 10000 la résistance perpendiculaire et directe de la base NM; nommant x l'angle NMQ, la résistance que devroit éprouver, selon la formule de l'art. (934), la proue angulaire MQN, dans la direction QR, perpendiculaire à MN, est égale à 10000 cos.$^2 x$, et il s'agit de trouver la correction à faire à cette formule, ou le terme qu'on doit y ajouter, pour avoir la résistance vraie. Observons que lorsque l'angle Q varie de 12 degrés, chacun des angles M et N varie de 6 degrés, et nommons q cette derniere variation: M. l'abbé Bossut trouve, par différentes considérations et comparaisons, que le terme additif cherché doit être $3,153\left(\frac{x}{q}\right)^{3,25}$, x et q étant exprimés en parties décimales du rayon qu'on suppose = 1; ainsi la résistance de la proue MQN, dans la direction QR, est égale à $10000\cos.^2 x + 3,153\left(\frac{x}{q}\right)^{3,25}$. M. l'abbé Bossut suppose que la résistance directe absolue de MN s'évalue par la regle de l'art. (949).

Cette formule cesse d'être exacte lorsque les angles d'incidence sont petits.

Cette formule, ajoute M. l'abbé Bossut, est suffisamment exacte pour tous les cas où l'angle d'incidence du fluide sur les faces de la proue est un peu grand: mais elle n'est pas admissible pour de petits angles; car, par exemple, lorsque l'angle d'incidence est de 12 degrés, le terme $3,153\left(\frac{x}{q}\right)^{3,25}$ est trop fort de près d'un quart; la formule s'éloigne encore plus de la vérité pour de très petits angles d'incidence.

Expériences de M. le chevalier du Buat, sur la résistance des fluides.

955. On trouve des recherches intéressantes sur la résistance de l'eau et de l'air dans les Principes d'hydraulique de M. le chevalier du Buat, édition de 1786, part. III. Comme nous aurons occasion de revenir souvent sur cette matiere dans la suite de cet ouvrage, nous nous réservons de faire usage de ces expériences, de quelques autres, ainsi que de celles qui sont relatives au mouvement des roues mues par le choc ou par le poids de l'eau, lorsque nous y serons ramenés par quelque objet d'application; et par le même motif nous ne dirons rien, dans ce volume, de la résistance absolue de l'air. Nous aurons ainsi occasion de comparer les différentes formules données dans les chapitres précédents, avec des expériences très nombreuses et très variées, et de juger de leur conformité avec l'expérience.

Digitized by Google

Théorie générale et rigoureuse du mouvement des fluides.

Utilité qu'on peut retirer de la connoissance de la théorie rigoureuse du mouvem. des fluides.

956. Nous avons promis, art. (698), de donner la théorie générale et rigoureuse du mouvement des fluides ; nous remplirons d'autant plus volontiers notre promesse, que d'habiles géometres s'occupent en ce moment à tirer parti des équations qui résultent de cette théorie générale. Il sera donc intéressant pour les lecteurs, dans le cas où ces géometres rempliroient la tâche difficile qu'ils se sont imposée, de trouver d'avance les principes nécessaires pour pouvoir profiter de ce travail, exposés avec plus de détails élémentaires qu'on n'en trouve dans les autres ouvrages qui contiennent ces principes. Il est utile, en présentant le tableau de l'état actuel des connoissances dans des matieres aussi intimement liées à l'objet de cet ouvrage, de faciliter les moyens de substituer une marche rigoureuse et directe à des principes hypothétiques et précaires, dans le cas où, franchissant l'intervalle qui sépare les découvertes théoriques des applications pratiques, on frayeroit un chemin pour arriver des unes aux autres.

Insuffisance du calcul intégral ordinaire pour résoudre le problème qu'elle comporte ; quelle est l'espece de calcul nécessaire pour cela ; géometres qui ont trouvé et employé ce calcul.

957. Les géometres qui s'étoient occupés de la théorie des fluides, depuis Newton jusqu'à MM. Euler et d'Alembert, avoient fait de grands efforts pour soumettre leur mouvement à des formules générales indépendantes de toute hypothese. Malheureusement leurs tentatives s'étoient trouvées infructueuses, malgré l'emploi du calcul intégral, qui, quoiqu'ayant fait changer de face aux sciences physico-mathématiques, ne prêtoit cependant à leur génie que des secours insuffisants pour attaquer de pareilles questions. Ces questions n'ont été résolues qu'après l'invention d'une méthode de calcul plus générale encore que la précédente, celle du calcul des équations aux différences partielles, dont M. Euler a enrichi les sciences, et que M. d'Alembert a appliqué le premier à la théorie des fluides (*). La découverte de ce calcul, aussi étonnante que celle du calcul différentiel, et qui, ainsi que le remarque M. le marquis de Condorcet, n'a eu moins d'éclat que parcequ'on se servoit de signes déja connus pour représenter des idées nouvelles; cette découverte, disons-nous, a fourni aux deux géometres dont on vient de parler, le moyen de renfermer toute la théorie des fluides dans des formules qui ne sont restreintes par aucune

Tous les problèmes du mouvem. des fluides, et même tous ceux de la mécanique, sont actuellement mis en équation.

(*) Voyez le Discours préliminaire de l'Introduction à l'étude de l'Astronomie physique, par M. Cousin.

Digitized by Google

hypothese particuliere. Ainsi cette partie de la mécanique, considérée théoriquement, paroît n'avoir plus rien à desirer. Ajoutons qu'on en peut dire autant de toute la science du mouvement et de l'équilibre, pris dans l'acception la plus générale, depuis que M. de la Grange a donné un traité où toutes les questions que comporte cette science sont entièrement livrées à l'analyse, et ne présentent plus d'autres difficultés que celles qui sont inséparables de l'analyse elle-même.

État de la question ; quelles sont les données et les inconnues du problème.

958. Lorsqu'une masse fluide, élastique ou incompressible, est en mouvement, on peut toujours rapporter la position de chacune de ses molécules à trois co-ordonnées, paralleles à trois axes perpendiculaires entre eux et de position fixe. Le lecteur doit être familier avec cette maniere de considérer des points dans l'espace que nous avons employé en plusieurs endroits de cet ouvrage (287). Examinons quelles sont, dans le mouvement de chaque molécule, les choses données et les choses à déterminer.

Les choses données sont 1°. la nature du fluide, de laquelle dérive une certaine relation entre la densité, la chaleur et la pression ; 2°. les puissances qui animent la molécule qu'on est censé connoître tant en quantité qu'en direction.

Les choses à déterminer sont 1°. la vîtesse de la molécule ; 2°. sa direction ; 3°. sa pression ; 4°. sa densité ; le tout pour un point et dans un instant quelconque. La chaleur est supposée constante.

Nombre d'équations que comporte la solution du problème.

959. La détermination de la vîtesse et de la direction comporte trois équations ; car on sait qu'il en faut généralement deux pour déterminer la direction d'une ligne dans l'espace, et la vîtesse en exige une troisieme : mais comme cette vîtesse et cette direction sont connues quand on connoît les vîtesses parallèlement aux trois axes co-ordonnés (394), on peut, aux deux premieres choses à déterminer, substituer les trois vîtesses paralleles aux axes co-ordonnés, lesquelles, avec la pression et la densité, forment cinq inconnues, et exigent par conséquent cinq équations.

Équation qui doit résulter de la condition que le fluide est élastique ou incompressible.

960. Pour trouver ces équations, il faut d'abord examiner si le fluide est élastique ou incompressible, c'est-à-dire si une molécule, d'un instant à l'autre, et en passant d'un lieu dans un autre, change ou ne change pas de densité ; l'expression de l'une ou de l'autre de ces propriétés fournit une équation. Ensuite considérant la pression qu'éprouve la molécule comme une puissance qui la sollicite, et dont l'action se combine avec

Digitized by Google

celle des autres puissances auxquelles elle est soumise; on peut regarder cette molécule comme mue librement, et chercher, sous ce point de vue, les équations qui déterminent son mouvement parallèlement aux trois axes co-ordonnés, ainsi qu'on l'a fait dans la dynamique (396), ce qui fournit trois équations. Enfin la connoissance de la nature du fluide donne une derniere équation qui exprime la relation entre la densité, la pression et la chaleur; relation dont l'expérience doit donner la loi (*).

Équations relatives aux différentes pressions et puissances qui agissent sur chaque molécule fluide.

Equation fournie par la rotation entre la densité, la pression et la chaleur.

961. Les cinq équations dont nous venons de parler doivent donner les inconnues en fonctions des co-ordonnées x, y, z, et du temps t, de telle sorte que les intégrations étant supposées faites, et rapportant les co-ordonnées à un point déterminé de l'espace occupé par le fluide, ce qui leur assigne à chacune une valeur particuliere et connue, on puisse, pour un instant déterminé, ou pour une valeur donnée de t, n'avoir dans ces équations que cinq inconnues et des quantités constantes. On voit que pour que cette condition ait lieu, il faut que les puissances qui animent chaque molécule soient exprimées en fonctions de x, y, z et t, ce qui peut toujours se supposer.

Les inconnues du problème doivent être exprimées en fonctions des co-ordonnées et du temps.

962. Nommant p la pression à un point quelconque, s la densité, v, v' et v'', les vîtesses parallèlement à x, y et z, on voit, d'après ce qui précede, que les variations de chacune des quantités p, s, v, v', v'', seront assujetties à celles de x, y, z et t. Par exemple, p étant supposé dans une équation de laquelle on aura éliminé les autres inconnues s, v, v' et v'', cette équation donnera, pour la valeur de p, une quantité composée de x, y, z, t, et de constantes combinées d'une maniere quelconque. Ainsi, pour avoir la différentielle de p, ou dp, il faudra, d'après les regles connues du calcul différentiel, différencier la quantité à laquelle p est égale d'abord par rapport à x, ce qui donnera une quantité qu'on est convenu de désigner par $\left(\frac{dp}{dx}\right)dx$, ensuite par rapport à y, z et t, ce qui donnera les quantités $\left(\frac{dp}{dy}\right)dy$, $\left(\frac{dp}{dz}\right)dz$, $\left(\frac{dp}{dt}\right)dt$ qu'on nomme différences partielles de p. (Voyez à ce sujet ce que nous avons déja dit art. (538) (avec la note).

Notation pour la différentielle d'une véritable fonction de plusieurs autres.

963. On a donc généralement $dp = \left(\frac{dp}{dx}\right)dx + \left(\frac{dp}{dy}\right)dy +$

Observation sur la maniere de considérer

(*) La relation entre la densité, la pression et la chaleur comporte à la rigueur plus d'une équation; mais cette discussion est inutile à notre objet; d'ailleurs on la rend à-peu-près inutile en supposant la chaleur constante. Voyez ce que nous avons dit art. (524) *note*.

Digitized by Google

ce que devient la différentielle d'une variable fonction de plusieurs autres, lorsqu'on suppose nulles quelques unes des différences partielles.

$\left(\frac{dp}{dz}\right)dz+\left(\frac{dp}{dt}\right)dt$; mais il y a une observation importante à faire sur cette valeur prise ou dans toute son étendue, ou seulement relativement aux variations d'une partie des quantités t, x, y et z. Lorsqu'on considere dp comme composée des quatre termes $\left(\frac{dp}{dx}\right)dx, \left(\frac{dp}{dy}\right)dy, \left(\frac{dp}{dz}\right)dz$ et $\left(\frac{dp}{dt}\right)dt$, alors elle désigne la variation de pression qui a lieu dans une même molécule pendant l'instant qu'elle emploie à passer d'un lieu dans le lieu infiniment voisin; si on suppose le temps constant, ou $\left(\frac{dp}{dt}\right)dt=o$, alors dp ne désigne plus que la différence simultanée entre la pression qui a lieu à un point, et celle qui a lieu au point infiniment voisin; enfin la pression étant rapportée à un point unique de l'espace, mais à deux instants consécutifs, x, y et z seront constants, et dp ne sera plus exprimée que par $\left(\frac{dp}{dt}\right)dt$, c'est-à-dire qu'elle désignera la différence de pression qu'éprouvent dans le même point deux molécules qui s'y succedent à des intervalles de temps infiniment près.

L'équation relative à la compressibilité ou à l'incompressibilité du fluide.

964. Ces notions établies, nous allons d'abord chercher l'équation relative à la compressibilité ou à l'incompressibilité du fluide: pour cela nous déterminerons deux valeurs de la variation de densité qu'éprouve une même molécule en passant d'un point au point infiniment voisin; et égalant ces deux valeurs, on aura l'équation cherchée.

Nommons u, u' et u'' les vîtesses paralleles à x, y et z, t le temps, et soient (*fig.* 163) AX, AY et AZ, les axes des x, y et z (les plans ZAX et ZAY étant supposés perpendiculaires au plan YAX); soient de plus AP ou FM$=x$; PM ou AF$=y$; PR ou FS$=z$; et supposons d'abord que le fluide est compressible ou élastique: la premiere valeur de la variation de densité se trouvera de la maniere suivante.

Supposons, à une hauteur PR ou FS au-dessus du plan des (x, y), une molécule fluide ayant la forme d'un parallélipipede rectangle, dont trois faces contiguës soient paralleles chacune à chacune, aux trois surfaces YAX, ZAX, ZAY. Soit MM'N'N la projection orthogonale de la face parallele au plan YAX des (x, y), laquelle projection est parfaitement égale à la face projetée, à cause du parallélisme; et soient de plus RR'Q'Q et SS'T'T les projections analogues sur les plans des (z, y) et (z, x), des faces paralleles à ces plans.

Les choses ne peuvent être considérées dans cet état qu'à une

Digitized by Google

époque déterminée; car, pendant l'instant qui suivra cette époque, la molécule parcourra un espace infiniment petit, et les projections de ses faces se trouveront en $mm'n'n$, $rr'q'q$ et $stt's'$; il s'agit, pour trouver la variation de densité, de déterminer celle qu'a subie le volume de la molécule.

Soient $PP' = MM' = RR' = dx$; $FF' = MN = ST = dy$; $RQ = SS' = dz$; le volume de la molécule au commencement de l'instant où l'on considere le mouvement, est $dxdydz$. Pour trouver son volume au bout de cet instant, remarquons d'abord qu'il y a continuité dans toutes les especes de variations qu'entraîne le mouvement instantané de la molécule; d'après cela, si, pendant toute la durée de l'instant dt du mouvement, on conçoit une ligne droite menée du point M au point M', lorsque ces points seront parvenus en m et m', la ligne droite menée de l'un à l'autre fera un angle infiniment petit avec une parallele $m\delta$, à l'axe AX; donc la distance $m'\delta$ sera infiniment petite par rapport à mm'. On en peut dire autant de toutes les paralleles $m''\delta'$, à $\delta m'$, par rapport à leur distance au point m: donc mm' peut être considérée comme une ligne droite. La même démonstration peut s'appliquer à la ligne RR' devenue la ligne rr'; donc le côté de la molécule fluide, dont mm' et rr' sont les projections, est une ligne droite. On prouvera, de la même maniere, que toutes les lignes tirées dans MM' N'N parallèlement à MM' répondent à des lignes droites dans $mm'n'n$, et sur la face inférieure de la molécule; donc cette face est ou un plan gauche, ou une surface plane. Mais elle n'est pas un plan gauche; car on voit, par des raisons absolument semblables à celles rapportées ci-dessus, que les projections mn et st sont des lignes droites, et que toutes les lignes tirées dans MM'N'N parallèlement à MN répondent à des lignes droites dans $mm'n'n$, et sur la face de la molécule dont on vient de parler. Donc les éléments de cette face, pris dans deux sens différents, sont rectilignes; donc cette face est plane. Le même raisonnement s'applique évidemment et sans difficulté aux autres faces: ainsi la molécule, après son mouvement instantané, est encore un solide terminé par des surfaces planes. Il y a plus, ces surfaces sont parallélogrammiques; car les côtés MM', MN et QR, devenus mm', mn et qr, ne font encore qu'un angle infiniment petit avec les axes AX, AY et AZ, auxquels ils étoient d'abord paralleles; et il en est de même de toutes les autres lignes qui terminent les projections de la molécule: donc les quadrilateres $mm'n'n$, $rqq'r'$, $stt's'$, different infiniment peu d'être des

Digitized by Google

parallélogrammes rectangles, et peuvent être regardés comme tels. Mais les faces dont ces quadrilateres sont les projections, forment un angle infiniment petit avec les plans où se trouvent ces quadrilateres : donc les projections et les surfaces projetées sont égales et semblables ; donc la molécule, au bout de son mouvement instantané, est encore un parallélipipede qui a pour faces des parallélogrammes rectangles. Cherchons la valeur des côtés de ce parallélipipede.

Le côté projeté en mm' et rr' est égal à $\left[(mm')^2+(\rho r')^2\right]$, car les lignes mm', $\rho r'$ forment dans l'espace les côtés d'un triangle rectangle dont il est l'hypoténuse. On a ensuite dans le triangle rectangle $m\delta m'$, $(mm')^2=(m\delta)^2+(\delta m')^2$; donc le côté projeté en mm' est égal à $\sqrt{\left[(m\delta)^2+(\delta m')^2+(\rho r')^2\right]}=m\delta$, car on a vu précédemment que $\delta m'$ et $\rho r'$ étoient infiniment petits par rapport à $m\delta$ ou $r\rho$.

Pour trouver la valeur analytique de $m\delta=pp'$, observons que pp' est égal à PP' ou à dx, plus la quantité dont PP' a varié dans le sens de AX. Cette variation est égale à $pp'-$PP' ou à P'$p'-$Pp, c'est-à-dire à la différentielle de Pp par rapport à x. Or Pp est l'espace parcouru par le point M, parallèlement à AX, lorsque ce point M a passé en m; ainsi Pp est l'espace parcouru pendant l'instant dt avec la vîtesse u, et la valeur de cet espace est udt, (24). On a donc $m\delta$ égal à dx, plus la différentielle de udt par rapport à x, qu'on est convenu, comme on sait, de représenter par $\left(\frac{d.udt}{dx}\right)dx$, ou $m\delta=dx+\left(\frac{d.udt}{dx}\right)dx$ $=dx\left[1+\left(\frac{du}{dx}\right)dt\right]$, dt étant supposé constant. On prouvera, par un raisonnement absolument semblable, que le côté projeté en mn et st est égal à $dy\left[1+\left(\frac{du'}{dy}\right)dt\right]$, et que le côté projeté en qr ou ss' est égal à $dz\left[1+\left(\frac{du''}{dz}\right)dt\right]$. Faisant le produit de ces trois côtés, et négligeant les quantités au-dessous du quatrieme ordre, on a, pour le volume de la molécule projetée en $mm'n'n$, la valeur

$$dx\,dy\,dz\left[1+\left(\frac{du}{dx}\right)dt+\left(\frac{du'}{dy}\right)dt+\left(\frac{du''}{dz}\right)dt\right].$$

La densité de cette molécule est égale à sa masse divisée par son

son volume (176), nommant δ' la densité, et m la masse, on a $\delta' = \frac{m}{dx\,dy\,dz\left[1+\left(\frac{du}{dx}\right)dt+\left(\frac{du'}{dy}\right)dt+\left(\frac{du''}{dz}\right)dt\right]}$. Si on désigne ensuite par δ la densité de la molécule projetée en MM'N'N, dont la masse qui ne varie point est égale à m, et dont le volume est égal à $dx\,dy\,dz$, on aura $\delta = \frac{m}{dx\,dy\,dz}$. Substituant cette valeur de $\frac{m}{dx\,dy\,dz}$ dans la valeur de δ', il vient $\delta' = \frac{\delta}{1+\left(\frac{du}{dx}\right)dt+\left(\frac{du'}{dy}\right)dt+\left(\frac{du''}{dz}\right)dt}$. Retranchant δ de cette valeur de δ', réduisant au même dénominateur, et faisant attention que ce dénominateur est composé de l'unité, plus une quantité infiniment petite qui doit disparoître, on a $\delta' - \delta = d\delta = -\left[\left(\frac{du}{dx}\right)dt+\left(\frac{du'}{dy}\right)dt+\left(\frac{du''}{dz}\right)dt\right]\delta$, ce qui est une premiere valeur de la différentielle de la densité.

965. La seconde valeur de la différentielle de la densité se déduit de la considération générale que la densité étant fonction de t, x, y et z, on a $d\delta = \left(\frac{d\delta}{dt}\right)dt+\left(\frac{d\delta}{dx}\right)dx+\left(\frac{d\delta}{dy}\right)dy+\left(\frac{d\delta}{dz}\right)dz$. Il faut observer de plus que cette différentielle étant, d'après ce qu'on a dit art. (963), relative au passage de la molécule d'un point au point infiniment voisin, les variations dx, dy, dz, désignent non point les côtés du parallélipipede projeté en MM'N'N, mais les espaces parcourus par le point M parallèlement aux axes auxquels se rapportent ces variations. Ainsi on a, dans ce cas, $dx = u\,dt$, $dy = u'\,dt$ et $dz = u''\,dt$. Substituant ces quantités dans la seconde valeur de $d\delta$, égalant l'expression qui en résulte à la premiere valeur du même $d\delta$, divisant par dt, et faisant attention que, d'après les regles du calcul différentiel, $\left(\frac{d\delta}{dx}\right)u+\left(\frac{du}{dx}\right)\delta = \left(\frac{d.\delta u}{dx}\right)$, etc. il vient,

966. $\left(\frac{d\delta}{dt}\right)+\left(\frac{d.\delta u}{dx}\right)+\left(\frac{d.\delta u'}{dy}\right)+\left(\frac{d.\delta u''}{dz}\right) = 0.$

Équation qui exprime que le fluide est élastique.

Premiere formule générale du mouvement des fluides élastiques, déduite de la condition même de l'élasticité, ou de la variabilité de la densité d'un point à l'autre, et d'un instant à l'autre.

967. Pour trouver la formule analogue des fluides incompressibles, il n'y a qu'à supposer la densité constante dans l'équation précédente, ce qui donnera

Digitized by Google

Equation qui exprime que le fluide est incompressible.

968. $\left(\frac{du}{dx}\right) + \left(\frac{du'}{dy}\right) + \left(\frac{du''}{dz}\right) = 0.$

Recherche des équations relatives aux pressions et aux puissances qui sollicitent une molécule fluide.

969. Il reste à trouver les équations relatives à l'action des puissances et de la pression qui sollicitent la molécule. Nommons φ, φ' et φ'', les forces accélératrices dues à l'action de ces puissances, parallèlement aux axes des x, des y et des z, et dirigées de A en X, Y et Z; $\varphi\, dt$, $\varphi'\, dt$ et $\varphi''\, dt$ sont (24) les éléments des vîtesses parallèlement à chacun de ces axes. D'un autre côté, p étant la pression qui s'exerce sur les faces projetées en MM'N'N, RR'Q'Q et TT'S'S, parallèlement aux z, aux y et aux x, et perpendiculairement à ces faces, la pression qui a lieu sur la face opposée à MM'N'N, est égale à p, plus la différentielle de p par rapport à z, ou à $p + \left(\frac{dp}{dz}\right) dz$, et par la même raison les pressions qui ont lieu sur les faces opposées à RR'Q'Q et à TT'S'S sont $p + \left(\frac{dp}{dy}\right) dy$ et $p + \left(\frac{dp}{dx}\right) dx$. Toutes ces pressions, d'après la définition donnée (40 et 558), sont rapportées à l'unité de surface; pour les rapporter aux surfaces élémentaires sur lesquelles elles sont exercées, il faut les multiplier par $dxdy$, $dydz$, et $dxdz$, qui sont les valeurs de ces surfaces élémentaires. Ensuite comme la pression $pdxdy$ et la pression $dxdy\left[p + \left(\frac{dp}{dz}\right) dz\right]$ s'exercent en sens opposés, leur différence $\left(\frac{dp}{dz}\right) dxdydz$ sera l'impulsion que le fluide ambiant donne à la molécule pour concourir à son mouvement parallèlement aux z, dirigée dans le sens ZA; les impulsions analogues parallèlement aux y et aux x seront $\left(\frac{dp}{dy}\right) dxdydz$, et $\left(\frac{dp}{dx}\right) dxdydz$. Ces valeurs, d'après la définition que nous avons donnée de la pression dans les fluides (40 et 558), sont celles de la quantité de mouvement que la molécule acquerroit pendant l'unité de temps parallèlement à chaque axe, si, pendant cette unité de temps et à chaque instant, elle recevoit les mêmes impulsions de la part du fluide ambiant. Ainsi, en divisant ces valeurs par la masse de la molécule, on aura les forces accélératrices dues à la pression du fluide ambiant. Remarquons que la masse est égale au produit du volume $dxdydz$ par la densité δ, et les forces accélératrices dont on vient de parler seront $\frac{1}{\delta}\left(\frac{dp}{dx}\right)$, $\frac{1}{\delta}\left(\frac{dp}{dy}\right)$ et $\frac{1}{\delta}\left(\frac{dp}{dz}\right)$, qui, multipliées par dt, donneront les éléments des vîtesses paralleles aux trois axes, et dues à la pression du fluide.

Digitized by Google

Ces éléments de vîtesse $\frac{1}{\delta}\left(\frac{dp}{dx}\right)dt$, $\frac{1}{\delta}\left(\frac{dp}{dy}\right)d$ et $\frac{1}{\delta}\left(\frac{dp}{dz}\right)dt$, doivent être retranchés des éléments de vîtesse $\varphi\,dt$, $\varphi'\,dt$, $\varphi''\,dt$, trouvés précédemment, puisqu'ils ont des directions contraires; ainsi $\left[\varphi-\frac{1}{\delta}\left(\frac{dp}{dx}\right)\right]dt$, $\left[\varphi'-\frac{1}{\delta}\left(\frac{dp}{dy}\right)\right]dt$, $\left[\varphi''-\frac{1}{\delta}\left(\frac{dp}{dz}\right)\right]dt$, seront les éléments des vîtesses dues à l'action combinée des puissances et des pressions.

D'un autre côté, u, u' et u'' étant les vîtesses paralleles à chacun des axes co-ordonnés, on peut avoir d'autres valeurs des mêmes éléments de vîtesse par la considération que u, u' et u'' sont fonctions de t, x, y, z, et ces valeurs sont évidemment $du = \left(\frac{du}{dt}\right)dt + \left(\frac{du}{dx}\right)dx + \left(\frac{du}{dy}\right)dy + \left(\frac{du}{dz}\right)dz$; $du' = \left(\frac{du'}{dt}\right)dt + \left(\frac{du'}{dx}\right)dx + \left(\frac{du'}{dy}\right)dy + \left(\frac{du'}{dz}\right)dz$ et $du'' = \left(\frac{du''}{dt}\right)dt + \left(\frac{du''}{dx}\right)dx + \left(\frac{du''}{dy}\right)dy + \left(\frac{du''}{dz}\right)dz$. Remarquons que, dans ces équations, les différentielles dx, dy, dz, représentent l'espace parcouru pendant l'instant dt, et qu'ainsi on a $dx = u\,dt$, $dy = u'dt$, $dz = u''\,dt$. Substituant ces valeurs dans celles de du, du', du'', égalant ces dernieres aux premieres valeurs trouvées précédemment, et divisant par dt, on a les trois équations,

970.
$$\varphi-\frac{1}{\delta}\left(\frac{dp}{dx}\right)=\left(\frac{du}{dt}\right)+\left(\frac{du}{dx}\right)u+\left(\frac{du}{dy}\right)u'+\left(\frac{du}{dz}\right)u''$$
$$\varphi'-\frac{1}{\delta}\left(\frac{dp}{dy}\right)=\left(\frac{du'}{dt}\right)+\left(\frac{du'}{dx}\right)u+\left(\frac{du'}{dy}\right)u'+\left(\frac{du'}{dz}\right)u''$$
$$\varphi''-\frac{1}{\delta}\left(\frac{dp}{dz}\right)=\left(\frac{du''}{dt}\right)+\left(\frac{du''}{dx}\right)u+\left(\frac{du''}{dy}\right)u'+\left(\frac{du''}{dz}\right)u''$$

Equations relatives à l'action des puissances qui sollicitent une molécule fluide.

971. Ces trois équations jointes à l'équation donnée précédemment, art. (966), et à l'équation supposée donnée qui doit exprimer la relation entre la pression et la densité, forment les cinq équations dont nous avons parlé, art. (960), et qui doivent donner les valeurs des cinq inconnues u, u', u'', δ, p, rapportées à un point et à un instant déterminés. On peut, si l'on veut, réduire les trois équations de l'article précédent à une qui exprimera seule autant que les trois qui composent cet article; pour cela on multipliera la premiere par dx, la seconde par dy, et la troisieme par dz, et on les ajoutera ensemble; on observera que $\left(\frac{dp}{dx}\right)dx + \left(\frac{dp}{dy}\right)dy + \left(\frac{dp}{dz}\right)dz$ est la différentielle de p par rapport à x, y et z, ou sa différentielle complete, en supposant t constant, et on aura $\varphi\,dx + \varphi'\,dy + \varphi''\,dz - \frac{1}{\delta}dp = \left[\left(\frac{du}{dt}\right) +$

Réduction des trois équations précédentes à une seule.

Digitized by Google

$$\left(\frac{du}{dx}\right)u+\left(\frac{du}{dy}\right)u'+\left(\frac{du}{dz}\right)u''\Big]dx+\Big[\left(\frac{du'}{dt}\right)+\left(\frac{du'}{dx}\right)u+\left(\frac{du'}{dy}\right)u'+\left(\frac{du'}{dz}\right)u''\Big]dy+\Big[\left(\frac{du''}{dt}\right)+\left(\frac{du''}{dx}\right)u+\left(\frac{du''}{dy}\right)u'+\left(\frac{du''}{dz}\right)u''\Big]dz.$$

Simplification de la notation de l'équation précédente.

Remarquons que φ, φ' et φ'' étant supposées des fonctions finies et réelles de t, x, y et z, la quantité $\varphi\,dx+\varphi'\,dy+\varphi''\,dz$ sera toujours la différentielle d'une quantité finie et déterminée. Ensuite, pour simplifier l'énonciation de l'équation précédente, faisons les coefficients de dx, dy et dz, dans le second nombre, égaux à X, X' et X'', et cette équation deviendra,

972. $$dp=\delta\left[(\varphi-\mathrm{X})\,dx+(\varphi'-\mathrm{X}')\,dy+(\varphi''-\mathrm{X}'')\,dz\right]$$

et donne la valeur de dp dans l'hypothese que t est constant, ainsi qu'on l'a vu précédemment.

Cette équation exprime tout ce qu'exprimoient les trois équations auxquelles elle est substituée.

973. Il n'est pas difficile de voir que cette équation dit autant que les trois de l'art. (970); car, 1°. si on substitue à dp sa valeur $\left(\frac{dp}{dx}\right)dx+\left(\frac{dp}{dy}\right)dy+\left(\frac{dp}{dz}\right)dz$, on voit, par la maniere dont l'équation a été formée, que les sommes particulieres des termes multipliés par dx, dy et dz doivent être séparément égales à zéro; 2°. cette propriété peut se déduire, *à priori*, de ce que les co-ordonnées x, y et z se rapportant à des points quelconques pris dans l'espace, leurs variations sont indépendantes les unes des autres; et qu'ainsi, pour que l'équation qui renferme ces variations soit aussi générale qu'il est possible, il faut égaler séparément à zéro la somme des termes multipliés par chacune des variations.

Toute la théorie du mouvement des fluides réduite à deux équations.

974. Toute la théorie du mouvement des fluides est donc renfermée dans les deux équations

$$\left(\frac{d\delta}{dt}\right)+\left(\frac{d.\delta u}{dx}\right)+\left(\frac{d.\delta u'}{dy}\right)+\left(\frac{d.\delta u''}{dz}\right)=0$$

$$dp=\delta\left[(\varphi-\mathrm{X})\,dx+(\varphi'-\mathrm{X}')\,dy+(\varphi''-\mathrm{X}'')\,dz\right]$$

auxquelles on peut joindre l'équation qui exprime la relation entre la pression et la densité, lorsque le fluide est élastique. Nous croyons avoir rendu un service à ceux de nos lecteurs qui ne sont point assez avancés dans l'analyse pour lire les ouvrages des inventeurs, en donnant à cette théorie le développement nécessaire pour la faire entendre à ceux mêmes qui n'ont que de foibles notions du calcul intégral. On voit que, lorsque l'analyse sera assez avancée pour fournir la solution complete des équations précédentes, toutes les questions sur le mouvement des fluides seront évidemment résolues.

Comment la

975. Les formules qu'on vient de donner devant être appli-

Digitized by Google

cables à toutes les valeurs possibles de u, u' et u'', doivent par conséquent convenir au cas où $u=0$, $u'=0$, $u''=0$, qui est celui de l'équilibre. Cette hypothese donne $X=0$, $X'=0$, $X''=0$, et les deux équations précédentes se changent en

formule générale de l'équilibre des fluides se déduit de ces équations.

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)=0$$

$$dp=s(\varphi\,dx+\varphi'\,dy+\varphi''\,dz)$$

La premiere de ces équations nous fait voir que la différentielle de la densité par rapport au temps est nulle, c'est-à-dire que tant que l'équilibre existe, une molécule placée en un point déterminé ne doit pas changer de densité. Mais cette densité peut varier par rapport aux co-ordonnées x, y, z, c'est-à-dire que la densité d'une molécule peut être différente de la densité de la molécule voisine, ainsi que nous l'avons vu dans la section précédente. La seconde équation, qui renferme la propriété énoncée par la premiere, est l'équation générale de l'équilibre des fluides, donnée art. (539), et qui a servi de fondement à toute la section précédente. On voit par-là que la théorie donnée dans ce chapitre renferme la solution de toutes les questions relatives tant à l'équilibre qu'au mouvement des fluides.

Nous allons appliquer cette théorie à un cas particulier, d'où nous déduirons, par approximation, la théorie ordinaire du mouvement des fluides telle qu'on l'a donnée dans cette section.

Application de la théorie précédente à la détermination du mouvement des fluides dans les tuyaux étroits.

976. La solution du problême qui fait l'objet de ce chapitre, est tirée du mémoire de M. Euler sur le mouvement des fluides, *Mém. de l'acad. de Berlin, année* 1755.

Soit XAY (*fig.* 164) le plan des (x,y), et XAZ le plan des (x,z) perpendiculaire au premier, la ligne AX étant la commune intersection de ces deux plans. Imaginons un tuyau dont la section puisse par-tout être considérée comme infiniment petite, et cependant variable; et soient IGg la projection orthogonale de ce tuyau sur le plan des (x,y), et I'G'g', sa projection sur le plan des (x,z). La forme et la position du tuyau étant données, on a les équations des courbes IGg et I'G'g', c'est-à-dire qu'en menant les co-ordonnées AP, x, PG, y, et PG', z, on

Digitized by Google

a une équation entre x et y, et une autre équation entre x et z.

Nommons a la section perpendiculaire à la courbe en un point donné, dont I et I' soient les projections. Soit, après un temps quelconque t, U la vîtesse du fluide dans le sens du tuyau, et K sa densité, au même point fixe projeté en I et I'. On voit que les variations de U et K ne dépendent que de t, et que par conséquent U et K sont fonctions de t seulement.

Maintenant supposons qu'au point du tuyau projeté en G et G' la section du tuyau perpendiculaire à la courbe soit r; la variation de r ne sera assujettie qu'à celles des points G et G', et ne dépendra nullement de t. Supposons encore qu'au bout du temps t, la densité au point du tuyau correspondant à G et G' soit δ, et la vîtesse dans le sens du tuyau v, il doit exister une relation en U, K, v et δ, qu'il s'agit d'abord de déterminer.

977. Pour cela, nommons s la longueur de la partie du tuyau projetée en IG et I'G', s sera généralement fonction de x, y et z; et comme y et z peuvent chacune être exprimées en valeur de x, s pourra être considérée comme fonction de x seulement. Soient Ii et I'i' les projections d'une portion infiniment petite de cette longueur égale à Udt, et Gg, G'g', les projections de la différentielle correspondante et égale à vdt; on voit que Udt et vdt sont les espaces parcourus pendant le même instant par les molécules projetées en I et G. La masse du fluide contenue à un instant quelconque dans la partie du tuyau projetée en IG et I'G' est égale à $\int \delta r ds$, et un instant après, la densité δ, qui, considérée au même point projeté en G et G', n'a pu varier qu'en vertu de la variation du temps; cette densité, disons-nous, s'étant changée en $\delta + \left(\frac{d\delta}{dt}\right) dt$, la masse fluide renfermée dans l'espace projeté en IG et I'G' sera égale à $\int \delta r ds + dt \int r ds \left(\frac{d\delta}{dt}\right)$. Ajoutons à cette masse celle qui, pendant l'instant dt dont il s'agit, viendra occuper l'espace projeté en Gg et G'g', et qui est à $\delta r v dt$; retranchons-en celle qui, pendant le même instant, sortira de l'espace projeté en Ii et I'i', et qui est égale à KU$a dt$: la quantité $\int \delta r ds + dt \int r ds \left(\frac{d\delta}{dt}\right) + \delta r v dt - \mathrm{K}a\mathrm{U}dt$ sera la masse fluide renfermée au bout de l'instant dt dans l'espace projeté en ig et $i'g'$. Mais cette masse fluide est identiquement la même que celle qui étoit renfermée au commencement de l'instant dt dans l'espace projeté en IG et I'G', et qui a pour

Digitized by Google

valeur $\int \delta r \rho ds$; donc $\int \delta r \rho ds$ est égale à l'expression qu'on vient de trouver, ce qui donne

978. $\delta r \rho = K a U - \int r \rho ds \left(\frac{d\delta}{dt}\right)$,

équation qui tient lieu de celle de l'art. (966), par laquelle on exprime que le fluide est compressible ou incompressible.

979. Soient maintenant, comme auparavant, les puissances φ, φ', φ'' paralleles aux axes des x, y et z, qui agissent sur l'élément fluide projeté en G et G', et u, u', u'' les vîtesses paralleles à ces trois axes, au bout du temps t. Comme les vîtesses sont proportionnelles aux espaces parcourus pendant un même temps, on a $u : u' : u'' : \rho :: dx : dy : dz : ds$; d'où $u = \frac{dx}{dt}\rho$, $u' = \frac{dy}{dt}\rho$, $u'' = \frac{dz}{dt}\rho$, $u dy = u' dx$, $u dz = u'' dx$, $u' dz = u'' dy$; on tire des mêmes proportions, ou plus simplement de la propriété démontrée à la fin de l'art. (260), $\rho\rho = uu + u'u' + u''u''$.

980. Observons que puisque chacune des variables y et z peut être exprimée en valeur de x, ces variables y et z ne peuvent varier sans que x varie aussi, et doivent être constantes, lorsque x est constante. Il suit de là que les quantités $\left(\frac{du}{dy}\right)$, $\left(\frac{du}{dz}\right)$, $\left(\frac{du'}{dy}\right)$, etc. sont nulles; car $\left(\frac{du}{dy}\right) dy$ étant la différentielle de u, par rapport à y, en supposant x, z et t constantes, et x ne pouvant être constante sans que y le soit aussi, cette différentielle $\left(\frac{du}{dy}\right) dy$ ne peut pas exister, et ainsi des autres. Les valeurs des quantités X, X', X'', (971), se réduiront, par cette considération, à $X = \left(\frac{du}{dt}\right) + u\left(\frac{du}{dx}\right)$, $X' = \left(\frac{du'}{dt}\right) + u\left(\frac{du'}{dx}\right)$, $X'' = \left(\frac{du''}{dt}\right) + u\left(\frac{du''}{dx}\right)$, et il n'y aura que deux variables, x et t.

On tirera de là

981. $Xdx + X'dy + X''dz = \left(\frac{du}{dt}\right)dx + \left(\frac{du'}{dt}\right)dy + \left(\frac{du''}{dt}\right)dz + \left(\frac{du}{dx}\right)udx + \left(\frac{du'}{dx}\right)udy + \left(\frac{du''}{dx}\right)udz$. Mais, à cause des équations (979), $udy = u'dx$, $udz = u''dx$, on a $udx\left(\frac{du}{dx}\right) + udy\left(\frac{du'}{dx}\right) + udz\left(\frac{du''}{dx}\right) = udx\left(\frac{du}{dx}\right) + u'dx\left(\frac{du'}{dx}\right) + u''dx\left(\frac{du''}{dx}\right) = dx\left\{\left(\frac{du}{dx}\right)u + \left(\frac{du'}{dx}\right)u' + \left(\frac{du''}{dx}\right)u''\right\}$.

Remarquons que cette expression est égale à la moitié de la différentielle de $uu + u'u' + u''u''$ par rapport à x, c'est-à-dire la

Digitized by Google

différentielle de $vv = uu + u'u' + u''u''$, (979), en supposant le temps constant; donc puisqu'il n'y a que deux variables x et t, on a

982. $dx\left\{\left(\frac{du}{dx}\right)u + \left(\frac{du'}{dx}\right)u' + \left(\frac{du''}{dx}\right)u''\right\} = vdv$, le temps étant supposé constant.

Différenciant les valeurs de u, u', u'', données par les équations (979), $u = \frac{vdx}{ds}$, $= u'\frac{vdy}{ds}$, $u'' = \frac{vdz}{ds}$, en faisant varier le temps, et faisant attention que $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$, ne dépendent pas du temps, mais seulement de la courbure du tuyau, on a $\left(\frac{du}{dt}\right) = \left(\frac{dv}{dt}\right)\frac{dx}{ds}$, $\left(\frac{du'}{dt}\right) = \left(\frac{dv}{dt}\right)\frac{dy}{ds}$, $\left(\frac{du''}{dt}\right) = \left(\frac{dv}{dt}\right)\frac{dz}{ds}$. Multipliant la premiere équation par dx, la seconde par dy, la troisieme par dz, et faisant une somme des trois, il vient $\left(\frac{du}{dt}\right)dx + \left(\frac{du'}{dt}\right)dy + \left(\frac{du''}{dt}\right)dz = \left(\frac{dv}{dt}\right)\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{ds} = \left(\frac{dv}{dt}\right)ds$, puisque $\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{ds} = \frac{ds^2}{ds} = ds$.

983. Substituant vdv et $\left(\frac{dv}{dt}\right)ds$ aux quantités qui leur sont égales dans l'équation de l'art. (981), on a

$$Xdx + X'dy + X''dz = vdv + \left(\frac{dv}{dt}\right)ds.$$

984. Ce qui change l'équation générale de l'art. (974) en

$$dp = \delta\left\{\varphi dx + \varphi' dy + \varphi'' dz - ds\left(\frac{dv}{dt}\right) - vdv\right\},$$

où le temps est supposé constant dans les termes dp et vdv.

985. Cette équation, jointe à celle de l'art. (978), renferme toutes les déterminations du mouvement du fluide par le tuyau projeté en IG et I'G': appliquons-les au cas où le fluide est incompressible et homogene.

L'équation de l'art. (978) devient dans ce cas, en faisant $K = \delta$ et $d\delta = 0$, $rv = aU$, d'où $v = \frac{a}{r}U$, et $\left(\frac{dv}{dt}\right) = \left(\frac{dU}{dt}\right)\frac{a}{r}$, en faisant attention que U est uniquement fonction du temps, et que a et r n'en dépendent nullement. Ensuite, puisque y et z sont déterminées par x, quelles que soient les puissances φ, φ', φ'', la quantité $\varphi dx + \varphi' dy + \varphi'' dz$ sera toujours intégrable, et nous pouvons la supposer égale à dQ; substituant cette valeur et celle de $\frac{dv}{dt}$ dans l'équation de l'art. (984), on la changera en

$$dp = \delta$$

Digitized by Google

$dp = \delta \left\{ dQ - \frac{d}{r}\left(\frac{dU}{dt}\right) - v\,dv \right\}$, qui, intégrée dans l'hypothese du temps constant, devient

$p = \delta \left\{ Q - \left(\frac{dU}{dt}\right) \int \frac{a\,ds}{r} - \frac{1}{2} v^2 \right\}$, et, en substituant pour v sa valeur $\frac{a}{r}$ U,

986. $p = \delta \left\{ Q - \left(\frac{dU}{dt}\right) \int \frac{a\,ds}{r} - \frac{1}{2} \frac{a^2 U^2}{r^2} \right\} + A$, où la constante peut renfermer le temps.

Il est indifférent d'écrire dans cette équation $\left(\frac{dU}{dt}\right)$ ou $\frac{dU}{dt}$, puisque U n'étant fonction que de la seule variable t, dU ne peut pas être composée de plusieurs différences partielles.

Comment la théorie du mouvement des fluides, dans l'hypothese du parallélisme des tranches, se déduit, par approximation, de la théorie générale et rigoureuse du mouvement des fluides.

987. Soit un tuyau étroit et rectiligne renfermant un fluide pesant, homogene et incompressible; si on applique au mouvement du fluide, dans ce tuyau, l'équation de l'art. (986), qu'on suppose l'axe des x vertical, et le tuyau faisant un angle ϵ avec la verticale, on aura $dx = ds \cos. \epsilon$, φ = la pesanteur, $\varphi' = 0$, $\varphi'' = 0$, $dQ = \varphi dx = \varphi ds \cos. \epsilon$; d'où on tire $Q = \varphi s \cos. \epsilon$, et l'équation de l'art. (986) devient

988. $p = \varphi \delta s \cos. \epsilon - \frac{\delta a dU}{dt} \int \frac{ds}{r} - \frac{\delta a^2 U^2}{2r^2} + A.$

Cette équation est précisément la même donnée art. (709), déduite de l'hypothese du parallélisme des tranches, et qui a servi de base à tout ce que nous avons dit, dans cette section, sur le mouvement des fluides. La théorie ordinaire du mouvement des fluides n'est donc qu'une application d'un cas très particulier de la théorie générale et rigoureuse des fluides, considérée dans les tuyaux étroits. Cette application n'a même lieu que par approximation, en ce que, supposant à toutes les molécules d'une même tranche des vîtesses égales et des directions paralleles, on peut considérer toutes ces molécules comme réunies en un seul point.

Nous aurions donc pu placer, au commencement de cette section, la théorie exposée art. (956) et suivants, et en déduire, par approximation, la formule de l'art. (709); mais cette marche, quoique plus directe, n'auroit peut-être pas été aussi aisée

Digitized by Google

à suivre, pour quelques lecteurs, que celle que nous avons adoptée. On n'en voit pas moins maintenant comment la théorie hypothétique, adoptée par les meilleurs auteurs pour la pratique de l'hydraulique, est liée à la théorie générale délivrée de toute hypothese. Cette connoissance jette un grand jour sur tout l'ensemble de l'hydrodynamique; elle fait voir la filiation qui existe entre les principes précaires et les principes rigoureux, sert, par ce moyen, de guide dans l'usage qu'on peut faire des premiers, et fait connoître les limites que comporte leur application.

Digitized by G

SECTION V.

Des machines et des moteurs qu'on peut y appliquer, considérés avec les différentes circonstances physiques qui influent sur l'équilibre et le mouvement.

EXPLICATION de la maniere dont l'adhérence, le frottement, la roideur des cordes et celle des chaînes influent sur le mouvement et l'équilibre dans les machines.

989. Nous avons donné, art. (236 et suiv.), la théorie générale de l'équilibre dans les machines, et art. (487 et suiv.), celle du mouvement, pareillement considéré dans les machines. Ces théories sont applicables à toutes les especes de moteurs et de résistances : nous n'avons considéré jusqu'à présent, en général, que les résistances qui sont représentatives de l'effet utile d'une machine ; mais il est d'autres résistances qui sont étrangeres à cet effet, et qui consomment par conséquent en pure perte une partie de l'effort du moteur. Ces résistances sont celles qui proviennent de l'adhérence du frottement et de la roideur des cordes. Nous avons jugé à propos, par les raisons exposées art. (241), et ailleurs, de renvoyer à une section particuliere ce que nous aurions à en dire, afin de pouvoir entrer dans les détails que comportent la nature et l'objet de cet ouvrage ; c'est ce dont nous allons nous occuper en premier lieu. Faisons d'abord voir comment la cohésion, le frottement et la roideur des cordes influent sur l'équilibre et le mouvement considérés dans les machines.

Distinction entre les résistances représentatives de l'effet utile d'une machine, et celles qui consomment en pure perte une partie de l'effort du moteur.

990. La cohésion et le frottement ont été définis, et leurs effets relatifs au glissement de deux corps l'un sur l'autre, expliqués art. (597 et suiv.). Ce qu'on a dit art. (601 et 602) fait voir quelles variations ils peuvent introduire dans les valeurs et les rapports d'un moteur et d'une résistance en équilibre sur un plan incliné ; variations qui résultent de ce que, dans les articles cités, on a considéré la cohésion et le frottement comme des obstacles purement passifs, qui s'opposoient également, soit à l'action du moteur, soit à celle de la résistance. Comme, dans les recherches qui vont suivre, le moteur

Les recherches contenues dans cette section ne sont qu'une conséquence de la théorie exposée dans les deux premiers.

Digitized by Google

sera toujours supposé surmonter ces sortes d'obstacles, ou prêt à les surmonter; les variations dont on vient de parler n'auront plus lieu, et la cohésion, le frottement, ainsi que la roideur des cordes, seront regardés comme des résistances additives à celle qui doit représenter l'effet utile de la machine, et traités de la même maniere. Sous ce point de vue, ce que nous allons dire sur l'équilibre et le mouvement, eu égard à l'adhérence, au frottement et à la roideur des cordes, ne sera qu'une conséquence de la théorie exposée dans les deux premieres sections.

Nous observerons, avant d'aller plus loin, que les physiciens et les auteurs qui ont traité de la mécanique, distinguent ordinairement deux especes de frottement. La premiere espece est celle dont nous avons parlé dans l'article précédent, et dans ceux qui y sont cités; il faut aussi y comprendre le frottement des axes et tourillons qui se meuvent dans des boîtes ou crapaudines, et réciproquement. La seconde espece de frottement comprend celui qui a lieu lorsqu'on fait mouvoir, sur un plan, une sphere, un cylindre ou une roue, de maniere que le mouvement progressif soit produit uniquement par la rotation et sans aucun glissement. Les obstacles que cette seconde espece de frottement oppose au mouvement sont, pour ainsi dire, infiniment petits, par rapport à ceux qui naissent de la premiere espece de frottement dont nous nous occuperons principalement: nous rapporterons néanmoins des expériences intéressantes sur la seconde espece de frottement.

Analogie entre l'adhérence et la cohésion; dans quels cas le frottement et l'adhérence favorisent l'effort du moteur.

991. L'adhérence étant l'union que contractent, dans certaines circonstances, deux corps en contact; on peut appliquer à cette propriété ce que nous avons dit de la cohésion.

Observons maintenant que pour simplifier le calcul, et favoriser la solidité dans les applications de la formule de l'art. (602), dans laquelle σ est l'angle formé par la longueur du plan et la verticale, nous avons négligé le frottement dû à l'action de la puissance P, qui est égale à P cos. σ, et le frottement qu'elle occasionne égal à fP cos. σ. Ainsi les résistances réunies de l'adhérence que nous avons désignée par γb (601), et du frottement, seront $\gamma b + f$Q sin. $\sigma + f$P cos. σ, et l'équation de l'art. (602) se changera en

$$\text{Q cos. } \sigma - f\text{Q sin. } \sigma - f\text{P cos. } \sigma - \gamma b = \text{P sin. } \sigma,$$

d'où on tire, pour la valeur de P,

992. $\text{P} = \frac{\text{Q cos. } \sigma - f\text{Q sin. } \sigma - \gamma b}{\text{sin. } \sigma + f \text{ cos. } \sigma}$. On a supposé dans les applications de cette équation, art. (604) et suiv., que Q étoit fonction de σ

Digitized by Google

mais on sent bien qu'elle doit avoir lieu indépendamment de toute relation entre Q et σ.

993. Cette valeur de la puissance P qui fait équilibre au poids d'une masse Q, tendant à glisser sur un plan incliné, est, comme on voit, plus petite que la valeur $\frac{Q \cos. \sigma}{\sin. \sigma}$ qu'auroit la même puissance, si on faisoit abstraction des résistances de l'adhérence et du frottement. Ainsi l'adhérence et le frottement sont avantageux lorsqu'il ne s'agit que de contrebalancer l'effort d'une résistance, et d'empêcher passivement son effet; car ils tiennent lieu d'une partie de l'effort que le moteur seroit obligé de faire sans eux.

Cas où le frottement et l'adhérence nécessitent une augmentation dans l'effort du moteur.

994. Mais si, conformément à la maniere dont nous devons envisager les choses, d'après ce qui est dit art. (990), on suppose que la puissance P est destinée à faire remonter le corps, ou prête à produire un pareil effet, alors il faudra augmenter son action de la valeur des résistances réunies, de l'adhérence et du frottement, et l'équation de l'art. (991) se changeroit en

$$Q \cos. \sigma + fQ \sin. \sigma + fP \cos. \sigma + \gamma b = P \sin. \sigma$$

$$P = \frac{Q \cos. \sigma + fQ \sin. \sigma + \gamma b}{\sin. \sigma - f \cos. \sigma}$$

995. P est, dans ce cas-ci, plus considérable qu'il ne le seroit sans la cohésion et le frottement; ainsi lorsque le moteur produit le mouvement ou est prêt à le produire, il est obligé d'augmenter son effort d'une partie étrangere à l'effet utile de la machine, et qui est destinée à vaincre l'adhérence et le frottement.

Observation sur l'hypothese du mouvement proportionnel à la pression.

996. Nous avons supposé, dans les formules précédentes, le frottement constamment proportionnel à la simple pression; cette hypothese, quoique suffisante pour la pratique dans le plus grand nombre de cas, n'est cependant pas rigoureusement vraie, sur-tout dans le cas du mouvement, comme nous le verrons bientôt; mais notre objet a été seulement de donner un exemple qui pût faire comprendre comment le frottement augmentoit la valeur de l'effort du moteur, dans le plan incliné, nous réservant de déterminer ensuite, plus exactement, la valeur de cette augmentation.

Des effets du frottement dans le levier.

997. Tout ce que nous venons de dire suffit pour faire comprendre les effets du frottement et de l'adhérence dans le plan incliné et dans les machines qui en dérivent; il ne sera pas plus difficile d'expliquer les effets des mêmes résistances dans le levier et dans les machines qui s'y rapportent. Soit AB, (*fig.* 165),

Digitized by Google

un levier, supposé horizontal, auquel est appliqué un moteur P, agissant verticalement, et prêt à soulever un poids Q. Il est évident que l'axe eh, autour duquel le levier tend à tourner, éprouve une pression égale au poids du levier, augmenté du poids Q et de l'effort du moteur P. Cette pression produit un frottement à différents points f de la circonférence de l'axe, lequel frottement s'oppose à ce que les points correspondants du levier glissent sur cette circonférence dans le sens fh. On peut donc considérer ce frottement comme une puissance agissant sur le levier au point f, dans une direction fg, tangente à la circonférence eh, et s'opposant au mouvement de rotation dans le sens fh. Ainsi le moteur P a à surmonter le poids Q, plus l'effort des puissances qui agissent aux points f tangentiellement à la circonférence eh. C étant le centre de l'axe, et par conséquent du mouvement; soient $CB = a$; $CA = b$; $cf = r$; appellons μ les résistances réunies du frottement et de l'adhérence, que nous désignerons dans le reste de ce chapitre, par la simple dénomination de frottement; les conditions de l'équilibre seront, (129 et 152), $aP = bQ + r\mu$, d'où $P = \frac{bQ}{a} + \frac{r\mu}{a}$. Ainsi l'effet du frottement occasionnera dans l'effort du moteur une augmentation $\frac{r\mu}{a}$, consommée en pure perte par des résistances provenant de la machine elle-même, et qui ne sera point employée à soulever le poids Q.

Récapitulation générale des effets du frottement dans les machines.

998. Comme toutes les machines peuvent se rapporter au levier et au plan incliné, l'exemple qu'on vient de donner, et celui qui le précede, suffisent pour faire comprendre les effets du frottement dans quelque machine que ce soit; on voit qu'il est favorable au moteur, lorsque ce moteur n'est destiné qu'à empêcher simplement le mouvement, et qu'il lui est défavorable quand il s'agit de mettre la machine au point de se mouvoir, ou de lui procurer un mouvement effectif. Tout ceci s'accorde avec ce qu'on a dit art. (597 et suiv.)

Différents exemples de l'utilité du frottement dans les arts.

999. Le frottement qui, comme on voit, nuit en bien des occasions à l'effet des machines, est, dans une infinité de circonstances, d'une grande utilité. Par exemple, les différentes parties d'une machine, ou d'une charpente en général, assemblées avec des clous, des chevilles de fer ou des boulons taraudés, se désuniroient bientôt sans le frottement considérable du fer enfoncé dans le bois à coups de marteau ou de masse, et des écrous contre les vis. Le simple enroulement d'une corde

Digitized by Google

ou d'un cable autour d'un cylindre immobile produit un frottement capable de résister à un effort qui exigeroit, pour être contrebalancé, les efforts réunis de plusieurs hommes ou de plusieurs chevaux : on en voit des exemples dans la manœuvre des bateaux, employés à différents usages lors de la construction des ponts sur les grandes rivieres ; on se sert du même procédé pour rendre moins rapide la descente d'un gros bloc de pierre le long d'une rampe ou plan incliné quelconque. Les constructions, tant dans l'eau que sur terre, offrent mille autres exemples de l'utilité et de l'usage du frottement ; les arts mécaniques n'en présentent pas moins, et ces exemples se retraceront en foule dans la mémoire de tous ceux qui ont les plus légeres notions de la construction et des arts. Voyons comment la roideur des cordes influe sur l'équilibre et le mouvement.

Explication de la maniere dont la roideur des cordes augmente l'effort du moteur ; et équation générale qui donne cette augmentation.

1000. La roideur des cordes, considérée relativement à leur emploi dans les machines, est la résistance qu'elles opposent aux puissances qui tendent à les plier autour d'une poulie, d'un cylindre, etc. On voit, par cette définition, que la roideur des cordes est, quant à l'effet que nous avons en vue, différente de leur force de *torsion;* cependant la force de torsion influe sur la roideur, comme nous le verrons dans la suite. Soit AB (*fig.* 166) le diametre horizontal d'une poulie, ayant son axe et son centre de mouvement en C. P et Q sont des poids équivalents aux efforts d'un moteur et d'une résistance appliqués, dans des directions verticales, aux extrémités E et D d'une corde EBAD, enroulée sur la poulie.

Cela posé, dans le cas du mouvement, l'effort du moteur doit être égal à celui de la résistance (493), afin de conserver sans altération la vîtesse acquise ; et sous cet aspect, abstraction faite du frottement et de la roideur de la corde, on devroit avoir $P = Q$: mais comme la roideur de la corde consomme une partie de l'effort du moteur (on suppose, pour plus de simplicité, le frottement de l'axe nul), on doit avoir $P = Q + r$ ou $P - Q = r$. Ainsi $P - Q$, ou r, est l'effort que le moteur emploie en pure perte à vaincre la roideur de la corde : voici comment on le détermine.

Le poids Q étant supposé s'élever, l'effet de la roideur de la corde AD, ou de la résistance qu'elle oppose à sa flexion au point A ; cet effet, disons-nous, est d'écarter le poids Q de la verticale menée par le point A, et de placer son centre de gravité dans une verticale *as*, plus éloignée du centre C que le point A. L'effet contraire a lieu du côté de B, et le centre de

Digitized by Google

gravité du poids P se trouve dans une verticale br, plus près du centre C que le point B. On peut, pour plus d'exactitude, supposer que A et B sont des points placés à la rencontre de l'axe de la corde et du diametre horizontal de la poulie. Dans cet état, le moment de l'effort du moteur sera $P \times Cb$, ou $P \times (CB - Bb)$, et le moment de l'effort de la résistance sera $Q \times (CA + Aa)$; on aura donc (493), d'après le principe général, $P \times (CB - Bb) = Q \times (CA + Aa)$, d'où on tire $P = \frac{Q \times (AC + Aa) + P \times Bb}{BC}$ et $P - Q = \frac{Q \times Aa + P \times Bb}{BC}$. Telle est l'augmentation de l'effort du moteur, due à la roideur de la corde. Cette augmentation est en pure perte pour l'effet utile de la machine, et peut être considérée comme une résistance nouvelle, additive à la résistance Q, ayant pour valeur $\frac{Q \times Aa + P \times Bb}{BC}$, et agissant dans la direction AD.

Ce que devient cette équation quand on suppose que la corde n'oppose aucune résistance à son déroulement.

1001. Si on supposoit que la résistance de la corde à se dérouler au point B peut être négligée à l'égard de sa résistance à s'enrouler au point A, ce qui a à-peu-près lieu dans la pratique; alors on pourroit faire $Bb = 0$, et l'équation précédente deviendroit $P - Q = \frac{Q \times Aa}{BC}$.

Ce qui arriveroit si la corde étoit élastique.

1002. Nous observerons, en passant, que la corde est supposée entièrement dépourvue d'élasticité; car, si après avoir été pliée par un effort quelconque, elle tendoit à se restituer dans sa premiere forme avec un effort égal, la roideur de la corde ne consommeroit dans le moteur aucun effort en pure perte: par exemple, l'élasticité qui se développeroit en B, tendroit à écarter le poids P de la verticale passant par C, avec le même effort que l'élasticité de la corde en A exerce sur le poids Q. Ainsi en supposant $P = Q$, chacune des verticales passant par les centres de gravité de P et de Q seroit, à une distance du centre C, égale à Ca, et la roideur de la corde n'influeroit point sur l'équilibre. L'expérience a appris, comme nous le verrons, que les cordes de chanvre sont sensiblement sans élasticité.

Détermination de l'augmentation de l'effort du moteur, produite par la résistance qu'opposent les chaînes à s'enrouler et à se dérouler.

1003. On peut, au lieu de la corde EBAD, employer une chaîne, comme on le voit, (*fig.* 167); supposons que cette chaîne soit semblable à celle de la (*fig.* 145), dont tous les chaînons sont liés l'un à l'autre par un axe. Les poids P et Q seront écartés de la verticale par le frottement que les chaînons placés en A et B exercent sur leur axe. Nommant μ et μ' la résistance des frottements autour des axes, des chaînons placés en A et en B, et

et r le rayon de cet axe; les moments des frottements seront $r\mu$ et $r\mu'$; et comme c'est la résistance due à ces frottements qui tient les centres de gravité des poids P et Q écartés de la verticale des quantités Bb et Aa, on doit avoir $P \times Bb = r\mu'$ et $Q \times Aa = r\mu$; ainsi l'équation $P - Q = \frac{Q \times Aa + P \times Bb}{BC}$, donnée art. (1000), se changera en $P - Q = \frac{r(\mu + \mu')}{BC}$, qui, en faisant $BC = R$, devient $P - Q = \frac{r(\mu + \mu')}{R}$.

1004. Les quantités μ et μ' ne peuvent pas être fort différentes l'une de l'autre; car leur différence n'est qu'une fraction de la quantité dont P doit surpasser Q pour vaincre le frottement: ainsi on peut faire $\mu + \mu' = 2\mu$, et l'équation précédente devient $P - Q = \frac{2r\mu}{R}$.

1005. Si on suppose que le frottement est égal à la pression multipliée par un nombre constant f, alors on aura $\mu = fP$, et l'équation précédente deviendra $P - Q = \frac{2frP}{R}$.

1006. Nous allons passer maintenant à une théorie plus détaillée du frottement et de la roideur des cordes dans les machines, dont les différentes especes seront rangées dans deux classes générales; savoir, le plan incliné et les machines de rotation: nous donnerons ensuite le détail des expériences propres à rendre applicables à la pratique les formules données par la théorie.

Théorie de l'équilibre et du mouvement dans le plan incliné, en ayant égard au frottement.

Détermination générale des conditions de l'équilibre sur le plan incliné, ayant égard au frottement et à l'adhérence.

1007. L'équation de l'art. (994) contient la relation entre une puissance horizontale P et un poids Q, qui se meut ou tend à se mouvoir sur un plan incliné, faisant un angle σ avec la verticale. f est le nombre par lequel il faut multiplier la pression pour avoir le frottement, γb et la résistance constante provenant soit de la cohésion, soit de l'adhérence, que nous nommerons A.

Supposons que P, qui, dans le cas du mouvement, doit représenter l'effort du moteur, ait une direction qui fasse, avec la longueur du plan incliné, un angle Ψ; on voit aisément que la partie de l'effort qui s'exerce dans une direction parallele au plan incliné est égale à P cos. Ψ, et que la partie du même effort qui s'exerce dans une direction perpendiculaire au plan incliné est égale à $\pm$ P sin. Ψ; le signe supérieur servant pour

Digitized by Google

le cas où P sin. Ψ tend à presser le corps contre le plan incliné, et le signe inférieur servant pour le cas contraire. D'après cela, il faut, dans l'équation de l'art. (994), substituer à l'effort P sin. σ, qui s'exerce parallèlement au plan incliné, lorsque P est horizontal, lui substituer, disons-nous, P cos. Ψ, et mettre, au lieu de fP cos. σ, qui, (991), exprime le frottement dû à l'action de P, la quantité $\pm f$P sin. Ψ, qui exprime la même chose dans l'hypothese actuelle. On aura, en faisant ces substitutions,

$$Q\cos.\sigma + fQ\sin.\sigma \pm fP\sin.\Psi + A = P\cos.\Psi,$$ d'où on tire

$$1008.\quad P = \frac{\frac{1}{f}A + Q\left(\sin.\sigma + \frac{1}{f}\cos.\sigma\right)}{\frac{1}{f}\cos.\Psi \mp \sin.\Psi},$$

le signe supérieur de sin. Ψ, devant, comme on l'a dit, être employé lorsque l'effort du moteur s'ajoute à celui du poids pour presser le plan incliné, et le signe inférieur dans le cas contraire.

Cette équation peut s'appliquer au cas d'un mouvement uniforme et lent.

1009. La quantité f, qui, dans cette équation, est le nombre par lequel il faut multiplier la pression pour avoir le frottement, peut indiquer ou une portion constante de cette pression, déterminée une fois pour toutes, ou une portion variable, dépendante tant de la pression que de la vîtesse. Les expériences que nous rapporterons dans la suite de cette section, indiqueront dans quelles circonstances ces différents cas ont lieu; en attendant on peut rendre la valeur de f constante, lorsque le mouvement est uniforme et lent.

Quel est l'angle du plan incliné avec la direction du moteur qui exige le plus petit effort dans le moteur.

1010. Tout étant constant dans l'équation de l'art. (1008) hors P et Ψ; si on veut connoître l'angle Ψ de la direction du moteur avec le plan incliné, sous lequel l'effort de ce moteur est un *minimum*, il faut d'abord faire attention qu'en général cette direction doit être telle que la composante P sin. Ψ de l'effort du moteur, perpendiculairement au plan incliné, n'occasionne point de frottement, et détruise même en partie celui qui est dû à la masse à mouvoir; ainsi il faut adopter le signe inférieur dans l'équation de l'art. (1008). Cela posé, on trouvera, en différenciant la valeur de P, et égalant la différentielle à zéro, cos. $\Psi - \frac{1}{f}$ sin. $\Psi = 0$, d'où $\frac{\sin.\Psi}{\cos.\Psi} = f$. Si on supposoit $f = \frac{1}{3}$, il viendroit sin. $\Psi = \frac{1}{3}$ cos. Ψ, qui donne $\Psi = 18^{\circ}\,26'$.

Cas où le plan incliné devient horizontal, ainsi que la direction du moteur.

1011. Lorsque le plan incliné devient horizontal, ainsi que la direction du moteur, on a $\sigma = 90$ et $\Psi = 0$, ce qui change l'équation de l'art. (1008) en $P = A + fQ$.

Digitized by Google

Mouvement d'un corps pesant qui glisse le long d'un plan incliné.

1012. Examinons les circonstances du mouvement d'un corps qui, livré à la seule action de la pesanteur, descend en glissant le long d'un plan incliné. Ce corps peut avoir, outre le mouvement progressif, un mouvement de rotation, ou bien n'avoir qu'un simple mouvement progressif. Voyons quelles conditions doivent avoir lieu pour l'un ou l'autre de ces deux cas.

Soit Q, (*fig.* 168), le corps glissant sur le plan incliné, ou plutôt le poids de ce corps, G son centre de gravité; et menons la perpendiculaire GE sur AC: lorsque ce corps sera prêt à tourner sur le point F, ce point supportera toute la pression, qui auparavant se distribuoit sur tous les points de la ligne DF, laquelle pression est égale à Q sin. σ, l'angle CAB étant $= \sigma$, et représente la réaction du plan sur le corps. On pourra donc concevoir qu'au point F est appliqué un moteur agissant sur ce corps perpendiculairement à AC, ou parallèlement à EG, avec un effort égal à Q sin. σ, et l'énergie de ce moteur pour faire tourner autour du centre de gravité dans le sens FKD sera Q sin. $\sigma \times$ EF. Ensuite le corps est sollicité par deux autres moteurs ou puissances: l'une est le poids de ce corps décomposé parallèlement à AC; mais cette composante passant par le centre de gravité, son énergie pour faire tourner est nulle: l'autre résulte des résistances réunies de l'adhésion et du frottement, qu'on peut considérer, dans le cas actuel, relativement à l'obstacle qu'ils opposent au mouvement, comme des puissances qui agissent sur la ligne FD, dans le sens FD. Ces puissances ont pour valeur $A + f$Q sin. σ, et peuvent être considérées comme tendant à faire tourner dans le sens DKF avec une énergie qui a pour valeur (A $+ f$Q sin. σ) $\times$ EG.

Ainsi l'énergie pour tourner dans le sens DKF, résultante des différents moteurs ou puissances que nous venons de considérer, est (A $+ f$Q sin. σ) $\times$ EG $-$ Q sin. $\sigma \times$ EF; le corps tournera en descendant lorsque cette quantité sera positive, et aura un simple mouvement progressif lorsqu'elle sera négative.

Condition qui doit avoir lieu pour que ce corps ne tourne point en descendant le long du plan incliné.

1013. On a donc, pour que le corps ne tourne pas en descendant, la condition Q sin. $\sigma \times$ EF $>$ (A $+ f$Q sin. σ) EG, ou $\frac{EF}{EG} > \frac{A + f Q \sin. \sigma}{Q \sin. \sigma}$, ou enfin *cot.* $\sigma > \frac{A + f Q \sin. \sigma}{Q \sin. \sigma}$.

Equation du mouvement dans le cas où

1014. Supposons que cette condition ait lieu, les quantités de mouvement imprimées parallèlement à AC, sont, 1°. Q cos. σ dans le sens AC; 2°. A $+ f$Q sin. σ, dans le sens CA: donc la

Digitized by Google

cette condition a lieu.

force accélératrice du centre de gravité sera (389), en nommant M la masse du corps dont Q est le poids, $\frac{Q\cos.\varepsilon - fQ\sin.\varepsilon - A}{M}$, d'où on tire (24) $du = \left(\frac{Q\cos.\varepsilon - fQ\sin.\varepsilon - A}{M}\right) dt$, et en intégrant $u = \left(\frac{Q\cos.\varepsilon - fQ\sin.\varepsilon - A}{M}\right) t$, u et t étant supposés commencer ensemble.

On voit par là que le mouvement du corps, le long du plan incliné, est uniformément accéléré, et l'espace e parcouru pendant un temps t, sera, (16), donné par l'équation $e = \frac{1}{2} t^2 \left(\frac{Q\cos.\varepsilon - fQ\sin.\varepsilon - A}{M}\right)$.

Frottement d'une corde qui s'enroule autour d'un cylindre.

Recherche de l'équation qui donne en un point quelconque la tension de la corde employée à vaincre le frottement et la résistance.

1015. Soit BAN, (*fig.* 169), le profil du cylindre, AD une des extrémités de la corde à laquelle est appliquée la résistance R, la puissance qui tend à vaincre cette résistance agissant à l'autre extrémité de la corde qui est enroulée autour du cylindre d'une quantité quelconque.

Le mouvement étant prêt à se produire, la puissance dont on vient de parler doit faire équilibre à la résistance R, et à celle provenant du frottement qui s'exerce sur l'arc embrassé par la corde; et on doit en dire autant de la tension de la corde en un point quelconque L intermédiaire au point A et au point où la puissance est appliquée, laquelle tension est égale à la résistance R, plus le frottement qui s'exerce depuis ce point L jusqu'en A. Ajoutons à l'arc AL l'arc infiniment petit LB, divisé en deux parties égales au point G; menons les rayons CB, CG, GL; faisons CB $= r$, AL $= z$; nommons p la somme des pressions normales qui s'exercent sur tous les éléments de l'arc AL; on aura LB $= dz$, et la pression normale qui s'exerce sur LB sera égale à dp.

La tension de chacun des demi-éléments GB, GL, étant désignée par t, la pression dp qui en résulte sur LB, c'est-à-dire la résultante de ces tensions, prise dans la direction GC, est (266, 267), égale à $2t$ cos. angle CGB. On sait que cos. (angle CGB) $= \frac{GB}{GC} = \frac{\frac{1}{2}dz}{r}$: donc $dp = \frac{t\,dz}{r}$. On a de plus, par ce qui a été dit plus haut, $t = R + fp$, d'où on tire $f\,dp = dt$, ou $dp = \frac{dt}{f}$, valeur qui, substituée dans l'équation $dp = \frac{t\,dz}{r}$, donne $\frac{t\,dz}{r} = \frac{dt}{f}$, ou $\frac{f}{r}dz = \frac{dt}{t}$, dont l'intégrale est log. $t = \frac{f}{r}z +$ log. A.

e étant le nombre dont le logarithme $= 1$, l'équation précé-

Digitized by Google

dente peut se changer en log. $t = \frac{f}{r} z$ log. e + log. A. Pour déterminer la constante, il faut observer que lorsque l'arc $z = 0$, la tension $t = R$, ce qui, en faisant $z = 0$, dans l'équation précédente, donne $A = R$; au moyen de quoi cette équation se change en log. $t = \frac{f}{r} z$ log. e + log. R, ou en log. $\frac{t}{R} = \frac{f}{r} z$ log. e = log.$^e \frac{fz}{r}$, d'où on tire

1016. $t = Re^{\frac{fz}{r}}$.

L'arc embrassé par la corde croissant en progression arithmétique, la tension croît en progression géométrique; équation qui donne la valeur de l'effort du moteur.

On voit, par cette équation, que l'arc z, embrassé par la corde, croissant en progression arithmétique, la tension t, à laquelle la résistance R peut faire équilibre, croît en progression géométrique. Si on nomme A la longueur totale de l'arc enveloppé par la corde, et P la tension de la corde à l'extrémité de cet arc, ou la puissance qui doit contrebalancer le frottement total de la corde, plus la résistance R, l'équation précédente se changera en

1017. $P = Re^{\frac{fz}{r}}$.

Cas où l'on voudroit avoir égard à la roideur de la corde.

1018. On peut, si on veut, ajouter à la valeur de P la résistance provenant de la roideur de la corde; cette résistance, dont on donnera bientôt la valeur absolue, étant nommée K, on a

$$P = Re^{\frac{fA}{r}} + K.$$

Application numérique de l'équation de l'art. (1017).

1019. On sait (769), que $e = 2{,}718281828459$, le logarithme vulgaire de ce nombre est 0,4342944819. Cela posé, pour voir combien le frottement seul de la corde donne d'avantage à la résistance R, supposons $f = \frac{1}{3}$; ce qui, ainsi qu'on le verra bientôt, ne s'éloigne pas beaucoup de la vérité, et on pourra, en substituant cette valeur dans l'équation de l'art. (1016), former la table suivante, dans laquelle r exprime le rayon du cylindre, et c sa circonférence.

Digitized by Google

Valeur de l'arc x.	Valeur de t, ou tension de la corde.
0	1,0000 × R
1 r	1,3956 × R
2 r	1,4977 × R
3 r	2,7182 × R
$\frac{1}{2}$ C (*)	2,8482 × R
C	8,1169 × R
2 C	65,8330 × R
3 C	534,2400 × R
4 C	4334,6000 × R
5 C	35170,0000 × R
6 C	285400,0000 × R
7 C	2315000,0000 × R
8 C	18790000,0000 × R

On voit que lorsque la corde a fait plus d'une demi-révolution, le frottement donne à la résistance R un avantage qui s'accroît très rapidement, de telle sorte qu'au delà de quatre révolutions, cette résistance est extrêmement petite relativement à la tension à laquelle elle peut faire équilibre. La pratique des arts nous offre en effet beaucoup d'exemples de tensions très considérables qui sont contrebalancées par le seul frottement que produit l'enroulement d'une corde autour d'un cylindre de bois ou de métal, sans qu'aucune puissance soit appliquée à l'autre extrémité de la corde.

Théorie de l'équilibre dans les machines de rotation, en ayant égard au frottement et à la roideur des cordes.

Modification de la formule relative à la résistance provenant de la roideur des cordes.

1020. Avant de donner les formules générales relatives à l'évaluation du frottement et de la roideur des cordes dans les machines de rotation, il est à propos de donner un peu plus de développement à la formule de l'art. (1001), relative à la résistance provenant de la roideur des cordes.

Il résulte de cette formule, que pour un même rouleau ou une même poulie, la résistance due à la roideur de la corde est proportionnelle à la tension Q de cette corde, et à une quantité inconnue Aa. On peut supposer cette quantité inconnue proportionnelle à une puissance μ du diametre de la corde;

(*) On sait que $\frac{1}{2}$ C $= 3,141, r$.

Digitized by Google

ainsi nommant K ce diametre, on aura $Aa = bK^{\mu}$, b et μ étant des quantités à déterminer par expérience, et l'équation de l'art. (1001) deviendra, en nommant R le rayon de la poulie,

$$P - Q = \frac{Q^{1}K^{\mu}}{R}.$$

Cette formule est composée d'une partie constante et d'une partie variable; sa détermination ultérieure.

1021. Mais on ne considere, dans cette expression, la roideur de la corde que comme provenant de la tension Q; et cependant la corde a, par son ourdissage, et indépendamment de toute tension étrangere, un certain degré de roideur qui, en supposant toujours R constant, oppose une résistance constante et additive à la résistance provenant de la roideur occasionnée par la tension Q (*). Cette résistance constante peut être supposée comme la premiere proportionnelle à une puissance μ du diametre de la corde, ou $= aK^{\mu}$. Observons ensuite que si on diminuoit le diametre du rouleau, la courbure de la corde pliée et la résistance due à la roideur qu'elle acquiert par sa fabrication augmenteroient d'autant; et nous aurons, pour la valeur absolue de cette résistance, $\frac{aK^{\mu}}{R}$.

1022. Cette quantité $\frac{aK^{\mu}}{R}$, ajoutée à la quantité $\frac{Q^{1}K^{\mu}}{R}$ trouvée précédemment, donne, pour la résistance totale due à la roideur de la corde, l'expression $\frac{K^{\mu}}{R}(a + bQ)$. Ainsi lorsque, dans l'effet d'une machine, on voudra y avoir égard, il faudra supposer qu'au point où la corde s'enroule, il y a une résistance $\frac{K^{\mu}}{R}(a + bQ)$, agissant dans la direction de la corde, et s'opposant à l'action du moteur avec une énergie qui dépend de la construction de la machine, et du point où s'exerce l'effort $\frac{K^{\mu}}{R}(a + bQ)$. Les quantités a, b et μ sont, ainsi qu'on l'a dit, à déterminer par l'expérience, qui en même temps justifiera la forme de la fonction que nous venons d'adopter pour évaluer la roideur des cordes.

Du frottement dans la poulie simple.

1023. Nous pouvons maintenant trouver des formules pour exprimer les conditions physiques de l'équilibre dans les machines de rotation : nous commencerons par la poulie, qui est l'espece de levier dans lequel les distances perpendiculaires du

(*) M. Coulomb est le premier qui ait fait cette intéressante remarque.

Digitized by Google

point d'appui aux directions du moteur et de la résistance, sont égales.

Soient les poulies FBD (*fig.* 170, nos 1 et 2), l'une desquelles, n°. 1, porte son axe qui tourne dans les boîtes ou ouvertures circulaires faites à la chappe; et l'autre, n° 2, tourne autour de l'axe immobile fixé à la chappe.

On suppose, conformément à ce qui est pratiqué, qu'il y a du jeu entre l'axe $\begin{cases} \text{mobile EH, n° 1} \\ \text{immobile EH, n° 2} \end{cases}$, et la circonférence $\begin{cases} \text{EK dans laquelle cet axe se meut, n° 1,} \\ \text{EK qui se meut autour de cet axe, n° 2.} \end{cases}$

Cela posé, M étant le moteur, S la résistance, nos 1 et 2, on voit sur le champ que leur action combinée doit passer en un point E de l'axe ou de la circonférence dans laquelle cet axe est emboîté. La direction AG de la résultante de M et S passe par ce point E; et comme le mouvement est supposé prêt à se produire, si on mene la tangente EN, l'angle AEN doit être tel que le frottement produit sur EN soit prêt à être surmonté. Ainsi le moteur M a à contrebalancer, 1°. la résistance S; 2°. le frottement en E qu'on peut concevoir comme une seconde résistance agissant dans la direction EN de la tangente au point E; 3°. la roideur de la corde au point D, qu'on peut concevoir comme une troisieme résistance agissant dans la direction DS.

Menons les rayons CB, CD et CE; faisons CB = R = CD; CE, n° 1 = r; CE, n° 2 = r'. Nommons P la pression qui s'exerce en E perpendiculairement à EN, le centre C étant le centre de mouvement; les conditions de l'équilibre seront, d'après ce qu'on vient de dire, pour le n° 1, $MR = SR + fPr + K''(a + bS)$, et pour le n° 2, $MR = SR + fPr' + (a + bS)K''$. Il ne s'agit plus que de déterminer la valeur de P, ce qu'on fera de la maniere suivante.

Le rapport du frottement qui s'exerce dans la direction EN, à la pression perpendiculaire sur EN est (1007) celui de f : 1; c'est évidemment aussi celui du rayon à la tangente de l'angle AEN; on a donc f : 1 :: 1 : tangente AEN = $\frac{1}{f}$. Mais on sait, par la géométrie, que pour un angle a, on a sin. $a = \frac{\text{tang. } a}{\sqrt{(1 + \text{tang.}^2 a)}}$; donc sin. AEN = $\frac{1}{f\sqrt{(1 + \frac{1}{ff})}}$. D'un autre côté, si on fait angle BAD =

6,

ϵ, on trouvera que la résultante de M et de S, qui agit dans la direction AG, a pour valeur $\sqrt{(M^2 + 2MS\cos.\epsilon + S^2)}$. Cette propriété se déduit des équations [12] et [14] de l'art. (317); car en supposant dans ces équations que le moteur et la résistance sont dans un même plan placé au milieu de la distance entre les extrémités de l'axe, on a $q = q' = \frac{1}{2}q''$, et la somme des pressions données par les équations [12] et [14] devient $\sqrt{(M^2 + 2MR\cos.\epsilon + R^2)}$.

La pression, dans le sens AG, étant $\sqrt{(M^2 + 2MS\cos.\epsilon + S^2)}$, la pression P, perpendiculaire à EN, sera sin. AEN $\sqrt{(M^2 + 2MS\cos.\epsilon + S^2)} = \frac{\sqrt{(M^2 + 2MS\cos.\epsilon + S^2)}}{f\sqrt{(1 + \frac{1}{ff})}} = P$. Substituant cette valeur dans les équations précédentes, on aura,

1024. Pour les conditions de l'équilibre, lorsque l'axe est fixé à la poulie,

Equations de l'équilibre dans la poulie simple, eu égard au frottement et à la roideur des cordes, lorsque l'axe est fixé à la poulie et lorsque l'axe est fixé à la chappe.

$$MR = SR + \frac{r(M^2 + 2MS\cos.\epsilon + S^2)^{\frac{1}{2}}}{(1 + \frac{1}{ff})^{\frac{1}{2}}} + K^{\mu}(a + bS);$$

1025. Et pour les conditions de l'équilibre, lorsque l'axe est fixé à la chappe,

$$MR = SR + \frac{r'(M^2 + 2MS\cos.\epsilon + S^2)^{\frac{1}{2}}}{(1 + \frac{1}{ff})^{\frac{1}{2}}} + K^{\mu}(a + bS).$$

Remarque sur la dernière espece de poulie.

1026. On voit que dans cette derniere espece de poulie, qui est celle usitée dans la marine, le frottement ne dépend pas du diametre de l'axe, mais de celui du trou de la poulie ou de la circonférence dans laquelle l'axe se meut.

Cas où les directions du moteur et de la résistance sont paralleles.

1027. Lorsque les directions du moteur et de la résistance sont paralleles, on a $\epsilon = 0$, $\cos.\epsilon = 1$, et les équations précédentes deviennent,

1°. L'axe étant fixé à la poulie,

$$MR = SR + \frac{r(M + S)}{(1 + \frac{1}{ff})^{\frac{1}{2}}} + K^{\mu}(a + bS);$$

2°. L'axe étant fixé à la chappe,

$$MR = SR + \frac{r'(M + S)}{(1 + \frac{1}{ff})^{\frac{1}{2}}} + K^{\mu}(a + bS).$$

Du frottement dans la poulie moufflée.

1028. Il est aisé maintenant de trouver les conditions de l'équilibre dans la poulie moufflée, eu égard au frottement et à

Digitized by Google

la roideur des cordes : nous allons, pour ne pas nous jeter dans des calculs trop compliqués, traiter le cas où les portions de corde qui soutiennent la mouffle inférieure et le poids à enlever, peuvent être supposées paralleles.

Soient (*fig.* 171) les poulies c, e, g, i, etc. tournant autour d'un axe fixé à la chappe supérieure, et les poulies b, d, f, h, etc. tournant également autour d'un axe commun attaché à la chappe inférieure. On a supprimé les cloisons qui doivent séparer ces poulies, afin de mettre plus de netteté dans la figure. Nommons M le moteur appliqué à l'extrémité K de la corde, et S les poids réunis de la masse à enlever et de la mouffle inférieure. Faisons les tensions des portions de cordes ab, bc, cd, etc. respectivement égales à t, t', t''....$t^{(n)}$; (n) désignant le numéro de l'accentuation, $t^{(n)}$ étant la tension de la portion de corde hi, et $n+1$ le nombre des portions de corde paralleles depuis la premiere à gauche, qui peut être fixée à la mouffle fixe ou la mouffle mobile, jusqu'à la portion hi inclusivement.

Les poulies étant supposées d'égal diametre, soit R leur rayon commun, et r le rayon des trous des poulies, qui, lorsqu'il y aura peu de jeu entre les axes et les trous, pourra être censé égal au rayon même des axes. Les conditions de l'équilibre entre la tension t de la corde ab, et la tension t' de la corde bc, sont, d'après les formules de l'art. (1027), exprimées par l'équation

$$t'\mathrm{R} = t\mathrm{R} + \frac{r(t+t')}{\left(1+\frac{1}{ff}\right)^{\frac{1}{2}}} + \mathrm{K}^{n}(a+bt).$$

Les conditions de l'équilibre entre t' et t'', t'' et t''', etc. donneront pareillement

$$t''\mathrm{R} = t'\mathrm{R} + \frac{r(t'+t'')}{\left(1+\frac{1}{ff}\right)^{\frac{1}{2}}} + \mathrm{K}^{n}(a+bt')$$

$$t'''\mathrm{R} = t''\mathrm{R} + \frac{r(t''+t''')}{\left(1+\frac{1}{ff}\right)^{\frac{1}{2}}} + \mathrm{K}^{n}(a+bt''), \text{ etc.}$$

La premiere de ces équations donne

$$t' = \frac{t\left(\mathrm{R} + \frac{r}{\left(1+\frac{1}{ff}\right)^{\frac{1}{2}}} + \mathrm{K}^{n}b\right)}{\mathrm{R} - \frac{r}{\left(1+\frac{1}{ff}\right)^{\frac{1}{2}}}} + \frac{\mathrm{K}^{n}a}{\mathrm{R} - \frac{r}{\left(1+\frac{1}{ff}\right)^{\frac{1}{2}}}}.$$

Faisons le multiplicateur constant de t dans le deuxieme mem-

Digitized by Google

bre égal à q, et la quantité pareillement constante $\frac{K^{\mu}a}{R-\frac{r}{(1+\frac{1}{ff})^{\frac{1}{2}}}}$ $= x$, on aura, en faisant attention que la forme des valeurs de t'', t'''.... $t^{(n)}$ est absolument la même que celle de la valeur de t'; on aura, disons-nous,

$$t' = qt + x$$
$$t'' = qt' + x$$
$$t''' = qt'' + x$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$t^{(n)} = qt^{(n-1)} + x$$

Eliminant successivement t', t''... $t^{(n-1)}$ des seconds membres de ces équations, on a

$$t = 1.\ t$$
$$[1] \cdots\cdots t' = q.\ t + x\ (1)$$
$$[2] \cdots\cdots t'' = q^2\ t + x\ (q + 1)$$
$$[3] \cdots\cdots t''' = q^3\ t + x\ (q^2 + q + 1)$$
$$[4] \cdots\cdots t'''' = q^4\ t + x\ (q^3 + q^2 + q + 1)$$
$$[5] \cdots\cdots t''''' = q^5\ t + x\ (q^4 + q^3 + q^2 + q + 1)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$[N] \cdots\cdots t^{(n)} = q^n\ t + x\ (q^{n-1} + q^{n-2} + q^{n-3} + q^{n-4} + \ldots\ldots + 1)$$

Le poids S est égal à la somme des tensions t, t', t''... t^n, ou à la somme des membres des équations précédentes qui se trouvent de l'un ou de l'autre côté des signes d'égalité. On voit, à l'aspect de ces équations, que la somme des deuxiemes membres est composée de deux parties: la premiere partie est $t(1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + qn)$, c'est-à-dire le produit de t par une progression géométrique dont les termes extrêmes sont 1, et q^n la raison q, et le nombre des termes, $n+1$; cette premiere partie est donc égale à $\frac{q^{n+1}-1}{q-1}\ t$. Observons maintenant que les termes horizontaux multipliés par x dans les équations [1], [2], [3] ... [N], forment des progressions géométriques, dont les sommes respectives sont $\frac{q-1}{q-1}$; $\frac{q^2-1}{q-1}$; $\frac{q^3-1}{q-1}$ .... $\frac{q^n-1}{q-1}$: la somme de tous ces termes, ou de toutes ces progressions géométriques, est donc égale à $\frac{q-1+q^2-1+q^3-1+\ldots+q^n-1}{q-1} = \frac{q+q^2+q^3+\ldots+q^n-n}{q-1} =$

$\frac{1+q+q^2+q^3+\ldots+q^n-n-1}{q-1} = \frac{\frac{q^{n+1}-1}{q-1}-(n+1)}{q-1} = \frac{q^{n+1}-1}{(q-1)^2} - \frac{n+1}{q-1}$. Ainsi la valeur de S sera donnée par l'équation $S = t.\frac{q^{n+1}-1}{q-1} + x\frac{q^{n+1}-1}{(q-1)^2} - x\frac{n+1}{q-1}$, d'où on tire $t = \frac{S(q-1) - \frac{x(q^{n+1}-1)}{q-1} + x(n+1)}{q^{n+1}-1}$.

Substituant cette valeur dans l'équation [N] ci-dessus posée, qui donne la valeur de $t^{(n)}$, et faisant attention que la progression géométrique $q^{n-1}+q^{n-2}+\ldots+q+1$, a pour somme $\frac{q^n-1}{q-1}$, on a finalement

Équation de l'équilibre dans la poulie mouflée, eu égard au frottement et à la roideur des cordes.

1029. $$t^{(n)} = \frac{q^n\left\{S(q-1) - \frac{x(q^{n+1}-1)}{q-1} + x(n+1)\right\}}{q^{n+1}-1} + x\frac{q^n-1}{q-1}.$$

Ce que devient cette équation lorsque la partie constante de la roideur de la corde peut être supposée nulle.

1030. Si l'obstacle constant provenant de la roideur que la corde acquiert par son ourdissage peut être supposé nul, et nous verrons dans la suite quels sont les cas où cette hypothese est admissible; alors on a $K^{\mu} a = 0$, et par conséquent $x = 0$, ce qui change l'équation précédente en

1031. $$t^{(n)} = \frac{Sq^n(q-1)}{q^{n+1}-1}.$$

Cette valeur de la tension de la portion de corde *hi* sera la valeur du moteur, lorsque ce moteur sera appliqué en un point de *hi*, pour agir de bas en haut. Mais lorsqu'on voudra le faire agir de haut en bas, la corde *hi* passera sur la poulie *i*, et la tension de *ik*, qui représentera la valeur du moteur, se trouvera, en substituant, dans les équations des art. (1025 ou 1027), la valeur de $t^{(n)}$ à la quantité S.

1032. Les défauts inévitables de parallélisme et de position verticale des portions de corde qui supportent la mouffle inférieure, et le frottement des poulies contre les cloisons qui les séparent, nuisent nécessairement un peu à l'exactitude des formules précédentes. Cependant la perfection de la construction des mouffles peut diminuer beaucoup cette irrégularité; on recommandera, en général, de forer les poulies bien perpendiculairement à leur plan, d'arrondir un peu les arêtes des trous, de ne laisser entre les axes et les circonférences de ces trous que le jeu nécessaire pour la parfaite mobilité des poulies; enfin de faire en sorte que les directions des cordes

Digitized by Google

passent le plus exactement possible dans les plans des poulies, perpendiculairement aux axes de rotation.

Cas où l'on suppose le frottement et la roideur des cordes nuls.

1033. Lorsqu'on supposera le frottement et la roideur des cordes nuls, on aura $x = 0$, et $q = 1$, ce qui réduit les équations des art. (1029 et 1031) à $t^{(n)} = S\frac{0}{0}$. Pour trouver la valeur de $t^{(n)}$, dans ce cas on peut se borner à l'équation de l'art. (1031), dans laquelle on déterminera, d'après les regles du calcul différentiel, le rapport $\frac{d\left\{q^n(q-1)\right\}}{d(q^{n+1}-1)}$, qui a pour valeur, $\frac{(n+1)q^n - nq^{n-1}}{(n+1)q^n}$; on fera ensuite $q = 1$ dans cette expression, ce qui la réduira à $\frac{1}{n+1}$, valeur de la fraction $\frac{0}{0}$ ci-dessus. On a, d'après cette détermination, $t^{(n)} = \frac{S}{n+1}$, ce qui est conforme à la proposition énoncée art. (311).

Recherche des conditions de l'équilibre dans le treuil, eu égard au frottement et à la roideur des cordes.

1034. La recherche des conditions de l'équilibre dans le tour ou treuil entraîneroit dans des calculs très longs, si on vouloit considérer la question aussi généralement qu'on l'a fait, art. (317). On a vu que les pressions des tourillons, ainsi que les directions dans lesquelles s'exerçoient ces pressions, n'étoient pas les mêmes à chaque extrémité de l'axe; cette différence de pression qui dépend de la position respective du moteur et de la résistance, peut varier, à chaque instant, par le plus ou moins d'enroulement de la corde qui rapproche ou éloigne le plan dans lequel agit la résistance, du plan dans lequel agit le moteur. Pour éviter les embarras qui naîtroient de ces différentes considérations, on peut, dans la pratique, supposer que les pressions des tourillons sont égales, et que la position du plan dans lequel ces pressions ont lieu est la même que si le moteur et la résistance agissoient dans un plan commun placé au milieu de la distance entre les deux tourillons.

Cela posé, nommons M, le moteur; S, la résistance; R′, la somme des rayons du cylindre sur lequel s'enroule la corde, et de la corde elle-même; K, le rayon de la corde; r, le rayon commun des tourillons; ϵ, l'angle formé par la direction du moteur et celle de la résistance.

La somme des pressions des tourillons prise perpendiculairement à leur circonférence, s'évaluera de la même maniere que celle de l'axe de la poulie, art. (1023), et sera égale à $\frac{(M^2 + 2MS\cos.\epsilon + S^2)^{\frac{1}{2}}}{f\left(1+\frac{1}{ff}\right)^{\frac{1}{2}}}$, et le moteur M, appliqué à une distance R

Digitized by Google

du centre du mouvement, devra, à l'instant où le mouvement sera prêt à avoir lieu, faire équilibre, 1°. à la résistance S appliquée à une distance R′ du centre de mouvement; 2°. à la résistance $\frac{(M^2+2MS\cos.c+S^2)^{\frac{1}{2}}}{\left(1+\frac{1}{f}\right)^{\frac{1}{2}}f}f$, qui est la pression perpendiculaire des tourillons, multipliée par le nombre f, qu'on peut appeller *le coefficient* du frottement, laquelle résistance est appliquée à une distance r du centre de mouvement; 3°. à la résistance $\frac{K^{\mu}}{R'}(a+bS)$, provenant de la roideur de la corde qui s'enroule autour du cylindre, et appliquée à une distance R′ du centre du mouvement; toutes ces distances étant mesurées sur les perpendiculaires menées du centre du mouvement sur les directions du moteur et des résistances. Ces conditions fournissent l'équation

Équation qui exprime ces conditions.

$$1035.\quad MR = SR' + \frac{r(M^2+2MS\cos.c+S^2)^{\frac{1}{2}}}{\left(1+\frac{1}{f}\right)^{\frac{1}{2}}} + K^{\mu}(a+bS);$$

Cas où les directions du moteur et de la résistance sont paralleles.

1036. Et lorsque les directions du moteur et de la résistance sont paralleles,

$$MR = SR' + \frac{r(M+S)}{\left(1+\frac{1}{f}\right)^{\frac{1}{2}}} + K^{\mu}(a+bS).$$

Cas où le treuil est employé à modérer la vîtesse d'un poids qui descend.

1037. Lorsqu'il ne s'agira pas de monter un poids au moyen du treuil, mais de soutenir un poids qui descend, ou de modérer la vîtesse de sa descente, alors la corde se déroulera; et comme, d'après ce qui est dit art. (1001), la résistance due à sa roideur est nulle dans ce cas, on pourra faire $K^{\mu}(a+bS)=0$. Les équations précédentes pourront aussi, en y introduisant cette condition, être appliquées au levier tournant sur un axe, dont les distances perpendiculaires aux directions du moteur et de la résistance seroient égales à R et R′.

Cas où le treuil est mu au moyen de barres ou leviers.

1038. Nous avons supposé que le cylindre du tour étoit mu au moyen d'une roue, et que le moteur étoit appliqué à un point unique de cette roue. Si à cette roue on substitue des leviers qui traversent le cylindre, et dont les extrémités soient à une distance R de son axe; les moteurs appliqués à chacune de ces extrémités étant supposés égaux, leur action ne produira aucune pression sur les tourillons, et n'influera par conséquent en rien sur le frottement, qui sera uniquement dû à la résistance S. On pourra donc considérer

Digitized by Google

le terme $\frac{r(M^2+2MS\cos.\zeta+S^2)^{\frac{1}{2}}}{\left(1+\frac{1}{ff}\right)^{\frac{1}{2}}}$ de l'équation de l'art. (1035), qui est relatif au frottement, comme si M étoit égale à zéro dans ce terme, ce qui le réduit à $\frac{rS}{\left(1+\frac{1}{ff}\right)^{\frac{1}{2}}}$, et cette équation devient

1039. $$MR = SR' + \frac{rS}{\left(1+\frac{1}{ff}\right)^{\frac{1}{2}}} + K^n(a+bS),$$

Équation de l'équilibre, dans ce cas applicable principalement au cabestan.

applicable principalement au cabestan, dans laquelle M exprime la somme des efforts des hommes appliqués à ce cabestan, lesquels efforts sont distribués également, et s'exercent à différents points d'une circonférence qui a R pour rayon.

1040. Nous allons considérer le treuil dans le cas du mouvement, ce qui nous donnera des résultats aisément applicables aux autres machines, et nous fournira en même temps l'occasion d'appliquer les principes de la dynamique.

Théorie du treuil en mouvement, eu égard au frottement et à la roideur des cordes.

Soient (*fig.* 172) AG et KN les profils de l'axe et du cylindre d'un treuil, LT étant la circonférence dans laquelle la masse pesante M exerce son action pour soulever la masse pesante S, attachée au cylindre du treuil; AR est le profil de la boîte dans laquelle se meut l'axe ou tourillon AG.

Le point de contact de l'axe et de sa boîte est en A; AE est une tangente à ce point, dans la direction de laquelle s'exerce le frottement: AOC est une perpendiculaire à cette direction, passant par le centre O de l'axe; DC et DE sont des paralleles à AE et AC; FE, AD et BC sont des verticales, et FAB une horizontale.

1041. Faisons,

Quantités qui doivent entrer dans le calcul.

Le rayon de la circonférence LT $= R$
Le rayon de l'arbre KN du treuil $= r$
Le rayon de l'axe AG du treuil $= r'$
La masse du treuil $= Q$
La distance d'une des molécules de cette masse à l'axe autour duquel roule tout le système $= \rho$
La masse du poids moteur ou prépondérant qui agit à l'extrémité du rayon R $= M$
La masse du poids mu ou élevé attaché à l'arbre du treuil $= S$
La force accélératrice due à la pesanteur. $= \varphi$
La force accélératrice qui animera le corps M $= \varphi'$
Le rapport du frottement à la pression $= f$.
L'angle formé par l'horizontale AF et par la tan-

Digitized by Google

gente AE au point de contact de l'axe et de sa boîte $= \epsilon$

La masse dont le poids équivaut à la pression du point de contact E, perpendiculaire à AE $= N$

1042. Représentons par AD, la charge verticale du point A, AC sera, dans ce cas, la pression de ce point perpendiculaire à la tangente AE, qui, puisque la réaction est égale à l'action, représentera une puissance AE = N, réagissant dans la direction AC; la tangente AE représentera une puissance équivalente au frottement qui s'exerce en A et agissant dans la direction AE. Le frottement AE étant produit par la pression AC, on a évidemment $AE = f \times AC = \varphi f N$.

Nombre d'inconnues à déterminer dans la solution du problème.

1043. Cela posé, nous avons trois inconnues φ', ϵ et N, dont la détermination exige trois équations; le mouvement de rotation autour du point O nous en fournira une, et l'immobilité de ce point O nous en fournira deux autres, la premiere exprimant qu'il n'a aucun mouvement horizontal, et la seconde exprimant qu'il n'a aucun mouvement vertical.

Recherche de l'équation relative au mouvement de rotation autour de l'axe.

1044. Pour trouver l'équation relative au mouvement de rotation autour du point O, remarquons que le frottement AE $= \varphi f N$ s'oppose, en A, à ce mouvement de rotation avec la même énergie que le feroit le poids $\frac{r'}{R} \varphi f N$, appliqué en Z; on peut donc imaginer qu'il n'y a point de frottement en substituant au poids φM, le poids $\varphi M - \frac{r'}{R} \varphi f N$: ainsi les quantités de mouvement imprimées sont 1° $\varphi (M - \frac{r'}{R} f N)$, qu'on peut décomposer en $\varphi' (M - \frac{r'}{R} f N)$ qui aura lieu, et en $(\varphi - \varphi')(M - \frac{r'}{R} f N)$ qui n'aura pas lieu; 2°. $-\varphi S$ composée de $\frac{r}{R} \varphi' S$, qui aura lieu, on donne à φS le signe négatif, parcequ'il tend à faire tourner en sens contraire de φM), et de $-(\varphi S + \frac{r}{R} \varphi S)$ qui n'aura pas lieu; 3° une quantité de mouvement nulle, ou égale à zéro, pour chaque molécule $d Q$ de la masse Q du treuil, celles que la pesanteur leur imprime se détruisant autour du point O, laquelle quantité de mouvement nulle peut être censée composée de $\frac{r}{R} \varphi' d Q$ qui aura lieu dans le sens N *m* K, et de $-\frac{r}{R} \varphi' d Q$ qui n'aura pas lieu.

Nous n'avons aucun égard à la pression AC, puisque sa direction passe par le point O, et qu'elle ne peut produire aucun mouvement de rotation. Cela posé, d'après le principe général de l'art. (382) les quantités de mouvement $(\varphi - \varphi')$ (M

Digitized by Google

$(M - \frac{r'}{R} f N)$, $-(\varphi S + \frac{r}{R}\varphi' S)$ et $-\int \frac{r}{R}\varphi' dQ$, sont telles que si elles avoient été seules imprimées, tout le système seroit demeuré en équilibre autour du point O : ainsi la somme de leur moment par rapport à ce point, doit être égale à zéro ; ce qui donne :

$$(\varphi - \varphi')(M - \tfrac{r'}{R} f N) R - (\varphi S + \tfrac{r}{R}\varphi' S) r - \int \tfrac{r}{R}\varphi' dQ = 0,$$

Exposition de cette équation.

1045. Ou, $RM = r' f N + \frac{1}{\varphi - \varphi'} \left\{ rS(\varphi + \frac{r}{R}\varphi') + \int \frac{r}{R}\varphi' dQ. \right\}$

1046. Avant de chercher les équations qui expriment que le point O n'a point de mouvement progressif, il faut avoir la valeur des tensions des cordes qui soutiennent les masses M et S, lesquelles tensions, jointes au poids du treuil, forment la pression verticale AD du point A.

Si la masse M étoit libre, elle auroit la force accélératrice φ; elle n'a que la force accélératrice φ', dont la différence $\varphi - \varphi'$ est détruite par la tension de la corde, laquelle tension est par conséquent égale à $(\varphi - \varphi')$ M. D'un autre côté, la masse S ayant un mouvement ascensionnel, la corde qui la soutient doit d'abord détruire sa pesanteur φ S, et lui donner en outre la force accélératrice $\frac{r}{R}\varphi'$; ainsi $S(\varphi + \frac{r}{R}\varphi')$ représente la tension de cette corde.

1047. La pression verticale du point A est donc égale à $M(\varphi - \varphi') + S(\varphi + \frac{r}{R}\varphi') + \varphi Q$; cette pression s'exerce en sens contraire de celles qui résultent des puissances AE et AC; et on a (150), pour désigner que le point O n'a point de mouvement vertical,

Recherche des équations relatives à l'immobilité de l'axe.

$$M(\varphi - \varphi') + S(\varphi + \tfrac{r}{R}\varphi') + \varphi Q - AE \times \text{cos. EAD} - AC \text{ cos. CAD} = 0;$$

Exposition de ces équations.

et pour désigner que ce point O n'a point de mouvement horizontal,

$$AE \times \text{cos. EAF} - AC \times \text{cos. CAB} = 0.$$

1048. On sait (1042) que AC = N, AE = fN, en substituant la masse N à son poids φ N, et que l'angle EAF = ϵ; on a donc EAD = complément de ϵ, CAD = ϵ, CAB = complément de ϵ, et la premiere des deux équations précédentes se changera en

$$M(\varphi - \varphi') + S(\varphi + \tfrac{r}{R}\varphi') + \varphi Q = fN \text{ sin. } \epsilon + N \text{ cos. } \epsilon.$$

Digitized by Google

1049. Et la deuxieme qui exprime l'équilibre dans le sens horizontal, se change en

$$f\mathrm{N}\cos.\,\epsilon = \mathrm{N}\sin.\,\epsilon.$$

Équations qui donnent la pression de l'axe et le frottement qui résulte de cette pression.

1050. Cette derniere équation donne $\cos.\,\epsilon = \frac{\sin.\,\epsilon}{f}$. Substituant cette valeur dans l'équation de l'art. (1048), on en tire

$$\mathrm{N} = \frac{f\left\{\mathrm{M}(\varphi-\varphi') + \mathrm{S}\left(\varphi + \frac{r}{\mathrm{R}}\varphi'\right) + \varphi\mathrm{Q}\right\}}{(1+ff)\sin.\,\epsilon}.$$

1051. Telle est la valeur de la pression qui s'exerce au point A, pour avoir le frottement AE qui s'exerce au même point. Il faut multiplier l'équation précédente par f; ce qui donne, après avoir divisé le deuxieme membre haut et bas par ff,

$$f\mathrm{N} = \frac{\mathrm{M}(\varphi-\varphi') + \mathrm{S}\left(\varphi + \frac{r}{\mathrm{R}}\varphi'\right) + \varphi\mathrm{Q}}{\left(1+\frac{1}{ff}\right)\sin.\,\epsilon.}$$

Différentes valeurs du frottement, et équations qui prouvent que la force accélératrice est constante.

1052. Si on fait attention que $f = \frac{\sin.\,\epsilon}{\cos.\,\epsilon} = \frac{\sin.\,\epsilon}{(1-\sin.^2\epsilon)^{\frac{1}{2}}}$, d'où on tire $\sin.^2\epsilon = \frac{f^2}{1+f^2} = \frac{1}{1+\frac{1}{ff}}$, et $\sin.\,\epsilon = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{ff}\right)^{\frac{1}{2}}}$, et qu'on substitue l'un ou l'autre des deux membres de cette équation dans l'équation de l'art. précédent; on aura,

1053. 1°. Pour la valeur du frottement dans laquelle l'angle ϵ n'entre plus,

$$\frac{\mathrm{M}(\varphi-\varphi') + \mathrm{S}\left(\varphi + \frac{r}{\mathrm{R}}\varphi'\right) + \varphi\mathrm{Q}}{\left(1+\frac{1}{ff}\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

1054. 2°. Pour la valeur du même frottement dans laquelle l'angle ϵ est substitué au rapport f,

$$\left\{\mathrm{M}(\varphi-\varphi') + \mathrm{S}\left(\varphi + \frac{r}{\mathrm{R}}\varphi'\right) + \varphi\mathrm{Q}\right\}\sin.\,\epsilon.$$

1055. Si on substitue dans l'équation de l'art. (1045), pour $f\mathrm{N}$, la valeur du frottement de l'art. (1053), divisée par φ, (1048), on aura

$$\mathrm{MR} = \frac{1}{\varphi-\varphi'}\left\{r\mathrm{S}\left(\varphi + \frac{r}{\mathrm{R}}\varphi'\right) + \frac{\varphi'}{\mathrm{R}}\int_{\prime} dQ\right\} + \frac{\left\{\mathrm{M}(\varphi-\varphi') + \mathrm{S}\left(\varphi + \frac{r}{\mathrm{R}}\varphi'\right) + \varphi\mathrm{Q}\right\}r'}{\varphi\left(1+\frac{1}{ff}\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

1056. Et si on substitue dans l'équation du même art. (1045), pour $f\mathrm{N}$, la valeur du frottement de l'art. (1054), on aura

Digitized by Google

$$MR = \frac{1}{\varphi - \varphi'} \left\{ rS\left(\varphi + \frac{r}{R}\varphi'\right) + \frac{\varphi'}{R}\int dQ \right\} +$$
$$\frac{1}{\varphi}\left\{ M(\varphi - \varphi') + S\left(\varphi + \frac{r}{R}\varphi'\right) + \varphi Q \right\} r' \sin. \mathcal{C}.$$

1057. On voit, par l'une ou l'autre des équations des deux articles précédents, que la force accélératrice φ' est constante, puisque sa valeur, qu'il est aisé de déduire de ces équations, ne seroit composée que de quantités constantes.

Comment on peut faire entrer la roideur de la corde dans la solution du problème précédent.

1058. Il est aisé de faire entrer la roideur de la corde dans les équations des art. (1055 et 1056); la tension de la corde qui s'enroule autour de l'arbre du treuil, étant égale à $S\left(\varphi + \frac{r}{R}\varphi'\right)$, la résistance due à la roideur de cette corde sera (1021 et 1022), $\frac{K^\mu}{r}$ $\left\{ a\varphi + bS\left(\varphi + \frac{r}{R}\varphi'\right) \right\}$, quantités qu'il faut multiplier par le rayon r de l'arbre du treuil, et le produit sera ajouté au deuxieme membre des équations des art. (1055 et 1056).

Cas où l'on suppose que le mouvement est uniforme, ou qu'il y a équilibre.

1059. Supposons que le mouvement est uniforme, ou qu'il y a équilibre; l'un et l'autre de ces deux cas donne $\varphi' = 0$; et l'équation de l'art. (1055), préalablement multipliée par φ, devient, en ayant égard à la roideur de la corde,

$$MR = Sr + \frac{r'(M + S + Q)}{\left(1 + \frac{1}{ff}\right)^{\frac{1}{2}}} + K^\mu (a + bS).$$

C'est la même équation trouvée art. (1036), ou dans laquelle se trouve compris de plus le frottement provenant du poids Q de la machine.

1060. Si l'on fait, dans l'équation précédente, abstraction de la roideur de la corde qu'on substitue pour $\left(1 + \frac{1}{ff}\right)^{\frac{1}{2}}$ sa valeur $\frac{1}{\sin. \mathcal{C}}$, art. (1052), et qu'on en tire la valeur de M; on aura $M = \frac{Sr + r'(S + Q)\sin. \mathcal{C}}{R - r'\sin. \mathcal{C}}$.

La poulie est un cas particulier des questions qu'on vient de traiter.

1061. Il est aisé d'appliquer toutes les équations précédentes au cas de la poulie, en y faisant $r = R$.

Cas où le treuil est employé à faire glisser un corps sur un plan horizontal.

1062. Supposons que le poids S, au lieu de monter verticalement, glisse sur un plan horizontal avec frottement; on conçoit aisément qu'il opposera la même résistance qu'un poids qui monteroit verticalement, et dont la pesanteur, au lieu d'être φ S, seroit $f\varphi$ S, puisqu'au lieu de la pesanteur absolue il ne faut prendre que la portion de cette pesanteur à laquelle le frottement est égal; il ne s'agit donc, dans ce cas, que de substituer, dans le second membre des équations des art. (1055 et 1056), la

Digitized by Google

quantité $f\varphi$ S à la quantité φ S. Il faut cependant observer que le rapport f, qui entre dans cette expression, n'est pas le même que celui qui résulte du frottement de l'axe, et qui entre dans l'expression $\left(1+\frac{1}{ff}\right)^{\frac{1}{2}}$, ou dans la valeur de sin. ϵ des équations dont on vient de parler; on en verra la raison dans le chapitre suivant.

Comment on peut déterminer par expérience le rapport du frottement à la pression, en faisant, au moyen d'un poids, glisser un traineau sur un plan horizontal.

1063. Si, dans l'hypothese de l'article précédent, et dans le cas de la poulie, on suppose le frottement de l'axe nul, l'équation de l'art. (1056) deviendra, en faisant $r=\mathrm{R}$, sin. $\epsilon=0$, et substituant dans le second membre $f\varphi$ S à φ S,

$$\mathrm{M}(\varphi-\varphi')=\mathrm{S}(f\varphi+\varphi')+\varphi'\frac{\int_i^s dQ}{\mathrm{R}^2}$$

d'où on tire,

$$1064.\quad f=\frac{1}{\varphi\mathrm{S}}\left\{\mathrm{M}\varphi-\varphi'\left(\mathrm{M}+\mathrm{S}+\frac{\int_i^s dQ}{\mathrm{R}^2}\right)\right\}$$

1065. Cette équation peut servir, ainsi qu'on le verra dans le chapitre suivant, à déterminer f lorsqu'on connoît φ' par expérience. Supposons que les corps M et S aient parcouru un espace e dans un temps t, et qu'on se soit assuré que le mouvement est uniformément accéléré, φ' étant le double de l'espace parcouru dans l'unité de temps, et les espaces parcourus étant comme les quarrés des temps, on a $\frac{1}{2}\varphi' : 1 :: e : t^2$, d'où $\varphi'=\frac{2e}{t^2}$. Substituant cette valeur dans l'équation de l'art. précédent, elle devient,

$$1066.\quad f=\frac{1}{\varphi\mathrm{S}}\left\{\mathrm{M}\varphi-\frac{2e}{t^2}\left(\mathrm{M}+\mathrm{S}+\frac{\int_i^s dQ}{\mathrm{R}^2}\right)\right\}.$$

1067. Il y a une maniere abrégée de déterminer la quantité $\frac{\int_i^s dQ}{\mathrm{R}^2}$ dans la poulie ou dans le cercle, qu'il est bon de connoître. Qu'on imagine deux cercles concentriques infiniment près, et le cercle intérieur ayant ρ pour rayon; soit n le rapport de la circonférence au rayon: l'espace compris entre les deux cercles dont on vient de parler sera égal à $n\rho d\rho$, et ce même espace pourra représenter dQ. On aura donc $\frac{\int_i^s dQ}{\mathrm{R}^2}=\frac{n\int_i^s d\rho}{\mathrm{R}^2}=\frac{n\rho^2}{2\mathrm{R}^2}+\mathrm{A}$. Cette intégrale, étant supposée nulle lorsque $\rho=\rho'$, de-

Digitized by Google

vient $\frac{\pi(\rho^4-\rho''^4)}{4R^2}$; et si l'on fait $\rho = R$, elle se change en $\frac{\pi(R^4-\rho''^4)}{4R^2}$.

ρ' exprime le rayon du vuide dans lequel se meut l'axe de la poulie, lorsque cet axe est immobile; si ce rayon est assez petit pour être négligé, l'expression $\frac{\pi(R^4-\rho'^4)}{4R^2}$ se change en $\frac{\pi}{4}R^2$; mais la surface du cercle qui a R pour rayon, est égale à $\frac{\pi}{2}R^2$: donc la surface de ce cercle, qui représente la masse de la poulie, est double de la quantité $\frac{\int_{\rho'}^{\rho} dQ}{R^2}$.

1068. Soit p le poids de la poulie, sa masse sera égale (174) à $\frac{p}{g}$, et on aura $\frac{\int_{\rho'}^{\rho} dQ}{R^2} = \frac{\frac{1}{2}p}{g}$. Soient de plus M' et S' les poids des masses M et S, on aura $M = \frac{M'}{g}$, $S = \frac{S'}{g}$, et l'équation de l'art. (1066) deviendra

$$1069.\quad f = \frac{1}{S'}\left\{M' - \frac{2c}{e^{i\varepsilon}}\left(M' + S' + \frac{1}{2}p\right)\right\}.$$

Du mouvement dans le treuil, lorsque la direction de l'effort du moteur n'est pas parallele à la direction de l'effort de la résistance.

1070. On a supposé jusqu'à présent que l'effort du moteur M s'exerçoit suivant une direction verticale ou parallele à celle de la résistance S; il peut se faire et il arrive souvent que ces deux directions ne sont point paralleles, et on peut toujours rapporter ce cas à celui d'une masse pesante M', suspendue à une corde passant sur une poulie de renvoi X, au moyen de laquelle l'effort du moteur s'exerce en W dans la direction WX. On suppose la poulie X sans frottement.

L'équation relative au mouvement de rotation est la même dans ce deuxieme cas que dans le premier.

1071. Cette condition ne change rien à l'équation de l'art. (1045), relative au mouvement de rotation, dans laquelle il n'y a autre chose à faire qu'à substituer M' à M; on voit en effet que la tension de la portion de corde XW étant égale à la tension de la portion de corde XM', le poids de la masse M' tend à faire tourner avec la même énergie que si son action s'exerçoit verticalement au point Z.

Recherche et expositions des autres équations.

1072. Mais il n'en est pas de même des équations des art. (1048 et 1049), qui expriment que le point O est immobile. Soit ε' l'angle formé par XW et l'horizontale; l'effort vertical exercé au point W ne sera plus, comme à l'art. (1047), $M'(\varphi - \varphi')$, mais $M'(\varphi - \varphi')\sin.\varepsilon'$, qu'il faudra substituer à $M(\varphi - \varphi')$, dans l'équation qui exprime que le point O n'a point de mouvement vertical; il y aura de plus, au même point, un effort horizontal égal à $M'(\varphi - \varphi')\cos.\varepsilon'$; lequel doit entrer dans l'équation qui exprime que le point O n'a point de mouvement horizontal.

Digitized by Google

1073. Les deux équations des art. (1048 et 1409) se changent donc, 1°, pour l'équilibre dans le sens vertical, en

$$M'(\varphi - \varphi') \sin. \mathfrak{C}' + S\left(\varphi + \frac{r}{R}\varphi'\right) + \varphi Q = fN \sin. \mathfrak{C} + N \cos. \mathfrak{C};$$

2°. pour l'équilibre dans le sens horizontal, en

$$fN \cos. \mathfrak{C} + M'(\varphi - \varphi') \cos. \mathfrak{C}' = N \sin. \mathfrak{C},$$

qui, jointes à l'équation de l'art. (1045), serviront à déterminer trois des quantités M', $\mathfrak{C}$, f et N, dont une doit toujours être donnée.

1074. Si on suppose le mouvement uniforme, ou $\varphi' = 0$, l'équation de l'art. (1045) et les deux équations de l'article précédent se changeront en

$$\varphi R M' = r' f N + r S \varphi,$$

$$M' \varphi \sin. \mathfrak{C}' + S\varphi + \varphi Q = fN \sin. \mathfrak{C} + N \cos. \mathfrak{C},$$

$$fN \cos. \mathfrak{C} + M' \varphi \cos. \mathfrak{C}' = N \sin. \mathfrak{C},$$

qui serviront à déterminer trois des quantités M', $\mathfrak{C}$, f et N, lorsqu'une d'entre elles sera donnée.

1075. Si on fait $\varphi M' = m$, $\varphi S = s$, $\varphi Q = q$, la derniere équation de l'art. précédent donnera

$$\cos. \mathfrak{C} = \frac{1}{f}\left(\sin. \mathfrak{C} - \frac{m \cos. \mathfrak{C}'}{N}\right).$$

Cette valeur, substituée dans l'avant derniere équation du même article, donnera

$$1076.\quad N = \frac{s + q + m\left(\sin. \mathfrak{C}' + \frac{1}{f}\cos. \mathfrak{C}'\right)}{\left(f + \frac{1}{f}\right)\sin. \mathfrak{C}},$$

équation qui, comparée avec l'équation $Rm = r' f N + rs$, fera connoître les valeurs de sin. $\mathfrak{C}$ et de N lorsque m sera donné.

Du frottement dans la vis.

Recherche de l'équation qui donne la valeur du moteur dans la vis à filet triangulaire, l'équilibre ayant lieu.

1077. On a vu, art. (339 *et suiv.*), la description de la vis et la génération de la surface courbe de ses filets, au moyen de quoi on pourra très aisément entendre ce qui suit.

Nous supposerons qu'il y a équilibre, ou que le mouvement est prêt à avoir lieu, et que, comme à l'art. (341), l'effort P de la résistance se fait dans le sens de l'axe de la vis, et que l'effort M

Digitized by Google

du moteur s'exerce dans un plan perpendiculaire à cet axe, et dans une direction perpendiculaire à la longueur de la barre ou levier. Cette hypothese peut toujours se réduire à celle où l'axe de la vis seroit vertical, et où une puissance horizontale M seroit employée à enlever un poids P suspendu à l'extrémité inférieure de la vis, qui est supposée mobile, l'écrou étant fixe.

1078. Soit, dans ces hypotheses, A, (*fig.* 173) un point représentant la projection de l'axe de la vis sur un plan horizontal; AC une ligne horizontale; BHC un plan vertical (qu'il faut supposer relevé perpendiculairement sur le plan de la figure après avoir fait un quart de révolution sur la ligne BC), représentant une portion infiniment petite du profil d'un des filets, pris dans un plan vertical passant par l'axe; FCH un autre plan vertical (qu'il faut aussi supposer relevé perpendiculairement sur le plan de la figure, après avoir fait un quart de révolution sur la ligne CF), représentant la portion correspondante, infiniment petite, du profil du filet, pris dans un plan vertical perpendiculaire au plan BCH: la ligne CH est la ligne verticale d'intersection commune aux deux portions de profil dont on vient de parler, la ligne CF est horizontale comme la ligne CB; en sorte que les points B, C et F sont à la même hauteur: la ligne infiniment petite BF est donc une horizontale qui se trouve sur la surface du filet, et le triangle BCF est la projection horizontale de l'élément triangulaire BHF (*) de la surface de ce filet; l'angle BHF est, d'après la génération de l'hélice, un angle droit, ainsi que sa projection orthogonale BCF.

1079. Cela posé, la totalité des filets supportant le poids entier P, dans lequel le poids de la vis est censé compris, la pression verticale de chaque élément de surface BHF sera égale à $\frac{P}{\omega}$, ω étant le nombre des éléments de surface; or puisqu'il y a équilibre, et que cet équilibre est produit par un moteur dont l'effort s'exerce horizontalement, l'effort vertical $\frac{P}{\omega}$, que nous désignerons par p, et qui a lieu sur le plan incliné BHF, doit être considéré comme contrebalancé par une puissance horizontale, dont il s'agit de trouver l'expression eu égard au frottement, et dont la détermination exige, par conséquent, qu'on connoisse l'angle que le plan BHF fait avec la verticale.

(*) On voit aisément que le triangle BHF doit être connu comme formé de la ligne BF et des lignes BH et FH, dont les extrémités H se réunissent à une hauteur CH au-dessus du plan de la figure.

Digitized by Google

1080. Soit D'H'C', un profil du filet pris dans un plan vertical perpendiculaire à la ligne BF, et passant par la ligne CH; les points D', C', H' étant les mêmes que les points D, C et H. L'angle D'H'C' mesurera celui formé par le plan BHF, et par la verticale. Faisons,

La hauteur du pas de vis	$= h$
Le rayon AC	$= r$
Le rapport de la circonférence au rayon	$= n$
Le bras de levier du moteur M	$= R$
L'angle CHB	$= \epsilon$
L'angle CHF	$= \epsilon'$
L'angle D'H'C'	$= \epsilon''$
La hauteur CH	$= h'$

On aura
CB $= h'$ tang. ϵ; CF $= h'$ tang. ϵ'; ou comme CH est à CF comme la hauteur du pas de vis est à la circonférence qui a AC pour rayon, on aura $h : nr :: 1 :$ tang. $\epsilon' = \frac{nr}{h} = \frac{1}{h'}$ CF; et enfin D'C' $= h'$ tang. ϵ''.

1081. Les triangles rectangles DCF, BCF, donnent BF : BC :: CF : CD, ou (tang.$^2\epsilon' +$ tang.$^2\epsilon)^{\frac{1}{2}}$: tang. ϵ :: tang. ϵ' : tang. ϵ'', d'où

$$\text{tang. } \epsilon'' = \frac{\text{tang. } \epsilon \text{ tang. } \epsilon'}{(\text{tang.}^2\epsilon + \text{tang.}^2\epsilon')^{\frac{1}{2}}},$$

ou, en substituant pour tang. ϵ' sa valeur $\frac{nr}{h}$, tang. $\epsilon'' = \frac{nr \text{ tang. } \epsilon}{(n^2r^2 + h^2 \text{ tang.}^2\epsilon)^{\frac{1}{2}}}$, équation qui donne l'inclinaison de l'élément de surface BHF.

1082. La valeur de la puissance horizontale qui soutient un poids p sur un plan incliné, faisant avec la verticale un angle ϵ'', est, en nommant f le rapport de la pression au frottement, et supposant l'adhérence nulle, (994),

$$\frac{p(\cos. \epsilon'' + f \sin. \epsilon'')}{\sin. \epsilon'' - f \cos. \epsilon''}.$$

On sait que sin. $\epsilon'' =$ tang. ϵ'' cos. ϵ''; substituant cette valeur, l'expression précédente devient

$$\frac{p(1 + f \text{ tang. } \epsilon'')}{\text{tang. } \epsilon'' - f},$$

et, en substituant pour tang. ϵ'', sa valeur tirée de l'art. (1081),

P

Digitized by Google

$$\frac{p\left(1+\frac{fnr\,\text{tang.}\,C}{(n^2r^2+h^2\,\text{tang.}^2\,C)^{\frac{1}{2}}}\right)}{\frac{nr\,\text{tang.}\,C}{(n^2r^2+h^2\,tang.^2\,C)^{\frac{1}{2}}}-f.}$$

1083. La puissance horizontale, dont nous venons de trouver la valeur, agit dans une direction parallele à DC. Supposons que DC représente cette puissance, et décomposons la en deux autres; l'une DE perpendiculaire à AC, et l'autre EC parallele à AC: on voit que les actions des différentes composantes EC, qui agissent dans toute l'étendue des filets de la vis, et qui sont dirigées du centre à la circonférence, se détruisent mutuellement, et que les actions des composantes DE s'ajoutent au contraire pour faire tourner la vis et monter le poids.

On a DE = CD × cos. EDC, ou comme l'angle EDC = angle FBC, DE = CD × cos. FBC. Mais cos. FBC = $\frac{BC}{FB}$ = $\frac{\text{tang.}\,C}{(\text{tang.}^2\,C+\text{tang}^2\,C')^{\frac{1}{2}}}$ = $\frac{h\,\text{tang.}\,C}{(n^2r^2+h^2\,\text{tang.}^2\,C)^{\frac{1}{2}}}$: donc en mettant pour CD sa valeur tirée de l'art. (1082), on a

$$DE=p\left\{\frac{1+\frac{fnr\,\text{tang.}\,C}{(n^2r^2+h^2\,\text{tang.}^2\,C)^{\frac{1}{2}}}}{\frac{nr\,\text{tang.}\,C}{(n^2r^2+h^2\,\text{tang.}^2\,C)^{\frac{1}{2}}}-f}\right\}\times\frac{h\,\text{tang.}\,C}{(n^2r^2+h^2\,\text{tang.}^2\,C)^{\frac{1}{2}}}.$$

1084. Pour rapporter l'effort de la puissance DE à l'extrémité du levier R, à laquelle s'exerce l'action du moteur; il faut multiplier cette puissance par $\frac{r}{R}$; effectuant la multiplication, réduisant, et faisant attention que le moteur M équivaut à la somme de toutes les puissances $\frac{r}{R}$ × DE,

Exposition de cette équation.

$$M=\int_R\frac{krp\left\{\left[(n^2r^2+h^2\,\text{tang.}^2\,C)^{\frac{1}{2}}+fnr\,\text{tang.}\,C\right]\text{tang.}\,C\right\}}{\left\{\left[nr\,\text{tang.}\,C-f(n^2r^2+h^2\,\text{tang.}^2\,C)^{\frac{1}{2}}\right]\left[n^2r^2+h^2\,\text{tang.}^2\,C\right]^{\frac{1}{2}}\right\}}$$

Considérations propres à faciliter l'application de cette équation.

1085. L'élément de la surface du filet est égal à *adrdh*, *a* étant un multiplicateur constant: si on nomme S, la surface entiere de la partie du filet qui se trouve du côté de la résistance P, et K le nombre des filets, on aura $\frac{P}{K}$: S :: *p* : *adrhd*, d'où $p=\frac{P\times adrdh}{KS}$. Il faudroit intégrer l'expression résultante de la substitution de la valeur de *p*, d'abord par rapport à *r*, et ensuite par rapport à *h;* mais on peut simplifier beaucoup en considérant *p* comme exprimant la somme des efforts verticaux qui s'exercent sur toute la longueur transversale CB du filet

Digitized by Google

(*fig.* 95, n° 5), et prenant pour r le rayon moyen arithmétique entre ceux des cercles CQC' et BQ'B' (n° 1); dans cette hypothese, toute la quantité qui multiplie p sera constante; on aura $fp = P$; et l'équation de l'art. précédent se changera en

$$M = \frac{hrP\left\{\left[(n^2r^2 + h^2\,\text{tang.}^2\,\mathcal{C})^{\frac{1}{2}} + fnr\,\text{tang.}\,\mathcal{C}\right]\text{tang.}\,\mathcal{C}\right\}}{R\left\{\left[nr\,\text{tang.}\,\mathcal{C} - f(n^2r^2 + h^2\,\text{tang.}^2\,\mathcal{C})^{\frac{1}{2}}\right]\left[n^2r^2 + h^2\,\text{tang.}^2\,\mathcal{C}\right]^{\frac{1}{2}}\right\}},$$

équation qui n'est pas rigoureuse, mais assez exacte pour la pratique.

1086. Dans le cas de la vis à filets quarrés, on a $\mathcal{C} = 90°$, et tang. $\mathcal{C} = \infty$, et l'équation précédente devient

$$M = \frac{rP(h + fnr)}{R(nr - fn)}.$$

Telle est l'équation qu'on donne ordinairement pour le frottement de la vis à filets quelconques; mais on voit qu'elle ne s'applique qu'à la vis à filets quarrés, et que lorsque le profil des filets est triangulaire, l'équation du frottement devient très différente.

1087. Si on suppose le frottement nul, ou $f = 0$, l'équation précédente devient $M = \frac{Ph}{nR}$; c'est la même équation donnée art. (341.)

1088. La théorie que nous venons d'exposer est suffisante pour tous les besoins de la pratique: mais les formules qui en dérivent, renferment des quantités relatives à l'adhérence, au frottement et à la roideur des cordes, qu'il est nécessaire de déterminer; c'est ce que nous allons faire dans le chapitre suivant, en rapportant une suite d'expériences, dont les motifs et les détails se concevront parfaitement, et seront examinés avec plus d'intérêt, lorsqu'on aura étudié d'avance la théorie générale. C'est le motif qui nous a engagés à exposer d'abord cette théorie.

Expériences sur le frottement et sur la roideur des cordes.

Prix proposé par l'académie sur la théorie des machines simples, et remporté par M. Coulomb.

1089. L'académie des sciences a successivement proposé en 1779 et 1781, pour objet de concours, la théorie des machines simples, en ayant égard aux effets du frottement et de la roideur des cordages. Le prix, qui étoit double, a été remporté par M. Coulomb, capitaine au corps royal du génie, et aujourd'hui membre de l'académie. Le mémoire de M. Coulomb, qui est l'ouvrage le mieux fait et le plus complet qu'on ait encore

publié sur cette matiere, a été imprimé dans le 10e volume des mémoires des savants étrangers, et ses expériences y sont décrites dans un grand détail; nous avons tiré de ce mémoire une partie de la théorie contenue dans les chapitres précédents: nous allons maintenant donner une description succincte, et les résultats des expériences qui viennent à l'appui de cette théorie et qui servent à rendre applicables à la pratique les formules qui en sont déduites.

Appareil dont s'est servi cet auteur pour les expériences sur le frottement des surfaces planes.

1090. Les expériences sur le frottement des surfaces planes qui glissent l'une sur l'autre, ont été faites au moyen de l'appareil suivant. La *fig.* 174 représente une table très solide, dont chaque pilier montant est accoté par des jambes de force. Le madrier CC′ *d d*′, qui forme la table, a 3 pouces d'épaisseur, 8 pieds de longueur, et 2 pieds de largeur. Sur cette table on a posé deux pieces de bois de chêne AB, A′B′ de 12 pieds de longueur, et de 8 pouces de grosseur; ces deux pieces de bois sont posées suivant la longueur de la table, à 3 pouces de distance l'une de l'autre; à l'extrémité BB′ des pieces de bois, l'on a placé, dans le vuide qui les sépare, une poulie *h*, de bois de gaïac, d'un pied de diametre, tournant sur un axe de chêne vert, de 10 lignes de diametre; sous cette poulie, on a creusé un puits de quatre pieds de profondeur.

A l'autre extrémité AA′ des pieces de bois, on a placé, à l'angle droit, un petit treuil horizontal; on a fortement attaché sur les deux pieces de bois un madrier de chêne *a a*′ *b b*′, de 8 pieds de longueur, 16 pouces de largeur, et 3 pouces d'épaisseur; son plan supérieur *aa*′ *bb*′, posé de niveau, avoit été dressé à la varlope avec beaucoup de soin, et poli ensuite avec une peau de chien de mer.

L'on a fait successivement glisser sur ce madrier plusieurs traîneaux, dont voici la construction: ABCD (*fig.* 175, nos 1 et 2) est un madrier de 18 pouces de largeur et de différentes longueurs, suivant que l'exigent les expériences qu'on a à faire. Sous ce madrier, n° 1, on a cloué, des deux côtés, deux petits liteaux, AC *m m*′, BD *nn*′; en sorte que ce traîneau, posé sur le madrier dormant, est retenu des deux côtés par ces liteaux, avec un jeu de deux ou trois lignes, pour qu'il suive, sans être gêné, la direction du madrier.

Des deux crochets n° 2, fixés aux deux extrémités du traîneau, l'un sert à attacherla corde qui passe sur la poulie *h* (*fig.* 174), et porte le plateau P; à l'autre est attachée une corde qui enveloppe le treuil, et sert à rappeller le traîneau du côté AA′.

Digitized by Google

Lorsqu'on veut diminuer les surfaces de contact, on cloue sous le traîneau des regles de différentes largeurs, dont on arrondit les extrémités pour y placer les clous afin qu'ils ne portent pas contre le madrier dormant.

1091. La *fig.* 176 représente l'élévation latérale de tout l'appareil, dans laquelle on a substitué au plateau P de la *fig.* 174, une espece de romaine *ab* de 7 pieds de longueur, à l'extrémité de laquelle est fixé un axe de fer taillé en couteau, qui sert de point de rotation, et qui porte librement contre deux petites plaques de fer attachées sous les extrémités BB' des deux pieces de bois AB et A'B': en *c* est un anneau que l'on attache à la corde du traîneau qui passe sur la poulie *h*; au moyen d'un poids P, que l'on fait glisser peu à peu le long de la romaine *a b'*, l'on mesure la tension de la corde fixée au point *c*; et lorsque le levier commence à emporter le traîneau, cette tension est la mesure du frottement du traîneau. Il faut ajouter à la tension produite par le poids P, celle qui répond au poids du levier et à la distance de son centre de gravité au point de rotation.

1092. Le changement dont nous venons de parler est utile lorsqu'on veut avoir le frottement des surfaces posées l'une sur l'autre, depuis un temps donné souvent très court; sous les grandes pressions, ce frottement devient considérable; et, dans ce cas, on ne peut pas employer la manœuvre lente de charger et de décharger le plateau P (*fig.* 174) pour augmenter et diminuer les tractions.

Appareil pour les expériences sur le frottement des axes.

1093. L'établissement pour les expériences relatives au frottement des axes consiste en une poulie C, (*fig.* 181 n°s 1 et 2), d'un pied de diametre, bien centrée, et soutenue, au moyen d'un axe de 19 lignes de diametre, sur deux pieces de bois BB, B'B'; la poulie est de bois de gaïac, garnie à son centre d'une boîte de cuivre, dans laquelle l'axe a 1 $\frac{3}{4}$ lignes de jeu; cette poulie, du poids de 14 livres avec sa boîte, se trouve élevée de 10 pieds au dessus du sol du hangar où les expériences ont été exécutées; une corde qui passe dans la gorge de la poulie, porte, au moyen de deux crochets, des poids P et P', formés d'un assemblage de gueuses de 50 livres chacune, qui sont percées à leurs extrémités, comme au n° 3 de la même figure; l'on passe une corde dans les trous des gueuses, et l'on en attache ensemble une quantité suffisante pour former le poids que l'on veut mettre en expérience. On voit, dans la figure, six gueuses liées ensemble, de chaque côté de la poulie: le milieu

Digitized by Google

de l'axe AA', n° 2, qui porte la poulie, est tourné avec soin; mais ses deux extrémités sont équarries, entrent dans des mortoises, et se fixent solidement aux deux pieces de bois BB, BB'.

Pour que les expériences soient régulieres, il faut que l'axe soit posé horizontalement, et la poulie exactement centrée; autrement elle varie dans ses mouvements de rotation, et se jette à droite et à gauche, contre les pieces de bois.

1094. Lorsqu'on veut déterminer le frottement de l'axe, qui se trouve, dans cette expérience, joint aux forces nécessaires pour plier la corde, l'on ajoute alternativement, de chaque côté, un petit poids p (*). On donne ensuite un mouvement insensible, et on observe en demi secondes le temps que le poids $P + p$ emploie, en tombant de 6 pieds, pour parcourir les trois premiers et les trois derniers pieds de sa chûte.

Deux sortes d'appareils pour les expériences sur la roideur des cordes; l'un de M. Amontons, l'autre de M. Coulomb: ce dernier sert en même temps à déterminer le frottement du premier genre.

1095. M. Coulomb a employé deux sortes d'appareils pour faire des expériences sur la roideur des cordes; le premier est celui de M. Amontons. Voici en quoi il consiste.

A une poutre AA' (*fig.* 182, n°s 1 et 2) est suspendu, au moyen de deux crochets et d'une corde $d\,b\,a\,a'\,b'\,d'$, un plateau BB' chargé de gueuses de 50 livres; le cylindre $b\,b'$ est enveloppé par la corde comme on le voit n° 2, où l'on voit en même temps un petit bassin de balance Q, soutenu par une ficelle très flexible, qui enveloppe le cylindre; ce bassin est chargé de poids jusqu'à ce qu'il fasse descendre le rouleau.

1096. On voit que chaque corde soutient la moitié de la charge, et que les poids du petit bassin Q sont uniquement employés à plier la corde autour du cylindre qu'elle enveloppe; il est évident qu'on doit ajouter à la somme de ces poids la moitié du poids du cylindre $b\,b'$. Lorsque le poids de ce cylindre est considérable, on peut le soutenir au moyen d'un petit contre-poids φ et d'une ficelle qui passe sur une petite poulie n (n° 2) attachée à la poutre AA'. On a ensuite égard à ce petit contre-poids dans la réduction de la charge du petit bassin Q.

1097. La seconde méthode employée par M. Coulomb pour déterminer la roideur des cordes, et qui lui a servi en même temps pour déterminer le frottement des cylindres qui roulent sur des plans horizontaux, est plus directe que celle de M. Amontons: elle a d'ailleurs l'avantage de faire connoître les forces nécessaires pour plier une corde sur un rouleau d'un pied de

(*) Dans chaque expérience, il faut alternativement observer, avec une petite charge p, les chûtes de chaque côté de la poulie; on prend la moyenne entre ces deux observations.

Digitized by Google

diametre, et qu'on ne peut obtenir par la premiere méthode sans employer un contre-poids pour soutenir le poids du rouleau; ce qui, en multipliant les forces, jette nécessairement de l'incertitude dans le résultat des expériences.

1098. L'établissement consiste en deux tréteaux de 6 pieds de hauteur (*fig.* 183, n°s 1 et 2), solidement assis, et sur lesquels on a posé deux pieces de bois équarries; sur ces deux pieces de bois, on a fixé deux regles de chêne DD, D'D', dressées à la varlope, et polies avec une peau de chien de mer; on a fait tourner avec soin deux cylindres de bois de gaïac, l'un de 6 pouces de diametre et l'autre de deux pouces; on a fait également exécuter au tour plusieurs cylindres de bois d'orme depuis 2 jusqu'à 12 pouces de diametre.

Ces préparatifs faits, pour trouver d'abord le frottement des rouleaux, on les a posés sur les deux regles de chêne, de maniere que leur axe se trouvoit, ainsi qu'on le voit (n° 2), perpendiculaire à l'alignement des regles, dont on avoit arrondi les arêtes; les deux regles étoient parfaitement de niveau; l'on suspendoit, des deux côtés du rouleau, des poids de 50 livres, avec des ficelles très flexibles de 2 lignes de tour. Au moyen de plusieurs ficelles distribuées sur les rouleaux et chargées chacune de 50 livres de chaque côté, l'on produisoit sur les regles une pression déterminée; on cherchoit ensuite, au moyen d'un petit contre-poids que l'on suspendoit alternativement des deux côtés du rouleau, quelle étoit la force nécessaire pour lui donner un mouvement continu insensible.

1099. Le frottement des rouleaux étant évalué par la méthode précédente, il a été aisé d'en tenir compte, lorsqu'on a substitué aux ficelles flexibles, des cordes dont il s'agissoit de déterminer la roideur; cette détermination a été faite de la même maniere que celle du frottement, en suspendant alternativement des poids de chaque côté du rouleau, jusqu'à ce qu'on lui donnât un mouvement continu insensible.

Remarques sur les résultats obtenus par l'un ou l'autre des appareils précédents.

1100. Il est important de remarquer que cette seconde maniere d'évaluer la roideur des cordes fournit des résultats directement applicables aux formules des art. (1001 et 1022), c'est à dire que les poids qui donnent au cylindre un petit mouvement, sont précisément égaux à l'augmentation de résistance, provenant de la roideur de la corde, et évaluée dans la direction de la portion de corde, à laquelle est appliquée la résistance qui représente l'effet utile de la machine. On voit, en effet, que le second appareil se rapporte à la *fig.* 166, et, par

conséquent, aux calculs de l'art. (1000), d'où on a déduit les formules dont on vient de parler.

Les résultats des expériences faites d'après la méthode de M. Amontons, ne donnent que la moitié de la résistance de la corde, vu que dans ce cas le centre de mouvement est à l'extrémité du diametre du rouleau, au lieu que, dans l'appareil de M. Coulomb, le centre du mouvement est dans l'axe du rouleau. La puissance destinée à surmonter la roideur de la corde dans le premier appareil, agit donc avec un bras de levier double de celui à l'extrémité duquel elle est appliquée dans le second appareil, et, par conséquent, ne doit avoir, dans le premier cas, que la moitié de la valeur qu'elle a dans le second.

Expériences sur les surfaces glissants l'une sur l'autre après un certain temps de repos.

1101. Nous allons donner successivement les résultats des expériences faites avec les appareils qu'on vient de décrire, et nous commencerons par celles relatives au frottement des surfaces qui glissent l'une sur l'autre après un certain temps de repos.

M. Coulomb a d'abord fait glisser du chêne sur du chêne, sans enduit et suivant le fil du bois, les surfaces de contact ayant 2 pieds 3 pouces dans le sens de la traction et 1 pied quatre pouces dans l'autre sens, ce qui produit une superficie de trois pieds quarrés.

1102. Les essais faits sur l'influence qu'avoit la durée du contact sur le frottement, ont prouvé que la difficulté de faire glisser les surfaces l'une sur l'autre, augmentoit avec la durée du contact, mais seulement pendant un temps assez court qu'il a trouvé d'une ou deux minutes, après lequel le frottement avoit acquis toute l'augmentation dont il paroît susceptible.

1103. La table suivante présente les résultats des trois expériences rapportées par M. Coulomb, donnant les valeurs du frottement après qu'il a eu acquis son plus grand accroissement relatif à la durée du contact.

Digitized by Google

Frottement du chêne contre le chêne, sans enduit intermédiaire, après un certain temps de repos, la surface de contact étant de trois pieds quarrés.

N^os des expériences.	Pressions exprimées en livres.	Frottement produit par les pressions ci à côté.	Rapport du frottement à la pression.
1re	74	30	0, 40541
2^e	874	406	0, 46454
3^e	2474	1116	0, 45109

Résultat moyen de ces expériences.

1104. Le nombre moyen entre les trois nombres de la derniere colonne à droite, est 0, 44; ce sera le coefficient du frottement, dans les cas où on pourra appliquer les résultats des expériences qu'on vient de rapporter. Ainsi on aura $f=0,44$, ce qui donne à f une valeur qui est entre $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{2}$.

Cas où les surfaces de contact sont réduites aux moindres dimensions possibles.

1105. Les surfaces qui frottoient l'une contre l'autre, étoient, comme nous l'avons dit, de trois pieds quarrés; M. Coulomb a voulu connoître quelle variation subiroit le rapport du frottement à la pression, en diminuant, autant qu'il est possible, l'étendue des surfaces en contact. Pour cela il a fait clouer, sous un traîneau de 15 pouces de longueur (*fig.* 178), deux petits prismes triangulaires de bois de chêne de 15 pouces de longueur, et dont l'angle qui portoit sur le madrier dormant étoit arrondi.

1106. Le frottement avec ce second appareil a acquis sa plus grande valeur en un quart de seconde, et a donné les résultats contenus dans la table suivante.

Frottement du chêne contre le chêne, sans enduit intermédiaire, après un certain temps de repos, la surface de contact étant autant diminuée qu'il est possible.

N^os des expériences.	Pressions exprimées en livres.	Frottement produit par les pressions ci à côté.	Rapport du frottement à la pression.
1re	250	106	0, 424
2^e	450	186	0, 41333
3^e	856	356	0, 41589

Résultat moyen des expériences faites dans ce dernier cas.

1107. Le rapport moyen du frottement à la pression, résultant des expériences précédentes, est 0, 42, à peu de chose près, et ne differe que de $\frac{1}{25}$, du rapport moyen donné par les trois expériences de l'art. (1103). On en peut conclure, dit M. Coulomb,

Digitized by Google

Coulomb, que lorsque les surfaces de bois de chêne glissent l'une sur l'autre, sans aucun enduit; le rapport du frottement à la pression est toujours une quantité constante, et que la grandeur des surfaces n'y influe que d'une maniere insensible.

Irrégularités introduite par la cohésion dans les expériences, lorsque les pressions sont petites.

1108. « Il y a cependant une remarque à faire, continue le « même auteur; c'est que lorsque les surfaces en contact ont « beaucoup d'étendue et qu'elles n'éprouvent que de petites « pressions, le frottement varie d'une maniere très irréguliere, « suivant les positions où se trouve le traîneau: ainsi, dans la « premiere expérience rapportée art. (1103), lorsque la pres- « sion étoit seulement de 74 livres, et la surface en contact de « 3 pieds quarrés; quoique j'aie trouvé moyennement le frot- « tement de 30 livres, je l'ai aussi trouvé quelquefois, après un « temps très long, au-dessous de 30 livres, et, après un temps « très court, au-dessus de 30 livres, et une fois de 55 livres, « sans que je puisse attribuer ces différences à d'autres causes « qu'à la cohésion et qu'au plus ou moins d'homogénéité des « parties en contact: mais lorsque les pressions sont de plu- « sieurs quintaux, comme dans les cinq dernieres expériences, « ces irrégularités cessent d'avoir lieu, ou au moins, étant pro- « bablement indépendantes des pressions, elles cessent d'être « sensibles. C'est là la raison pour laquelle nous avons toujours « trouvé plus d'exactitude dans les essais des trois dernieres « expériences où la surface de contact est très petite, que dans « ceux des trois premieres où la surface de contact est de 3 « pieds; c'est ce qui jusqu'à présent a dû jeter de l'incertitude « sur les essais faits en petit. »

Frottement moyen de différentes especes de bois glissant à sec l'un sur l'autre dans le sens du fil de bois.

1109. Les rapports moyens du frottement à la pression, donnés par les expériences faites par M. Coulomb sur différentes especes de bois, sont en résultat,

Chêne contre chêne,	0,43
Chêne contre sapin,	0,65
Sapin contre sapin,	0,56
Orme contre orme,	0,47

Expériences faites sur le frottement lorsque le fil de bois se recroise.

1110. Dans toutes les expériences qui précedent, le frottement se faisoit suivant le fil du bois. M. Coulomb a essayé de déterminer le frottement en posant les regles attachées au traîneau par le travers du traîneau, en sorte que, dans le mouvement du traîneau, le fil de bois des regles se trouve former un angle droit avec le fil de bois du madrier dormant: il a résulté de ces expérience qu'à égalité de pression et de surface, le

Digitized by Google

frottement parvenoit à sa limite dans un temps plus long que lorsque les bois glissoient suivant leur fil, et que, parvenu à sa limite, il se trouvoit moindre que dans le premier cas, et cependant toujours proportionnel à la pression.

1111. La table suivante contient les résultats de deux expériences faites avec grand soin.

Frottement du chêne lorsque le fil de bois se recroise.

Nos des expériences.	Pressions exprimées en livres.	Frottement produit par les pressions ci à côté.	Rapport du frottement à la pression.
1re	50	13	0, 26
2e	1650	450	0, 27273

Le rapport du frottement à la pression est sensiblement constant dans ces expériences.

1112. On voit que, malgré la grande différence des pressions, le rapport du frottement à la pression, donné par les deux expériences précédentes, est sensiblement constant et égal à 0,26. Ainsi le frottement du chêne, lorsque le fil de bois se recroise, est au frottement suivant le fil du bois comme 0,26 est à 0,43.

1113. M. Coulomb, passant aux expériences sur le frottement entre les bois et les métaux après un certain temps de repos, observe d'abord que l'accroissement des frottements y marche très lentement, relativement au temps de repos; les variations sont quelquefois à peine sensibles après 4 ou 5 secondes; il est rare que le frottement ait acquis son *maximum* avant quatre ou cinq heures de repos; quelquefois même il n'y est pas parvenu après cinq ou six jours.

Expériences sur le frottement entre les bois et les métaux après un certain temps de repos.

1114. Voici les résultats de deux expériences faites sur l'espece de frottement dont on vient de parler. On a mis en contact du fer et du bois de chêne: la surface de contact étoit de 45 pouces; on voit (*fig.* 179), le profil du traîneau qui a été employé, et qui est garni, dans le sens de sa longueur, de deux lames de fer recourbées à leur extrémité.

Digitized by Google

Frottement du fer contre le chêne sans enduit intermédiaire.

N^os des expériences.	Pressions en livres.	Temps du repos.	Frottement dû aux pressions ci à côté.
1re	53	$\frac{1}{2}$″	5 lb
		30″	5,25
		1′	6,5
		1 heure	9
		4 jours	10
2e	1650	$\frac{1}{2}$″	125
		10″	130
		80″	145
		4 heures	200
		16 heures	280
		4 jours	340

Rapport moyen du frottement à la pression déduit de ces expériences.

1115. Le rapport moyen du frottement à la pression, déduit de ces expériences, est, après quatre jours de repos égal, à 0,2, à peu de chose près.

Frottement à sec du cuivre sur le chêne.

1116. Le cuivre glissant sans enduit sur le chêne, ajoute M. Coulomb, donne des résultats analogues à ceux du fer glissant sur le même bois. Il paroît même que les accroissements du frottement, relativement au temps de repos, marchent plus lentement pour le cuivre que pour le fer; parvenu à son *maximum*, le rapport du frottement à la pression est à-peu-près égal à 0,18.

1117. Pour faire les expériences relatives au frottement d'un métal sur un autre métal, M. Coulomb a fixé, sur le madrier dormant et sous le traîneau, des regles de métal bien polies, ainsi qu'on le voit dans le profil (*fig.* 180): il a trouvé que le repos, quelque long qu'il soit, n'augmente point le frottement qui a toujours été proportionnel à la pression. Cette pression n'a jamais pu excéder 450 livres, la surface de contact étant de 45 pouces, parceque lorsque la pression étoit plus forte, les regles se rayoient.

Expériences sur le frottement d'un métal contre un autre métal.

1118. Voici les résultats des expériences faites sur le frottement du fer contre le fer, et du fer contre le cuivre jaune, la surface de contact étant de 45 pouces.

Digitized by Google

Frottement du fer contre fer, et du fer contre cuivre jaune.

Métaux mis en expérience.	N^os des expériences.	Pressions exprimées en livres.	Frottement dû aux pressions ci à côté.	Rapport du frottement à la pression.
fer contre fer	1re	51	15 lb	0, 29412
	2e	450	124	0, 27555
fer contre cuivre jaune	1re	50	14	0, 28
	2e	450	112	0, 24889

Rapport moyen du frottement à la pression déduit de ces expériences.

1119. Le rapport moyen du frottement à la pression pour le fer contre fer est, d'après les expériences précédentes, égal à 0,28, et le rapport moyen du frottement à la pression pour le fer contre cuivre jaune est égal à 0,26, à peu de chose près.

Frottement du fer contre cuivre, en réduisant les surfaces de contact aux plus petites dimensions.

1120. M. Coulomb voulant connoître le frottement du fer et du cuivre jaune, en réduisant les surfaces de contact aux plus petites dimensions, a substitué aux deux regles placées sous le traîneau quatre clous de cuivre, qui, enfoncés dans le traîneau, portoient, au moyen de leur tête sphérique, sur les deux grandes regles de fer attachées au madrier dormant.

Le frottement a d'abord été trouvé le $\frac{1}{3}$ de la pression; mais lorsque les clous de cuivre ont eu parcouru 7 ou 8 fois, sous des pressions de 5 ou 6 quintaux, toute la longueur des regles de fer, le frottement sous tous les degrés de pression a été constamment la sixieme partie de la pression.

Expériences sur le frottement des surfaces garnies d'un enduit.

1121. Les expériences sur le frottement des surfaces garnies d'un enduit sont plus compliquées dans leurs résultats que les précédentes, à cause de l'influence que le temps du repos a sur la valeur du frottement, suivant la nature de l'enduit et l'étendue des surfaces en contact. Le frottement atteint plus lentement sa limite lorsque l'enduit est de suif que lorsqu'il est de vieux oing; et lorsque les surfaces de contact sont réduites à de très petites dimensions, cette limite a lieu au bout d'un petit nombre de secondes.

Observation sur l'enduit de vieux oing.

1122. M. Coulomb observe que le vieux oing très mou ralentit très peu l'accroissement du frottement, qui parvient à son *maximum* avec une surface de contact d'un pied quarré sous une pression de 1600 livres presque en aussi peu de temps que si les bois glissoient à sec l'un sur l'autre et est alors quelquefois plus considérable : il semble qu'outre l'engrenage des sur-

Digitized by Google

faces, qui se fait ici presque aussi librement, à cause du peu de consistance du vieux oing, que s'il n'y avoit point d'enduit, il y a encore une cohérence entre les surfaces, augmentée par l'intermede de l'enduit.

1123. Voici les résultats de quatre expériences faites sur le frottement du chêne contre chêne avec des enduits de suif renouvellés et non renouvellés.

Frottement du bois de chêne lorsque les surfaces sont enduites de nouveau suif, à chaque opération, la surface de contact étant de 180 *pouces.*

Nos des expériences.	Pressions en livres.	Temps du repos.	Frottement dû aux pressions ci à côté.
1re	1650	0	64 lb
		3″	160
		15″	209
		1′	280
		4′	318
		2 heures	452
		6 jours	622
2e	3250	0	120
		3″	320
		19″	355
		1′	413
		4′	593
		1 heure	880
		2 heures	920
		5 jours	1220
			1554

Digitized by Google

1124. *Frottement du bois de chêne lorsque l'enduit de suif est usé par des opérations antérieures, la surface de contact étant de 4 $\frac{1}{2}$ pieds quarrés.*

Nos des expériences.	Pressions en livres.	Temps du repos.	Frottement dû aux pressions ci à côté.
1re	2310	0	187 lb
		2′	392
		1 heure	451
		16 heures	514
2e	5810	0	502
		2′	790
		4′	866
		9′	925
		26′	1036
		1 heure	1186
		16 heures	1535

Longue durée du temps nécessaire pour que le frottement parvienne à sa limite lorsque les surfaces sont enduites de suif.

1125. On voit, par le double résultat qui termine la table de l'art. (1123), qu'au bout de cinq jours il devoit être encore incertain si le frottement avoit atteint sa limite. M. Coulomb a remarqué de plus que, dans les expériences où on met de grandes surfaces en contact avec de petites pressions, les résultats varient, et que la cohésion paroît augmenter beaucoup le frottement.

1126. Si on nomme F le frottement au bout d'un temps T de repos, A ce qui devient F, lorsque $T = 0$, et qu'on pose l'équation $F = A + m\,T^{\mu}$, m et μ étant deux constantes à déterminer par l'expérience; M. Coulomb, comparant cette équation avec les résultats de la seconde expérience de l'art. (1124), trouve qu'on a, à peu de chose près, $\mu = \frac{1}{6}$ et $m = \frac{364}{(4')^{\frac{1}{6}}}$.

Ces valeurs de m et μ étant substituées dans l'équation $F = A + m\,T^{\mu}$, cette équation sera propre à déterminer par approximation le frottement après un repos assez court. Pour la rendre propre à déterminer la valeur de F correspondante à une valeur indéfinie de T, il faudroit lui donner la forme $F = \frac{a + m\,T^{\mu}}{b + T^{\mu}}$. En effet, lorsque $T = 0$, dans cette équation, $F = \frac{a}{b}$, quantité qui doit être égale au frottement lorsque le temps de repos est nul ou que la vîtesse est insensible, lorsque T =

Digitized by Google

∞, $F = m$, quantité qui doit être égale à la limite du frottement supposée connue.

1127. M. Coulomb a attaché et fixé sous un traîneau de 15 pouces de longueur deux regles de cuivre de 15 pouces de longueur et de 18 lignes de largeur; il a de plus attaché deux grandes regles de fer sur le madrier dormant; la surface de contact étoit ainsi de 45 pouces quarrés; on a mis un enduit de suif d'une demi-ligne à-peu-près d'épaisseur, et on a eu les résultats suivants.

Expériences sur le frottement des lames de cuivre sur les lames de fer enduites de suif neuf.

Frottement des lames de ouivre sur les lames de fer enduites de suif neuf.

Nos des expériences.	Pressions en livres.	Temps du repos.	Frottement dû aux pressions ci à côté.	Frottement corrigé ou diminué de la cohésion évaluée à 1 livre.	Rapport du frottement non corrigé à la pression, le temps du repos étant nul.	Rapport du frottement non corrigé à la pression, le frottem. étant à sa limite.	Rapport du frottem. corrigé à la pression. le temps du repos étant nul.	Rapport du frottem. corrigé à la pression. le frottem. étant à sa limite.
1re	50	0	6	4,5	0,12		0,09	
		4 et 30′	7	5,5		0,14		0,11
2e	450	0	42	40,5	0,09		0,09	
		4′ et 2h	48	46,5		0,11		0,10
3e	1650	10″	150	148,5	0,09		0,09	
		3′	158	156,5				
		4h et 4j	168	166,5		0,10		0,11

On voit que les résultats de la premiere expérience, présentés dans les 6e et 7e colonnes, different sensiblement des résultats de chacune des deux autres expériences présentées dans les mêmes colonnes. M. Coulomb a pensé qu'on ne pouvoit attribuer qu'à la cohérence que contractent entre elles les surfaces en contact. D'après cela on trouve facilement qu'en retranchant 1,5 livres de chacun des nombres de la 4e colonne, pour former ceux de la 5e colonne, le rapport de ce frottement, ainsi corrigé à la pression, devient sensiblement constant: cette quantité 1,5 livres est donc la valeur de la cohérence, qui est la même dans chaque expérience puisque les surfaces de contact sont les mêmes.

1128. Lorsqu'on essuie avec beaucoup de soin les lames de fer et celles de cuivre, et que l'on y met un enduit abondant d'huile d'olives, le frottement paroît atteindre son *maximum*,

Cas où l'on substitue à l'enduit précédent un enduit d'huile d'olives.

Digitized by Google

après un instant de repos trop court pour être observé; il se trouve constamment égal à $\frac{1}{6}$ de la pression.

Cas où l'on emploie un enduit de vieux oing.

1129. Lorsqu'au lieu d'huile on se sert d'un enduit de vieux oing, le frottement arrive aussi très rapidement à son *maximum*; il est rarement moindre que le $\frac{1}{7}$ de la pression; il augmente en s'approchant de $\frac{1}{6}$ de la pression, à mesure que la consistance du vieux oing diminue.

Expériences sur le frottement lorsque les corps se meuvent avec vitesse quelconque.

1130. Tout ce qu'on a dit jusqu'à présent a pour objet de déterminer la valeur du frottement lorsque les surfaces ont été en contact pendant un certain temps et qu'il s'agit de tirer les corps de l'état d'équilibre ou de repos. M. Coulomb a voulu de plus déterminer le frottement lorsque les corps se meuvent avec une vîtesse quelconque.

On sait que le madrier dormant (*fig.* 174 et 176) a 8 pieds de longueur, et que, sous la poulie à laquelle étoit suspendu le plateau de balance destiné à faire mouvoir le traîneau, on avoit creusé un puits pour que ce plateau pût descendre de 7 à 8 pieds de hauteur. Au moyen de ces précautions on pouvoit faire faire au traîneau une course de 4 ou 6 pieds. On chargeoit successivement le plateau P de différents poids, et on ébranloit le traîneau à petit coups de marteau, ou en le pressant par derriere au moyen d'un levier qui portoit contre un loquet attaché à l'extrémité *a b* du madrier dormant. On avoit divisé de pouce en pouce avec beaucoup d'exactitude le côté du madrier, et l'extrémité du traîneau dans son mouvement tenoit lieu d'*index* et mesuroit les espaces parcourus; la durée de mouvement s'observoit au moyen d'un pendule qui battoit les demi secondes.

1131. Voici les résultats des premieres expériences, qui ont eu pour objet le frottement du chêne contre chêne, dans le sens du fil de bois et sans enduit; la course du traîneau étoit de quatre pieds.

Digitized by Google

Frottement du chêne contre chêne dans le sens du fil de bois et sans enduit.

N^os des expériences.	Surface de contact en pouces quarrés.	Pressions des surfaces ci à côté en livres.	Pressions ci à côté rapportées à un pied quarré.	Traction ou poids suspendu à la poulie.	Nombre de demi-secondes employées par le traîneau à parcourir les deux premiers pieds.	Nombre de demi-secondes employées par le traîneau à parcourir les deux derniers pieds.	Rapport du frottement à la pression.
1re	432	74 lb	25 lb	12 lb	Mouvement lent, mais incertain, s'accélérant et s'arrêtant quelquefois.		
				14	7	5	0,175
2^e	432	874	291	94	Le traîneau ébranlé prend un mouvement lent et incertain ; on a une fois 28	19	
				105	6	3	0,105
3^e	432	2474	825	250	Le mouvement commence en ébranlant le traîneau ; mais il est lent et incertain.		
				270	8	5	0,102
4^e	36	47	188	5	Mouvement lent, mais à-peu-près uniforme ; vîtesse observée pendant 2′ de 6 pouces en 25″.		
					Variétés dans le mouvement, sous toutes les tractions moindres que 9 livres.		
				9	3	1	0,106
5^e	36	447	1788	45	Si on imprime au traîneau une vîtesse d'un pied par seconde, il continue à se mouvoir, et même s'élève ; il s'arrête sous une vîtesse moindre.		
				50	Le traîneau commence à se mouvoir.		
				54	En ébranlant seulement on a 6	3	0,110
6^e	36	1647	6588	166	Le traîneau étant ébranlé on a 11	5	
				172	9	4	0,097
7^e	Réduites aux plus petites dimensions possibles.	47	....	4 ÷ 6	15	6	
					3	2	0,096
8^e		447	....	36	En imprimant un mouvement primitif de 5 ou 6 pouces par seconde, le traîneau continue à se mouvoir, et paroît même s'accélérer : il s'arrête avec une vîtesse moindre.		
				41	Au moyen d'un simple ébranlement on a 8	3	0,081
9^e		847	....	60	Le traîneau continue à se mouvoir, si on lui donne une vîtesse primitive de 7 ou 8 pouces par seconde ; il s'arrête avec une vîtesse moindre.		
				68	Au moyen d'un simple ébranlement on a 8	2	0,068

Digitized by Google

Formule pour déduire de ces expériences la valeur du frottement.

1132. Pour déduire des expériences précédentes la valeur du frottement, il faut observer que les temps énoncés dans la 6ᵉ colonne sont en général un peu plus que double des temps énoncés dans la 7 colonne; et cette propriété indique que le mouvement a été uniformément accéléré. En effet, nommons t un des temps de la 6ᵉ colonne, et t' un des temps de la 7ᵉ colonne; on a (18), dans l'hypothese du mouvement uniformément accéléré, 4 pieds : 2 pieds :: $(t+t')^2 : t^2$, ou $\sqrt{2} : 1 :: t+t' : t$, ou $2^{\frac{1}{2}} - 1 : 1 :: t' : t$, ou enfin $t : t' :: 1 : 0{,}41$; ainsi, dans l'hypothese du mouvement uniformément accéléré, t doit être un peu que double de t'.

Puisque le mouvement du traîneau a été uniformément accéléré, le frottement a été constant et indépendant de la vîtesse, et il n'a fait que détruire une partie constante de la force accélératrice que la pesanteur imprimoit à chaque instant au poids. Soit M le poids suspendu à la poulie, S le poids du traîneau, t le temps que ce traîneau a employé à parcourir les quatre pieds de sa course; le poids de la poulie étant de 14 livres, et désignant par f le rapport du frottement à la pression, on a, d'après la formule de l'art. (1069),

$$f = \frac{1}{8}\left\{M - \frac{2\times 4}{30\,t^2}(M+S+7)\right\}.$$

On a substitué, pour abréger le calcul, le nombre 30 au nombre 30,196. C'est au moyen de cette formule qu'on a calculé les rapports f du frottement à la pression énoncée dans la derniere colonne.

Observations sur les valeurs données par cette formule d'après les expériences.

1133. On voit, par l'examen de la table de l'art. (1131), que les plus fortes variations du frottement se trouvent dans les premieres et dans les dernieres expériences, c'est-à-dire dans celles où le rapport de la surface de contact à la pression a eu sa plus grande et sa moindre valeur; lorsque la pression n'est que de 74 livres pour trois pieds quarrés ou de 25 livres par pied quarré, le frottement augmente avec la vîtesse; le phénomene contraire a lieu dans les dernieres expériences. M. Coulomb donne les explications qu'il croit propres à rendre raison de ces variétés, et regarde néanmoins en général, le frottement comme un obstacle sensiblement constant et indépendant de la vîtesse. En effet, en calculant dans les expériences de l'art. (1131) le rapport du frottement à la pression résultant des cas où la vîtesse étoit très petite ou nulle (ce qui se fera en divisant les poids énoncés dans la 5ᵉ colonne, par les pres-

Digitized by Google

sions énoncées dans la 3e), on trouvera à-peu-près les mêmes résultats énoncés dans la 8e colonne, pour les cas où le traîneau avoit une vîtesse; ce qui prouve que la vîtesse n'influe point sur le frottement, qui est dans tous les cas une quantité constante.

Le frottement est sensiblement égal à 0,1 depuis 188 jusqu'à 1788 livres de pression par pied quarré.

1134. Les rapports du frottement à la pression étant comparés avec les pressions par pied quarré contenues dans la 4e colonne font voir que, depuis 188 jusqu'à 1788 livres de pression par pied quarré, le frottement ne s'éloigne pas beaucoup d'être le $\frac{1}{10}$ de la pression, et qu'on pourra prendre dans ce cas 0,1 comme le coëfficient moyen du frottement.

Expériences sur le frottement lorsque le fil de bois se recoupe à angle droit.

1135. M. Coulomb a attaché en travers et aux extrémités du traîneau les regles de chêne qui, dans les expériences précédentes, étoient fixées dans le sens de la longueur de ce traîneau: il a pu faire par ce moyen des expériences sur le frottement du chêne lorsque le fil de bois se recoupe à angles droits. En voici les résultats: la course du traîneau étoit de quatre pieds comme dans les précédentes expériences.

Frottement du chêne contre chêne glissant à sec et le fil de bois se recoupant à angle droit.

Nos des expériences.	Surface de contact en pouces quarrés.	Pression des surfaces ci à côté en livres.	Traction ou poids suspendus à la poulie.	Nombre de demi-secondes employées par le traîneau à parcourir les deux premiers pieds.	Nombre de demi-secondes employées par le traîneau à parcourir les deux derniers pieds.	Rapport du frottement à la pression.
1re	36	47lb	5lb	8	4	0,096
2e	36	147	15	9	5	0,095
3e	36	447	51	6	4	0,101
4e	36	847	97	7	3	0,102
5e	réduite aux plus petites dimensions possibles.	47	5	9	5	0,096
6e		447	48	21	10	
			58	5	2	0,105
7e		1647	160	20	14	
			172	8	5	0,098

Les expériences donnent sensiblement le même résultat que les précédentes.

1136. On voit que le mouvement du traîneau a été, dans ces expériences comme dans les précédentes, uniformément accéléré, puisque le temps employé par le traîneau à parcourir les deux premiers pieds est à-peu-près double de celui employé à parcourir les deux derniers pieds. De plus, le rapport du frottement à la pression, calculé d'après la formule

Digitized by Google

$$f = \frac{1}{8}\left\{ M - \frac{2 \times 4}{30^{c}} (M + S + 7 \right\}$$

donnée art. (1132), est encore, à peu de chose près, égal à 0, 1; ainsi le frottement du chêne contre chêne, le fil de bois se recoupant à angle droit, est sensiblement le même que le frottement dans le sens de la longueur de la fibre ligneuse.

Remarque générale sur la différence du frottement lorsque le bois est de droit fil ou lorsque le fil de bois se recroise.

1137. M. Coulomb fait cependant deux remarques qui distinguent bien le frottement des bois glissant dans le sens de leur fil d'avec le frottement qui a lieu lorsque le fil de bois se recoupe à angle droit. On a vu, dans le premier cas, que lorsque la pression n'étoit pas énorme relativement à la surface de contact, le rapport du frottement à la pression étoit sensiblement constant, et que, lorsque les surfaces de contact étoient réduites aux moindres dimensions possibles, le rapport du frottement aux pressions diminuoit lorsque les pressions et les vîtesses augmentoient : or ces deux effets n'ont pas lieu lorsque le fil de bois se recoupe à angle droit, quoique la surface de contact soit réduite aux moindres dimensions possibles : ce qui fait voir que, quelque différence qu'il y ait eue entre les pressions et l'étendue des surfaces pressées, le nombre qui mesure le rapport du frottement à la pression est toujours resté une quantité constante.

Expériences sur le frottement de différentes especes de bois.

1138. Des expériences semblables aux précédentes ont donné pour différentes especes de bois les résultats suivants.

Rapport du frottement à la pression.

Chêne contre sapin,	0,158
Sapin contre sapin,	0,167
Orme contre orme,	0,100

Remarque particuliere sur le frottement du bois d'orme.

1139. Ces rapports sont des quantités constantes et ne dépendent point de la vîtesse : l'orme fait néanmoins une exception lorsque les pressions sont petites; car alors le frottement augmente sensiblement avec la vîtesse.

Remarques générales sur le frottement des bois et des métaux dans le cas du mouvement, et expérience sur cette espece de frottement.

1140. La nature paroît, dit M. Coulomb, suivre une autre marche dans le frottement des bois et des métaux; cette espece de frottement augmente avec la vîtesse de la maniere la plus sensible.

M. Coulomb a fait placer, sous le traîneau de 15 pouces de longueur, deux regles de fer ou de cuivre, suivant qu'il a voulu essayer l'un ou l'autre de ces métaux, de 18 lignes de largeur et de 15 pouces de longueur : lorsqu'ensuite il a voulu faire des

Digitized by

expériences sur le frottement du fer et du chêne, en mettant le fil de bois en travers, il a substitué aux deux regles de métal dont on vient de parler deux regles de chêne taillées en coin et attachées aux extrémités du traîneau, le fil de bois se recoupant à angle droit. On a ensuite fixé sur le madrier dormant deux grandes regles de fer, dressées et polies avec le plus grand soin, sur lesquelles glissoit le traîneau, porté seulement par les angles arrondis des regles de chêne. On s'est apperçu tout de suite que, soit que le traîneau glissât naturellement, soit qu'on lui imprimât une grande vîtesse, après un ou deux pieds de marche, il prenoit une vîtesse uniforme; et l'on s'est contenté d'observer le mouvement lorsqu'il a été réduit à l'uniformité.

La table suivante contient les résultats des expériences dont on vient de parler.

Digitized by Google

Frottement du cuivre et du fer contre le bois de chêne glissant à sec avec différentes vitesses.

N^os des expériences, et direction du fil de bois.	Métaux mis en expérience avec le chêne.	Surfaces de contact en pouces quarrés.	Pression des surfaces ci à côté en livres.	Traction ou poids suspendu à la poulie.	Nombre de demi-secondes employées à parcourir uniformément un pied de longueur.	Rapport du frottement à la pression	
						avec une vitesse insensible.	avec une vitesse d'un pied ou environ par seconde.
			lb	4 ½ lb	264	0,0894	
1re droit fil.	fer.	45	53	6 ½	6		
				9	1 ½	.....	0,1698
				35	264	0,0773	
				44	24		
2e droit fil.	fer.	45	453	53	13		
				65	5		
				78	2	.....	0,1722
				67	lent et incertain.	0,0785	
				80	80		
3e droit fil.	fer.	45	853	105	20		
				130	5		
				155	2	.....	0,1817
				125	lent et incertain.	0,0786	
				135	2640		
				160	148		
4e droit fil.	fer.	45 réduite aux plus petites dimensions possibles.	1653	185	44		
				210	18		
				235	5		
				260	2	.....	0,1573
				115	952		
				135	440		
				160	260		
5e le fil de bois en travers.	fer.		1653	185	96		
				210	30		
				235	13		
				260	5		
				2 ½	576		
				3 ½	176		
6e droit fil.	cuivre.	45	50	4 ½	56		
				6 ½	5		
				9 ½	1 ½		
				23	2880		
				28	720		
				33	400		
7e droit fil.	cuivre.	45	450	43	80		
				53	16		
				65	3		
				78	1 ½		
				42	lent et incertain.		
				67	360		
8e droit fil.	cuivre.	45	858	80	128		
				105	24		
				130	6		
				155	1 ½		

Digitized by Google

1141. Les deux dernieres colonnes à droite ont été calculées d'après la considération que le mouvement étant parvenu à l'uniformité, la force accélératrice que la pesanteur tend à imprimer à la masse suspendue à la poulie doit être détruite à chaque instant par le frottement du traîneau, ce qui se déduit d'ailleurs du principe posé art. (493): ainsi le poids suspendu à la poulie représente l'effort du frottement, et ce poids, divisé par celui du traîneau, donne la relation du frottement à la pression. Observations sur ces expériences.

1142. On voit, par l'avant derniere colonne, que, lorsque le mouvement est insensible, le frottement du bois de chêne et des lames de fer est à-peu-près les 0,08 de la pression; lorsque la vîtesse est d'un pied par seconde, ce rapport, valeur moyenne, se trouve à-peu-près double, c'est-à-dire égal à 0,16: au reste il est toujours sensiblement constant sous un même degré de vîtesse.

1143. « Il sembleroit, dit M. Coulomb, que l'on pourroit conclure de la quatrieme expérience, comparée avec la cinquieme, que l'étendue des surfaces de contact ni la position du fil de bois n'ont aucune influence sur le frottement. Dans la quatrieme expérience une surface de 45 pouces quarrés est comprimée par un poids de 1653 livres; le frottement se fait suivant le fil de bois: dans la cinquieme expérience la charge est de 1653 livres; la surface de contact est nulle ou au moins est formée par la compression d'un angle arrondi; le fil de bois est placé à angles droits avec la direction de la marche du traîneau; et, malgré ces différences, le résultat des deux expériences se trouve à-peu-près le même. Il faut cependant prévenir que cette augmentation de frottement, qui, d'après les expériences qui précedent, suit progressivement l'augmentation de vîtesse, n'a lieu, pour les petites surfaces de contact comprimées par des poids considérables, que lorsque les bois sortent des mains de l'ouvrier, et, qu'après un frottement de plusieurs heures, la vîtesse cesse presque en entier d'influer sur le frottement. »

1144. M. Coulomb, pour compléter la théorie du frottement des métaux glissant sans enduits sur les bois, a voulu chercher suivant quelle loi les augmentations de traction font croître les vîtesses: il a choisi pour cet objet la quatrieme expérience de la table précédente, qui fait voir que les tractions croissant en progression arithmétique, les vîtesses croissent en progression géométrique. Du rapport entre l'augmentation de traction et l'augmentation de vîtesse.

Digitized by Google

Observations sur les enduits et sur les surfaces de contact auxquelles on les applique.

1145. Les seuls enduits qui puissent convenir pour diminuer le frottement des bois sont le suif et le vieux oing; l'huile ne peut être employée que dans les métaux: comme les enduits sont des corps mous, ils n'adoucissent le frottement des surfaces que parcequ'ils remplissent les cavités, et qu'interposés entre les surfaces, ils les soutiennent à une certaine distance l'une de l'autre : de là il arrive que, sous les grandes pressions, les enduits les plus mous sont toujours les plus mauvais; que, sous les grandes pressions, lorsque les surfaces de contact sont réduites à des angles arrondis, les enduits diminuent très peu le frottement du traîneau: l'on remarque encore que, lorsque le traîneau, ayant une grande surface de contact, a passé deux ou trois fois sur le même suif, le suif s'applique sur le madrier, pénetre dans ses pores et ne s'oppose plus qu'imparfaitement à l'engrenage des parties; en sorte que, dans différents essais répétés sans renouveler les enduits, on trouve une augmentation de frottement très considérable.

1146. Lorsque le madrier et le traîneau sortent des mains de l'ouvrier, quelque soin qu'on ait pris pour bien unir les surfaces, en les polissant avec la varlope et une peau de chien de mer, ou même en les faisant glisser plusieurs fois à sec l'une sur l'autre, l'on trouve qu'en enduisant les surfaces, elles donnent d'abord de grandes inégalités dans le frottement; mais lorsqu'en enduisant de suif ou de vieux oing on fait glisser le traîneau pendant plusieurs jours consécutifs sous de fortes charges, l'on trouve ensuite que le frottement est presque toujours proportionnel à la pression, et que l'augmentation des vîtesses ne l'augmente que d'une maniere insensible.

Expériences sur le frottement du bois contre bois avec enduit.

1147. La table suivante présente les résultats des expériences faites sur le frottement du chêne contre chêne avec un enduit.

Frottement

Digitized by Google

Frottement du chêne contre chêne, la surface de contact étant garnie d'un enduit.

N^os des expériences.	Especes des enduits.	Surfaces de contact en pouces quarrés.	Pressions des surfaces ci à côté.	Traction ou poids suspendu à la poulie.	Mouvement du traineau.	Rapport du frottement à la pression sans avoir égard à la cohérence des surfaces.	Rapport du frottement à la pression ayant égard à la cohérence des surfaces.
1re	Le traineau enduit de suif, renouvelé à chaque essai.	180	3250 lb	118 lb	Le traineau étant ébranlé, a commencé à se mouvoir d'un mouvement continu, mais lent et incertain.	0,0363	0,0348
				124...	A parcouru successivement 2 pieds en $\frac{11}{2}$", et les deux suivants en $\frac{7}{2}$".		
2^e	*Idem.*	180	1650	64...	Le traineau ébranlé marche d'un mouvement continu, mais lent et incertain.	0,0388	0,0358
				70...	Parcourt successivement 2 pieds en $\frac{9}{2}$", et les deux suivants en $\frac{10}{2}$".		
3^e	*Idem.*	180	850	36...	Le traineau marche d'un mouvement continu, mais lent et incertain.	0,0423	0,0365
4^e	*Idem.*	180	450	21...	Mouvement à-peu-près uniforme d'un pied en $\frac{20}{2}$".....	0,0467	0,0355
5^e	*Idem.*	180	250	13 $\frac{1}{2}$	Vitesse uniforme d'un pied en 60".....	0,0540	0,0340
				20...	S'accélere d'abord, puis prend une vitesse uniforme d'un pied en $\frac{4}{2}$".		
6^e	*Idem.*	180	50	6 $\frac{1}{2}$	Vitesse uniforme d'un pied en $\frac{12}{2}$".....	0,1300	0,0350
				13...	S'accélere rapidement, et, après une marche de 3 pieds, paroît parcourir les deux derniers pieds avec une vitesse uniforme d'un pied par seconde.		
7^e	Dans les 7e 8e et 9e expériences, le madrier dormant et le traineau enduit avec une couche abondante de vieux oing, renouvelée à chaque essai.	180	50	13...	Vitesse uniforme d'un pied en 5,40".		
*				16...	*Idem.* d'un pied en $\frac{8}{2}$"		
				22...	*Idem.* d'un pied en $\frac{5}{2}$"		
8^e		180	250	20...	Mouvement extraordinairement lent.		
				26...	Vitesse uniforme d'un pied en $\frac{6}{2}$".		
				32...	*Idem.* D'un pied en $\frac{3}{2}$".		
9^e		180	450	34...	Le traineau lancé prend une vitesse uniforme d'un pied en $\frac{2}{2}$".		
				40...	Vitesse d'un pied en $\frac{1}{2}$".		
10^e	Dans les 10e, 11e, 12e, 13e et 14e expériences le madrier essuyé restoit onctueux et luisant, ses pores étoient pénétrés de suif jusqu'à plus d'une ligne de profondeur.	Réduite aux plus petites dimensions possibles.	50	3...	Le traineau commence à marcher d'un mouvement continu.	0,060	
11^e			250	15...	Commence à marcher.	0,060	
12^e			450	28...	Commence à marcher.	0,062	
13^e			850	50...	Marche d'un mouvement continu.	0,0588	
14^e			1650	100...	Marche d'un mouvement continu, en donnant une vitesse primitive d'un pouce par seconde.	0,06	

Digitized by Google

Observations sur ces expériences.

1148. Le traîneau employé dans les 9 premieres expériences de la table précédente avoit déja servi depuis huit jours aux expériences du frottement, et l'on avoit fait, avec des enduits de suif que l'on renouveloit souvent, plus de deux cents expériences sous des pressions de plusieurs milliers : les cinquante premieres avoient donné beaucoup de variétés; mais les autres étoient moins incertaines, et le traîneau ainsi que le madrier dormant paroissoient avoir pris tout le poli dont le bois de chêne paroît être susceptible.

1149. Les rapports du frottement à la pression contenus dans la 7ᵉ colonne, augmentent assez lentement jusqu'à la 5ᵉ expérience; mais de la 5ᵉ à la 6ᵉ l'augmentation est très rapide, et il paroît y avoir là solution de continuité; cette espece de saut paroît dépendre de la cohérence des parties du suif et de l'étendue de la surface, comme on l'a déja observé en faisant glisser sans enduit de grandes surfaces.

Pour déterminer cette cohérence, qui, comme on sait, est indépendante de la pression, il faut observer qu'elle doit peu influer sur le rapport déduit de la premiere expérience, dans laquelle la pression est très grande relativement à la surface de contact. La quantité 0, 0363 est donc le rapport du frottement à la pression, dégagé de la cohérence. Nommons x la cohérence, la résistance due au frottement seul, sera, dans la 6ᵉ expérience, $6,5 - x$; et on aura $\frac{6,5-x}{50} = 0,0363$, d'où $x = 4,685$: il faut donc retrancher 4,7 de chacune des tractions contenues dans la 5ᵉ colonne, afin d'avoir la portion du poids suspendu à la poulie, qui seule contre-balance le frottement. Divisant les tractions ainsi diminuées par les pressions correspondantes, on aura les rapports contenus dans la 8ᵉ colonne, qui, comme on voit, sont sensiblement les mêmes.

1150. Les 7ᵉ, 8ᵉ et 9ᵉ expériences ont prouvé que le vieux oing adoucissoit le frottement moins que le suif; mais elles ont prouvé, d'une maniere encore plus sûre, que la résistanee produite par l'augmentation des vîtesses, étoit absolument indépendante des pressions, puisque, sous trois degrés de pression très différentes, lorsque les tractions étoient telles que le traîneau prenoit une vîtesse uniforme d'un pied en $\frac{8''}{2}$, une augmentation de traction constante et égale à 6 livres donnoit, quelle que fût la pression, la même vîtesse uniforme d'un pied en $\frac{3''}{2}$. Ainsi la résistance due aux augmentations des vîtesses

Digitized by Google

dépend uniquement de la nature des surfaces et de la cohérence des enduits, et elle est absolument indépendante de la pression; on peut, dans la pratique, la négliger lorsque la vîtesse ne passe pas 4 ou 5 pouces par seconde, et que chaque pied quarré de surface est chargé de 3 ou 4 milliers; elle peut à-peu-près être estimée de 6 à 7 livres par pied quarré pour les surfaces enduites de suif, mues avec des vîtesses d'un pied par seconde.

1151. Dans les 10e, 11e, 12e, 13e et 14e expériences, soit qu'on enduisît de suif le madrier dormant à chaque essai, soit qu'on l'essuyât et qu'il restât seulement luisant et onctueux, à cause du suif qui, dans toutes les opérations précédentes, avoit pénétré dans les pores du bois, les résultats se sont toujours trouvés les mêmes, en sorte que le plus ou moins de suif ne diminuoit point le frottement lorsque les surfaces de contact sont nulles: la vîtesse paroît aussi très peu influer dans ce genre de frottement, et le mouvement a été accéléré dans différents autres essais, qu'on n'a point rapportés. Cette accélération étoit toujours due à l'excédent des tractions qui la produisoient sur les tractions nécessaires pour produire un mouvement très lent. M. Coulomb remarque que, dans ces expériences, le traîneau ne part pas sous un simple ébranlement, lorsque les pressions sont très considérables, mais il faut lui imprimer une vîtesse primitive d'un ou deux pouces par seconde; et pour lors il continue à se mouvoir d'un mouvement uniformément accéléré.

1152. On voit, par la table, que, dans les expériences dont on vient de parler, le rapport du frottement à la pression est, sous tous les degrés de pression, égal à 0, 06: on n'a pas eu besoin, dans le calcul de ce rapport, d'avoir égard à la cohérence, puisque les surfaces de contact peuvent être censées nulles. Ce rapport a été encore trouvé le même en faisant glisser le traîneau de maniere que le fil de bois se recoupât à angle droit.

1153. Le traîneau portant sur le madrier dormant par une surface de contact de quelques pieds d'étendue, pénétré de suif par des opérations antérieures, restant onctueux après avoir été essuyé, ou même conservant son ancien suif, mais écrasé et appliqué contre le bois par des opérations précédentes, se trouve dans les mêmes circonstances des 5 dernieres expériences de la table, et les surfaces de contact se joignent ici immédiatement. Aussi trouve-t-on le rapport du frottement à la pression, sous des pressions même de 2 mil-

Digitized by Google

liers par pied quarré plus grand que 0, 06. M. Coulomb, ayant soumis à l'expérience une surface de 2 pieds quarrés, a trouvé ce rapport égal une fois à 0, 77, et une autre fois à 0, 071. Ce traîneau, ajoute-t-il, n'avoit point encore pris tout-à-fait son poli dans deux jours d'opération, quoiqu'il eût parcouru plus de cinquante fois une course de 5 pieds sous des pressions de 3 et 4 milliers; la résistance due à la cohérence des surfaces étoit, dans cette expérience, de plus de 7 livres par pied quarré.

Expériences sur le frottement des bois contre les métaux, avec enduit.

1154. « Lorsque les métaux, dit M. Coulomb, glissent sur « des bois enduits de matieres graisseuses, le frottement en « paroît très adouci, et l'on produit des vîtesses insensibles « avec des degrés de traction moins considérables que dans « toutes les autres especes de frottement; mais pour peu que « l'on veuille augmenter les vîtesses, l'on retrouve, comme « lorsqu'on a fait glisser (1140) sans enduit les métaux sur le « bois, que le frottement augmente beaucoup avec la vîtesse; et « l'on a, pour le rapport de l'augmentation des vîtesses et du « degré de traction qui produit cette augmentation, à-peu-près « les mêmes loix que nous avons cherché à déterminer dans « le frottement des métaux glissant à sec sur les bois; mais si « on ne renouvelle pas les enduits à chaque expérience, ils se « coagulent, changent de nature, et le frottement augmente « successivement. »

1155. La table qui suit présente les résultats des expériences faites sur l'espece de frottement dont on vient de parler.

Digitized by Google

Digitized by Google

Frottement des métaux contre le chêne, la surface du contact étant garnie d'un enduit de suif.

Nos des expériences.	Métaux mis en expérience.	Especes des enduits et direct. du fil de bois.	Surface de contact en pouces quarrés.	Pression des surfaces de contact en livres.	Traction ou poids suspendu à la poulie.	MOUVEMENT du traîneau.	RAPPORT du frottement à la pression.
1ere	fer.	Bois de droit fil, enduit de suif renouvelé à chaque opération.	45	53 liv.	3,5 l.	un pouce parcouru en 4′ 15″	0,066
					5,5	*Idem* en 2 8	
					10	*Idem* en 0 6	
2e	*Idem.*	*Idem.*	45	450	12	1 pouce parcouru en 6 20	2,0267
					18	*Idem* en 1 25	
					23	*Idem* en 0 20	
					33	12 pouces en 0 30	
					63	*Idem* en 0 2,5	
3e	*Idem.*	*Idem.*	45	850	30	1 pouce en 1 40	0,0353
					55	*Idem* en 0 24	
					80	12 pouces en 0 16	
					105	*Idem* en 0 4	
					130	*Idem* en 0 1,5	
4e	*Idem.*	*Idem.*	45	1650	47	1 pouce en 4 0	2,0285
					50	*Idem* en 3 0	
					85	*Idem* en 1 0	
					110	12 pouces en 0 30	
					135	*Idem* en 0 12,5	
					160	*Idem* en 0 3	
					185	*Idem* en 0 1	
5e	cuivre.	*Idem.*	45	1650	35	1 pouce en 1 43	0,0212
					47	*Idem* en 1 0	
					60	12 pouces en 0 24	
					110	*Idem* en 0 1	
6e	*Idem.*	Bois de droit fil. On a enduit de suif au premier essai, et cet enduit n'a pas été renouvelé dans les essais qui ont succédé.	45	1650	La traction a été constamment de 100 livres.	Le traîneau pouvoit parcourir 5 pieds 7 pouces de long. On lui imprimoit une vitesse primitive, qu'il perdoit en partie dans le commencem. de sa course, et il parcouroit, d'un mouvement uniforme, les trois derniers pieds, dans les tems indiqués ci-après. ESSAIS. 1er 4″0 — 9e 10,5 2e 4,0 — 10e 11,5 3e 4 5 — 11e 15,0 4e 5,5 — 12e 34,0 5e 6,0 — 13e 550,6 6e 7,5 — 14e 900,0 7e 8,5 — 15e 1140,0 8e 10,0 Dans le 16e essai le traîneau s'est arrêté à tous les instants, quelque vîtesse primitive qu'on lui imprimât.	
7e	*Idem.*	Bois de droit fil. Les résultats ci à côté ont été à-peu-près les mêmes; soit que le traîneau fût enduit de suif, ou seulement onctueux.	La surface de contact réduite à de très petites dimensions.	47	2,5	1 pied parcour. uniformt en 7′ 0″	
					4,5	*Idem* en 1 20	
					7,5	*Idem* en 0 2	
8e	*Idem.*			747	21	1 pied parcour. uniformt en 36 4	
					28	*Idem* en 4 40	
					40	*Idem* en 0 9	
					53	*Idem* en 0 4	

Digitized by Google

Suite de la Table du frottement des métaux contre le chêne, la surface de contact étant garnie d'un enduit.

N^os des expériences	Métaux mis en expérience.	Espèces des enduits et direct. du fil de bois.	Surfaces de contact en pouces quarrés.	Pression des surfaces de contact en livres.	Traction, ou poids suspendu à la poulie.	MOUVEMENT du traineau.	RAPPORT du frottement à la pression.
9e	*Idem.*	*Idem.*	*Idem.*	847 li.	55 liv.	1 pied parcouru uniformément en 2′ 0″	
					80	*Idem* en 0 13	
					105	*Idem* en 0 2,5	
10e	*Id.*	*Idem.*	*Id.*	1647	85	1 pied parc. unif. en 27 20	
					110	*Idem* en 7 0	
					135	*Idem* en 2 0	
					160	*Idem* en 0 20	
					210	*Idem* en 0 5	
11e	fer.	Le fil de bois en travers le traineau glissant sur un enduit de suif abondant.	Réduit aux plus petites dimensions.	47	3	Mouvement uniforme avec le degré de vitesse imprimé sans paroître retarder sa marche.	
					3,5	Ebranlé, parcourt successivement 18 pouces, en 3″,5, et les 18 pouces suivants, en 2″.	
12e	*Id.*	*Idem,*	*Id.*	447	22	S'arrête, quelques degrés primitifs de vitesse qu'on lui imprime.	
					26	Quelque grande que soit la vitesse primitive, le traineau, au lieu de retarder sa marche pour prendre une vitesse uniforme, continue à s'accélérer.	
13e	*Id.*	Le fil de bois en trav. L'end. de suif renouv. une fois seulemt pour les 2 ess. a servi 5 ou 6 fois sous des tractions de 70 liv., après quoi il en a fallu 90 et l'enduit a servi encore 20 fois sous cette derniere traction.	*Id.*	1647	70	Le traineau a paru se mouvoir sans accélérer ni retarder, mais conservant la vitesse primitive qu'on lui imprimoit, quelle que fût cette vitesse.	
					90	Mouvement continu qui s'accélere également en imprimant une vitesse d'un pied ou d'un pouce par seconde : il se ralentit et s'arrête si la traction est plus petite que 90 livres.	
14e	*Id.*	Surface onctueuse mais non enduite.	*Id.*	74	3,5	Le traineau continue à se mouvoir sans ralentir sa marche, quelle que soit la vitesse primitive qu'on lui imprime : il s'arrête sous une traction moindre que 3 ½ livres.	0,0744
15e	*Id.*	*Idem.*	*Id.*	447	30	S'arrête sous des tractions moindres que 3 livres, et, sous des tractions plus grandes, s'accélere, quelle que soit la vitesse primitivement imprimée.	0,0671
16e	*Id.*	*Idem.*	*Id.*	1647	115	S'arrête sous des tractions moindres que 115 livres, mais continue à s'accélérer sous des tractions plus grandes, quelle que soit la vitesse primitivement imprimée.	0,07

Digitized by Google

Observations sur ces expériences.

1156. Les six premieres expériences de la table précédente ont été faites en attachant au traîneau de 15 pouces de longueur deux regles de fer ou de cuivre de 15 pouces de longueur et de 18 lignes de largeur. Les 5 premieres expériences offrent à-peu-près les mêmes loix que l'on avoit entrevues dans les essais du frottement des métaux glissant à sec sur le bois; mais M. Coulomb a éprouvé beaucoup d'irrégularités dans les résultats des expériences.

1157. La 6e expérience fait voir combien le frottement augmente successivement lorsqu'on cesse de renouveler le suif à chaque essai et que ses parties acquierent de la cohérence. Le traîneau, dans cet essai, étoit garni des deux regles de cuivre dont on a parlé dans l'article précédent. Cette expérience prouve que, lorsque les surfaces en contact doivent se mouvoir longtemps sur le même enduit de suif, cet enduit est plus nuisible qu'utile.

1158. Les 7e, 8e, 9e et 10e expériences ont été faites en fixant, suivant la longueur du madrier dormant, deux fils de cuivre de 6 lignes de diametre et de 6 pieds de longueur; ils étoient percés à leurs extrémités et attachés sur le madrier avec des clous à tête perdue.

On voit, par ces expériences, que l'enduit de suif influe très peu sur le frottement, et que l'étendue des surfaces n'influe pas beaucoup sur le rapport des frottements relativement aux vîtesses. M. Coulomb observe néanmoins que ces résultats n'ont lieu que pour les premieres opérations, et qu'en répétant les mêmes expériences plusieurs fois, le degré de vîtesse influe beaucoup moins sur le frottement.

1159. Les 11e, 12e et 13e expériences ont été faites en posant deux regles de chêne taillées en coin aux deux extrémités et en travers du traîneau de 15 pouces de longueur. On a ensuite cloué sur le madrier dormant deux grandes regles de fer de 4 pieds de longueur, et l'on a fait glisser le traîneau sur ces regles.

« Ce dernier genre de frottement présente, dit M. Coulomb, « des résultats différents de ceux qui ont précédé. Dans toutes « les expériences sur le frottement des bois et des métaux on « a trouvé que l'augmentation de vîtesse faisoit croître les frot- « tements de la maniere la plus sensible, et que cet effet ne « cessoit d'avoir lieu pour les bois glissant sur les métaux sui- « vant le fil de bois, qu'après un très grand nombre d'opéra- « tions. Mais il paroît, d'après les dernieres expériences qu'on « vient de rapporter, qu'ici les fibres du bois pliées par le travers « du

Digitized by Google

« du fil de bois sont collées par l'enduit et perdent en entier « leur élasticité dès la premiere opération. »

1160. M. Coulomb ayant laissé les regles de chêne taillées en coin, dont on a parlé dans l'art. précédent, et ayant essuyé avec beaucoup de soin les regles de fer fixées sur le madrier dormant, et dont les pores étoient penétrés de suif par les opérations antérieures, a fait les 14e, 15e et 16e expériences, dans lesquelles il a observé les mêmes loix mentionnées dans les citations de l'art. précédent. Il s'est ainsi assuré que de l'instant que les surfaces sont pénétrées par le suif, quoiqu'elles ne soient pas enduites, les vîtesses cessent d'influer sur les frottements.

1161. Les rapports contenus dans la 8e colonne font voir que, dans les 3 expériences dont on vient de parler, le rapport du frottement à la pression est une quantité à-peu-près constante; et M. Coulomb en conclut que ce genre de frottement, qui est analogue à celui de toutes les machines ou des axes de fer tournant dans des boîtes de bois, rentre dans la classe de tous les frottements déja examinés, où on a trouvé que le rapport du frottement à la pression étoit toujours constant, le plus ou moins de vîtesse n'y influant que d'une maniere insensible.

Expériences sur le frottement des métaux contre les métaux, soit à sec soit avec enduit.

1162. Les métaux étant d'un grand usage dans toutes les machines destinées à soulever de grands poids, et formant d'ailleurs une classe particuliere, M. Coulomb a rassemblé dans une même section de son mémoire toutes les expériences relatives à leur frottement. La table suivante présente les résultats de ces expériences.

Table du frottement des métaux les uns contre les autres.

Nos des expériences.	Métaux mis en expérience.	Especes des enduits.	Surfaces de contact en pouces quarrés.	Pressions des surfaces de contact en livres.	Traction ou poids suspendu à la poulie.	Mouvement du traineau.	Rapport du frottement à la pression.
1re	Fer contre fer.	Les surfaces glissent sans enduit.	45	53 lb	15 lb	Le mouvement continu n'a pas lieu sous une moindre traction; soit qu'on ébranle le traineau ou qu'on lui imprime une vitesse quelconque, le frottement paroît le même sous la traction ci à côté.	0,283
2e	*Idem.*	*Idem.*	45	453	125	Le traineau s'est arrêté sous toutes les tractions moindres que 125 livres; avec une traction plus forte il s'accélere uniformément avec une vitesse due à cette augmentation de traction.	0,276
3e	Fer contre cuivre.	*Idem.*	45	52	12 ½	Le traineau est mis en mouvement sans qu'il soit nécessaire de l'ébranler. Le degré de traction ne peut pas être moindre que celui ci à côté pour que le mouvement soit continu, quelque vitesse primitive qu'on donne au traineau.	0,24
4e	*Idem.*	*Idem.*	45	45	110	Le traineau mis en mouvement avec les mêmes circonstances que dans l'expérience précédente.	0,243
5e	Fer contre fer.	Suif renouvelé à chaque expérience.	45	53	8 ½	Le traineau prend un mouvement continu.	0,16
6e	*Idem.*	*Idem.*	45	453	40	Si on donne au traineau une vitesse de 7 à 8 pouces par seconde, il continue à se mouvoir et même paroît s'accélérer, il s'arrête sous un moindre degré de vitesse.	
					45	En ébranlant le traineau ou en lui imprimant une vitesse d'un pouce par seconde, il continue à se mouvoir.	0,099
7e	*Idem.*	*Idem.*	45	1653	140	Si on donne au traineau une vitesse de 7 à 8 pouces par seconde, il continue à se mouvoir sans ralentir sa marche.	
					160	Au moyen d'un simple ébranlement, le mouvement devient continu.	0,097
8e	Fer contre cuivre.	*Idem.*	45	52	6 ½	Le traineau se meut d'un mouvement incertain.	0,125
					7 ½	Le traineau ébranlé s'accélere toujours très rapidement.	
9e	*Idem.*	*Idem.*	45	452	30	Avec une vitesse de 7 à 8 pouces par seconde, le traineau continue à se mouvoir sans être retardé.	
					42	En imprimant au traineau une vitesse insensible, il continue à se mouvoir et s'accélere rapidement.	0,093
10e	*Idem.*	*Idem.*	45	1652	90	Le traineau continue à se mouvoir sans ralentir sa marche lorsqu'on lui imprime une vitesse primitive d'un pied en ½".	
					150	En ébranlant le traineau ou en lui imprimant une vitesse insensible, il continue à se mouvoir et accélere rapidement sa marche.	0,091

Digitized by Google

Suite de la table du frottement des métaux les uns contre les autres.

Nos des expériences.	Métaux mis en expérience.	Especes des enduits.	Surfaces de contact en pouces quarrés.	Pression des surfaces de contact en livres.	Traction ou poids suspendu à la poulie.	Mouvement du traîneau.	Rapport u frottement à la pression.
11°	*Idem.*	Enduit d'huile sur un enduit de suif.	45 lb	52 lb	6 ½ lb	Le traîneau seulement ébranlé s'accélere avec rapidité.	0,125
					10	Le traîneau s'est détaché après un repos de 3′ et d'une heure.	
12°	*Idem.*	*Idem.*	45	452	45	Si on imprime au traîneau une vîtesse de 8 ou 10 pouces par seconde, il continue à se mouvoir sans ralentir sa marche.	
					56	Le traîneau seulement ébranlé, continue à se mouvoir et s'accélere très rapidement.	0,124
13°	*Idem.*	*Idem.*	45	1652	190	Le traîneau, avec une vîtesse primitive de 8 ou 10 pouces par seconde, continue à se mouvoir sans ralentir sa marche.	
					210	Il ne faut qu'ébranler le traîneau pour qu'il puisse se mouvoir; il faut à-peu-près le même degré de traction ci à côté pour qu'il ne s'arrête pas avec une vîtesse primitive d'un pouce par seconde.	0,127
14°	*Idem.*	Surface pénétr. de suif restant onctueuse après son ancien enduit essuyé.	Réduite aux plus petites dimensions possibles.	47	5 ½	Le traîneau commence à se mouvoir en l'ébranlant; il s'arrête sous une moindre traction, quelque vîtesse primitive qu'on lui imprime.	0,117
15°	*Idem.*	*Idem.*	*Idem.*	447	51	Le traîneau ébranlé se meut d'un mouvement continu; il s'arrête sous une moindre traction, quelque vîtesse primitive qu'on lui imprime; l'on n'a jamais pu produire un mouvement uniforme, le traîneau s'accélérant dans sa marche ou s'arrêtant.	0,114
16°	*Idem.*	*Idem.*	*Idem.*	847	112	Le traîneau continue à se mouvoir en lui imprimant une vîtesse primitive d'un ou deux pouces par seconde; souvent il ne marche pas lorsqu'on ne fait que l'ébranler.	0,132
17°	*Idem.*	La surface de contact enduite d'une couche de suif.	*Idem.*	847	88	Le traîneau continue à se mouvoir en s'accélérant lorsqu'on lui imprime une vîtesse primitive de 5 ou 6 pouces par seconde.	
					95	Un simple ébranlement donne un mouvement continu au traîneau.	0,112
18°	*Idem.*	L'enduit précédent couvert d'une couche d'huile.	*Idem.*	847	106	Le traîneau s'arrête, quelque vîtesse primitive qu'on lui imprime.	
					112	Marche en s'accélérant, quelque petite que soit la vîtesse primitive imprimée.	0,132

Digitized by Google

Observations sur ces expériences.

1163. M. Coulomb a employé aux expériences contenues dans la table précédente deux regles de fer de 4 pieds de longueur et de 2 pouces de largeur, fixées par leurs extrémités au madrier dormant. Dans les 13 premieres expériences on faisoit glisser sur ces deux regles deux autres regles de fer ou de cuivre de 15 pouces de longueur et de 18 lignes de largeur, formant crochet à leurs extrémités, pour saisir le traîneau de 15 pouces sous lequel on les avoit placées; tous les angles de ces regles étoient arrondis. La *fig.* (180) représente le traîneau garni de ses regles de cuivre ou de fer et glissant sur le madrier dormant garni de longues regles de fer.

Pour diminuer autant qu'il étoit possible la surface de contact, dans les cinq dernieres expériences, on a fait arrondir avec beaucoup de soin la tête de quatre gros clous de cuivre, et on les a enfoncé aux quatre coins du traîneau, de maniere que ce traîneau ne portoit sur les deux grandes regles de fer attachées au madrier dormant que par la convexité comprimée de quatre demi-spheres de 6 lignes de diametre.

1164. On n'a pas pu, dans les quatre premieres expériences, pousser la pression au-delà de 450 livres, parcequ'alors les regles se rayoient et que le frottement devenoit incertain. Les deux expériences du fer contre fer donnant sensiblement le même rapport du frottement à la pression ainsi que celles du fer contre cuivre, quoique les pressions different beaucoup entre elles, on peut conclure, de cette propriété et des observations contenues dans la 7e colonne de la table, que, dans les métaux glissant sans enduits l'un sur l'autre, le frottement est indépendant des vîtesses et de l'étendue des surfaces. On voit de plus, en comparant les résultats des expériences avec ceux que présente la table de l'art. (118), que le frottement, ainsi qu'on l'a observé art. (1117), a la même intensité, soit qu'il faille détacher les surfaces après un temps quelconque de repos, soit qu'il faille entretenir une vîtesse uniforme. Cette propriété distingue parfaitement le frottement des métaux de celui des bois.

1165. M. Coulomb avertit que le rapport 0, 24, donné par les 3e et 4e expériences pour le fer et le cuivre sans enduit intermédiaire, ne peut être regardé comme exact que lorsque les surfaces sont neuves et très étendues: car en réduisant les surfaces de contact aux plus petites dimensions possibles, ce rapport varie en s'approchant de 0, 17, qu'il ne joint que lorsque, par un frottement continu de plus d'une heure, le cuivre

Digitized by Google

et le fer ont pris tout le poli dont ils peuvent être susceptibles. On verra le développement de cette vérité dans les expériences relatives au frottement des axes.

1166. M. Coulomb prévient qu'avant de commencer les expériences du frottement des surfaces garnies d'un enduit, il faut d'abord enduire de suif les regles attachées au traîneau et les faire glisser sur les regles de fer attachées au madrier dormant : cette opération se continue sous une grande pression pendant une demi-heure, en renouvellant de temps en temps l'enduit : le suif pénetre dans les pores du métal et les regles prennent un degré de poli qu'il seroit difficile de leur donner autrement.

1167. Le rapport de la pression au frottement, depuis la 5e jusqu'à la 13e expérience, dépend de la nature de l'enduit et du degré de vîtesse du traîneau. Lorsque les métaux sont enduits de suif, le frottement diminue beaucoup sous les grandes pressions, à mesure que la vîtesse augmente. Cet effet ne peut être attribué qu'à la dureté et à la consistance du suif, car en essuyant les regles et en y répandant un enduit d'huile d'olives, le frottement n'est que très peu diminué sous les grandes pressions en passant d'une vîtesse insensible à une vîtesse de 4 à 5 pouces par seconde.

1168. Dans les enduits de suif, le rapport du frottement à la pression est plus grand sous les pressions de 52 livre que sous les grandes pressions. On a déja vu, art. (1149), que cette variété provenoit de la cohérence du suif, qui oppose, sous tous les degrés de pression, une résistance constante, proportionnelle à l'étendue des surfaces. Cette résistance constante, qui n'est sensible que sous de petites pressions, peut s'évaluer ici pour une surface de contact de 45 pouces quarrés à 1 $\frac{1}{2}$ livre pour le fer contre cuivre, et à 3 livres pour le fer contre le fer.

1169. Mais la 11e expérience, comparée avec les deux suivantes, il paroît qu'avec les enduits d'huile d'olives, la cohérence peut être regardée comme nulle. M. Coulomb ayant réduit à 12 pouces la surface de contact de 45 pouces, a toujours trouvé les mêmes résultats sous des pressions de 2000 livres, en sorte que l'influence de la diminution de surface n'a pas été sensible.

1170. Avec des enduits de vieux oing le frottement n'a jamais été moindre que le $\frac{1}{9}$ de la pression. Sa résistance dépend absolument de la consistance de l'enduit, et le frottement augmente à proportion que l'enduit est plus mou.

Digitized by Google

1171. M. Coulomb observe que, lorsque les surfaces sont enduites de suif et qu'elles ont une grande étendue, le frottement dénature le suif et augmente sensiblement à mesure que l'on continue les essais sans renouveler l'enduit : il l'a cependant toujours trouvé moindre que le $\frac{1}{8}$ de la pression. Mais lorsque le suif est noyé d'huile, comme dans les trois dernieres expériences, cet effet est moins sensible. M. Coulomb a fait, pendant trois heures de suite, des expériences avec un axe de fer enduit primitivement de suif et d'huile, sans rafraîchir l'enduit et sans éprouver aucune irrégularité ni aucun accroissement dans le rapport de la pression au frottement.

1172. On voit, par les résultats des 14e, 15e et 16e expériences, que les vîtesses y ont très peu influé sur le frottement. Dans la 17e expérience le frottement a paru diminuer un peu en augmentant les vîtesses, mais beaucoup moins que lorsque les surfaces de contact étoient de plusieurs pouces quarrés; enfin, dans la 18e expérience, le frottement devient à-peu-près le même que lorsque les surfaces étoient seulement onctueuses et qu'il n'y avoit point de suif interposé.

Théorie du frottement donnée par M. Coulomb, et principaux résultats des expériences sur lesquelles cette théorie est fondée.

1173. M. Coulomb, dans le chapitre III de son mémoire, donne un essai sur la théorie du frottement. Nous regrettons que le besoin d'abréger ne nous permette pas d'en parler: mais nous ne pouvons nous dispenser de donner l'exposé des principaux résultats des expériences précédentes, sur lesquelles cette théorie est fondée. Voici cet exposé tel qu'il est dans le mémoire de M. Coulomb.

1°. *Le frottement des bois glissant à sec sur les bois oppose, après un temps suffisant de repos, une résistance proportionnelle aux pressions; cette résistance augmente sensiblement dans les premiers instants de repos : mais après quelques minutes elle parvient ordinairement à son maximum ou à sa limite.*

2°. *Lorsque les bois glissent à sec sur les bois avec une vîtesse quelconque, le frottement est encore proportionnel aux pressions; mais son intensité est beaucoup moindre que celle que l'on éprouve en détachant les surfaces après quelques minutes de repos: l'on trouve, par exemple, que la force nécessaire pour détacher et faire glisser deux surfaces de chêne, après quelques minutes de repos,* art. (1103), *est* art. (1134), *à celle nécessaire pour vaincre le frottement lorsque les surfaces ont déja un degré de vîtesse quelconque,* à-peu-près *comme* 9 : 2.

3°. *Le frottement des métaux glissant sur les métaux sans enduit, est également proportionnel aux pressions; mais son inten-*

sité est la même, soit qu'on veuille détacher les surfaces après un temps quelconque de repos, soit qu'on veuille entretenir une vîtesse uniforme quelconque.

4°. *Les surfaces hétérogenes, telles que les bois et les métaux glissant l'un sur l'autre sans enduit, donnent pour leur frottement des résultats très différents de ceux qui précedent; car l'intensité de leur frottement relativement au temps de repos croît lentement et ne parvient à sa limite qu'après quatre ou cinq jours et quelquefois davantage; au lieu que, dans les métaux, elle y parvient dans un instant, et dans les bois dans quelques minutes; cet accroissement est même si lent que la résistance du frottement, dans les vîtesses insensibles, est presque la même que celle que l'on surmonte en ébranlant ou détachant les surfaces après trois ou quatre secondes de repos. Ce n'est pas encore tout; dans les bois glissant sans enduit sur les bois, et dans les métaux glissant sur les métaux, la vîtesse n'influe que très peu sur les frottements; mais ici,* art. (1140), *le frottement croît très sensiblement à mesure que l'on augmente les vîtesses; en sorte que le frottement croît à-peu-près suivant une progression arithmétique, lorsque les vîtesses croissent suivant une progression géométrique.*

Nous allons passer aux expériences sur la roideur des cordes, et nous commencerons par celles qui ont été faites avec l'appareil de M. Amontons.

Expérience sur la roideur des cordes, avec l'appareil de M. Amontons.

1174. M. Coulomb a fait fabriquer, dans la corderie d'un des principaux ports de France, avec du chanvre de premier brin, trois cordes à trois torons; les fils de carret qui forment les torons se trouvoient réduits à l'ordinaire, par les différentes torsions données dans l'attelier, aux deux tiers à-peu-près de leur longueur primitive : ces trois cordes sont les mêmes qui ont servi ensuite pour déterminer, au moyen d'une poulie, le frottement des axes.

1175. Pour mettre ces cordes à-peu-près dans le même état que celles dont on se sert dans la manœuvre des machines, M. Coulomb, avant de les mettre en expérience, les fit travailler pendant une heure sur une poulie, afin de leur donner une flexibilité à-peu-près uniforme dans toute leur longueur.

1176. La table suivante présente les résultats des expériences faites sur les trois cordes dont on vient de parler. La premiere colonne désigne le poids du plateau BB, *fig.* (182), et de sa charge; les autres colonnes marquent, en livres et dixiemes de livres, le double de la somme du poids du bassin

Digitized by Google

et de la moitié du poids du rouleau $b\,b'$, dans l'instant où ce rouleau commence à descendre. On a vu, art. (1100), pourquoi il falloit doubler cette somme. En tête de chaque colonne on trouve le nombre de fils de carret qui composent la corde, sa circonférence, son poids par pied de longueur et le diametre du rouleau autour duquel elle a été pliée.

Table pour déterminer la roideur des cordes à trois torons, non goudronnées.

Poids qui tend les cordes en livres.	Premiere table.			Deuxieme table.			Troisieme table.		
	Corde N° 1, de 6 fils de carret, chaque toron composé de 2 fils. Circonférence 12 $\frac{1}{2}$ lignes. Poids, par pied de longueur, 4 $\frac{1}{2}$ gros.			Corde N° 2, de 15 fils de carret, chaque toron composé de 5 fils. Circonférence 20 lignes. Poids, par pied de longueur, 12 $\frac{1}{2}$ gros.			Corde N° 3, de 30 fils de carret, chaque toron composé de 10 fils. Circonférence 28 lignes. Poids, par pied de longueur, 24 $\frac{1}{2}$ gros.		
	Diametre des rouleaux.			Diametre des rouleaux.			Diametre des rouleaux.		
	1 pouce.	2 pouces.	4 pouces.	1 pouce.	2 pouces.	4 pouces.	2 pouces.	4 pouces.	6 pouces.
lb	lb	lb	lb	lb	lb	lb	lb	lb	lb
25	4,0	0	0	14,0	6,4	3,4	22,0	10,0	0
125	22,0	8,0	0	44,0	18,0	10,0	42,0	17,0	0
225	34,0	13,0	0	60,0	34,0	14,0	58,0	28,0	0
425	62,0	24,0	11,4	130,0	62,0	26,0	94,0	46,0	0
625	86,0	30,0	14,4	184,0	82,0	33,4	134,0	62,0	0
1025	0	0	22,0	0	0	54,0	0	100,0	68,0

Application de la théorie à ces expériences.

1177. Le premier usage à faire de cette table est de déterminer dans la formule $\frac{K}{R}^{\mu}(a + bQ)$, donnée art. (1022), l'exposant μ. On a vu que K est le diametre de la corde, R le rayon du rouleau ou de la poulie, Q le poids qui tend la corde: μ, a et b, trois constantes à déterminer par expériences. Pour connoître μ, prenons trois résultats dans lesquels R et Q soient les mêmes, et où K seul soit variable : ces trois résultats devront être entre eux comme les puisssances K^{μ} des diametres donnés K, ce qui nous fera connoître μ ainsi qu'il suit.

Prenons, dans la premiere colonne à gauche, le poids de 625 livres; et cherchons dans les autres colonnes les poids représentant la résistance qu'opposent les cordes à s'enrouler autour d'un cylindre de quatre pouces de diametre. Ces poids sont:

Pour

Digitized by Google

Pour la corde n° 1, de 6 fils et de 12, 5 lignes de circonférence, 14,4 livres.

Pour la corde n° 2, de 15 fils et de 20 lignes de circonférence, 33,4

Pour la corde n° 3, de 30 fils et de 28 lignes de circonférence, 62,0

On a donc, en nommant n le rapport de la circonférence au rayon, les trois équations. $\frac{(12,5n)^{\mu}}{24\text{ lig.}}(a+bQ)=14,4$,

$\frac{(20,n)^{\mu}}{24\text{ lig.}}(a+bQ)=33,4$,

$\frac{(28,n)^{\mu}}{24\text{ lig.}}(a+bQ)=62$.

La 1ere équation, comparée à la 3e, donne $\frac{(12,5)^{\mu}}{14,4}=\frac{(28)^{\mu}}{62}$, et par conséquent $\mu \log. \frac{(28)}{12,5}=\log. \frac{62}{14,4}$; d'où . . . . . .

$$\mu=\frac{\log.\left(\frac{62}{14,4}\right)}{\log.\left(\frac{28}{12,5}\right)}=\frac{0,63403}{0,35025}=\ldots\ldots\ldots\ldots 1,8$$

La 1ere équation, comparée avec la 2e, donne $\mu=$ 1,7

et la 2e équation, comparée avec la 3e, donne $\mu=$ 1,8

La résistance d'une corde qu'on veut plier est à peu-près proportionnelle au quarré de son diametre.

1178. On voit, par ces résultats, que la résistance d'une corde qu'on veut plier autour d'un rouleau est, à peu de chose près, proportionnelle au quarré de son diametre, puisque cette résistance a pour valeur $\frac{K}{R}^{1,7}(a+bQ)$. M. Coulomb observe que l'exposant μ n'est pas le même dans toutes les especes de cordes; sa valeur dépend, pour les cordes d'une même fabrique, de l'usé et du plus ou moins de flexibilité de la corde; mais, quoique cette valeur diminue à mesure que les cordes s'usent, il ne l'a jamais trouvée au dessous du nombre 1, 4, qu'on peut prendre pour l'exposant du diametre lorsque les cordes sont usées.

Suite de la comparaison des formules avec les résultats donnés par l'expérience.

1179. Il s'agit maintenant de déterminer dans la formule $\frac{K}{R}^{\mu}(a+bQ)$, les quantités a et b : pour cela nous prendrons, dans la table de l'art. (1176), des résultats dans lesquels K et R soient les mêmes, et où Q seul varie. On voit que chaque résultat devra être composé de la quantité constante $\frac{K}{R}^{\mu}a$, et de la quantité variable $\frac{K}{R}^{\mu}bQ$, qui seront déterminées comme il suit.

Prenons les résistances opposées par la corde n° 3 à son en-

Digitized by Google

roulement autour d'un cylindre de 2 pouces de diametre, et comparons-les avec les tensions de la premiere colonne à gauche. On voit que, depuis 25 liv. jusqu'à 625 liv. de tension, c'est-à-dire pour une augmentation de 600 livres, il y a eu une augmentation de résistance de 132 liv. — 22 liv. ou de 112 liv., ce qui fait 18,7 liv. par quintal: or une résistance de 18,7 liv. par quintal, donne 4,7 livres pour un quart de quintal ou pour 25 livres; ainsi les 22 liv. de résistance correspondantes à la tension de 25 livres sont composées de deux parties, l'une égale à 4,7 liv., formant la résistance proportionnelle à la tension ou la valeur de $\frac{K^{\mu}}{R} bQ$, et l'autre = à 17,3 liv., formant la résistance constante ou la valeur de $\frac{K^{\mu}}{R} a$.

Pour s'assurer que chaque résultat donné par l'expérience peut être ainsi décomposé, on peut consulter la table suivante.

Tensions en livres.	Valeurs de $\frac{K^{\mu}}{R} a$	Valeurs de $\frac{K^{\mu}}{R} bQ$.	Valeurs calculées de $\frac{K^{\mu}}{R}(a+bQ)$	Valeurs de $\frac{K^{\mu}}{R}(a+bQ)$ données par expérience.
25	17,3	4,7	22	22
125	17,3	23,4	40,7	42
225	17,3	42,1	59,4	58
425	17,3	79,5	96,8	94
625	17,3	116,9	134,2	134

On voit que les valeurs calculées different peu des valeurs observées, et qu'ainsi chaque résistance provenant de la roideur de la corde, est réellement équivalente, 1°. à un poids de 17,3 liv., pour la résistance qui résulte de la roideur intrinseque donnée à la corde par sa fabrication; 2°. de 18,7 liv. par quintal de tension.

On voit de plus, que la fonction $\frac{K^{\mu}}{R}(a + bQ)$ est vraiment celle qu'on doit choisir pour exprimer cette résistance d'une maniere qui puisse être d'accord avec l'expérience.

Observons maintenant que nous avons regardé 17,3 comme la valeur de la résistance constante $\frac{K^{\mu}}{R} a$, et que cependant comme, dans l'appareil de M. Amontons, le rouleau est soutenu par deux cordes, $\frac{K^{\mu}}{R} a$ n'est que la moitié de 17,3, c'est-à-dire qu'on a $\frac{K^{\mu}}{R} a = 8, 6$. Par la même raison, un quintal d'augmentation dans le pied du plateau n'augmente la tension de chaque corde que de 50; mais comme l'augmentation de

Digitized by Google

résistance proportionnelle à la tension est due aux deux cordes à la fois, chacune en exerce la moitié, c'est-à-dire une résistance équivalente à $\frac{18,7}{2}$ liv. pour 50 livres d'augmentation de tension : ainsi il n'y a rien à changer dans la table aux valeurs de $\frac{K^{\mu}}{R}bQ$, et en faisant $Q = 100$ livres, on aura $\frac{K^{\mu}}{R}b \times 100\text{ lb} \times 18,7$.

1180. Le diametre du rouleau est de 24 lignes $= 2R$; on a vu (1177) que $\mu = 1,7$, le diametre de la corde est à-peu-près de 9 lignes ; ainsi les équations $\frac{K^{\mu}}{R}a = 8,6$; $\frac{K^{\mu}}{R}b \times 100 \times 18,7$, peuvent se changer en $\frac{9'''}{12}a = 8,6$ et $\frac{9'''}{12}b \times 100 = 18,7$; d'où on tire $a = \frac{103,2}{9'''} = 2,45$, et $b = \frac{2,244}{9'''} = 0,053$; et la formule $\frac{K^{\mu}}{R}(a + bQ)$ devient $\frac{K'''}{R}(2,45 + 0,053Q)$.

1181. M. Coulomb a mis en expérience un câble formé de quatre torons de 28 fils de carret chacun, en tout 112 fils. Au centre du câble étoit une meche pour remplir le vide que la réunion des quatre torons laissoit entre eux. *Expériences sur la roideur d'un câble de 112 fils de carret.*

La table suivante présente les résultats de ces expériences ; on a doublé le poids employé à faire plier la corde, d'après ce qui est dit art. (1100) ; et il faut faire attention que la valeur de la résistance constante due à la fabrication de la corde est, dans les résultats suivants, double de ce qu'elle doit être, ainsi qu'on l'a déja observé art. (1179).

Expériences sur la roideur d'un câble blanc, formé de quatre torons de 28 fils de carret chacun avec une meche au centre.

Circonférence du câble.	Pesanteur du câble par pied de longueur.	Diametre du rouleau.	Tensions en livres.	Résistance provenant de la roideur du câble, ou valeur de $\frac{K^{\mu}}{R}(a + bQ)$.
57 lignes.	85 gros.	6 pouces.	1000	200 lb
			100	38

1182. En comparant ce câble avec la corde de 30 fils de carret, qu'on a vue, dans la table de l'art. (1176), opposer à sa flexion autour d'un rouleau de 6 pouces de diametre une résistance de 68 liv., lorsqu'il étoit tendu par un poids de 1025 liv., on a, par un calcul semblable à celui de l'art. (1177), $\frac{(57)^{\mu}}{200} = \frac{(28)^{\mu}}{68}$; d'où $\mu = \frac{\log.\left(\frac{200}{68}\right)}{\log.\left(\frac{57}{28}\right)} =$ 1,5, quantité plus petite que celle trouvée par les expériences de cet *Application des formules à ces expériences.*

Digitized by Google

article. Quoique le câble fût presque neuf, M. Coulomb observe qu'on ne doit pas être surpris de cette diminution dans la quantité μ, parcequ'il y avoit une meche de 10 à 12 lignes de tour au centre du câble; et que, dans la fabrique des câbles, il n'est pas possible que chaque fil de carret se tende aussi parfaitement que dans les cordes d'une grosseur moyenne.

Expériences sur la roideur des cordes mouillées.

1183. Comme, dans l'usage des machines, il arrive souvent que les cordes sont mouillées par la pluie, M. Coulomb a cherché quels étoient les poids nécessaires pour plier les trois cordes, n°s 1, 2 et 3 de l'art. (1176) sur différents rouleaux après qu'elles ont eu trempé dans l'eau pendant 5 ou 6 heures; il a trouvé les résultats contenus dans la table qui suit.

Table pour évaluer la roideur des cordes blanches à trois torons, imbibées d'eau.

Poids qui tend les cordes, en livres.	Première table. Corde, N° 1, de 6 fils de carret, chaque toron composé de 2 fils.		Deuxieme table. Corde, N° 2, de 15 fils de carret, chaque toron composé de 5 fils.		Troisieme table. Corde, N° 3, de 30 fils de carret, chaque toron composé de 10 fils.	
	Diametre des rouleaux.		Diametre des rouleaux.		Diametre des rouleaux.	
	2 pouces.	4 pouces.	2 pouces.	4 pouces.	2 pouces.	4 pouces.
25 lb	0 lb	1,0 lb	10,0 lb	4,0 lb	50,0 lb	18,0 lb
125	9,0	4,4	22,0	9,0	70,0	26
225	14,0	6,0	34,0	0	90,0	34
425	22,0	10,2	56,0	20,0	128,0	52
625	28,0	13,0	76,0	30,0	164,0	70
1025	0	0	0	46,0	0	102,8

Observations sur ces expériences.

1184. On voit, en comparant les résultats ci-dessus avec ceux de la table de l'art. (1176), que la flexibilité des cordes N°s 1 et 2 est augmentée, et que l'effet contraire a eu lieu pour la corde N° 3; cette augmentation de roideur ne porte cependant que sur la partie constante représentée dans la formule par $\frac{K\mu}{R}a$; en effet on trouve que la corde N° 3, mouillée et se pliant autour d'un rouleau de 2 pouces de diametre, a, pour 6 quintaux d'augmentation de tension, augmenté sa roideur de $164^{lb} - 50^{lb}$, ou de 114 livres, ce qui fait 19 liv. par quintal; et nous avons trouvé, art. (1179), 18,7 liv.; mais la partie constante est égale à $50^{lb} - \frac{12}{4} = 45$, 3 liv., au lieu de 17, 3 livres trouvées en premier lieu.

Digitized by Google

1185. M. Coulomb a soumis à l'expérience des cordes goudronnées, à trois torons et du même nombre de fils de carret que les cordes non goudronnées; celle de 6 fils de carret avoit 13 lignes de tour et pesoit 6 gros par pied de longueur; celle de 15 fils avoit 24 lignes et pesoit 14 gros par pied de longueur; enfin celle de 30 fils avoit 33 lignes et pesoit 28 $\frac{1}{2}$ gros par pied de longueur: il a trouvé que les poids nécessaires pour plier ces cordes étoient à peine d'un sixieme plus considérables que ceux qu'il avoit fallu employer pour vaincre la roideur des cordes non goudronnées, et même l'augmentation n'a été bien sensible que pour la corde de 30 fils; elle l'a été très peu pour celles de 6 et de 15 fils. L'augmentation de roideur que le goudron donne aux cordes dépend, comme le dit M. Coulomb, au moins en grande partie, de l'augmentation du terme constant ou du degré de tension, indépendant de la charge, que le goudron, en remplissant les interstices de la corde, fait contracter à tous les fils qui la composent.

Expériences sur la roideur des cordes goudronnées.

1186. Voici une récapitulation de poids nécessaires pour plier les cordes de la table de l'art. (1176), et les cordes goudronnés, dont il est question dans l'art. précédent, autour d'un rouleau de 4 pouces de diametre. Les calculs ont été faits comme à l'art. (1179).

Table pour évaluer la roideur de différentes especes de cordes.

Poids nécessaires pour plier différentes cordes autour d'un rouleau de 4 pouces de diametre.

Indication des cordes.	Poids constant ou valeur de $\frac{K\mu}{R}a$.	Poids proportionnel à la charge par quintal, ou valeur de $\frac{K\mu}{R}b \times 100$.
Corde blanche de 30 fils de carret, n° 3	4,2 lb	9,0 lb
Corde blanche de 15 fils de carret, n° 2.	1,2	5,1
Corde blanche de 6 fils de carret, n° 1	0,2	2,2
Corde goudronnée de 30 fils de carret	6,6	11,6
Corde goudronnée de 15 fils de carret	2,0	5,6
Corde goudronnée de 6 fils de carret	0,4	2,4

Quant à la valeur de μ, on pourra, pour les cordes blanches, faire $\mu = 1{,}7$ lorsque les cordes sont neuves, et $\mu = 1{,}4$ lorsque

Digitized by Google

les cordes sont usées. Lorsqu'on fera usage de cordes goudronnées, on supposera la roideur de la corde, toutes choses égales d'ailleurs, proportionnelle au nombre de fils de carret qui entrent dans cette corde.

Diminution de la roideur des cordes dans certaines circonstances.

1187. M. Coulomb observe que si les cordes étant chargées, on releve le rouleau à force de bras et que l'on le laisse tomber tout de suite, la roideur de la corde sera souvent d'un tiers plus petite que dans les expériences précédentes. Ce résultat a lieu avec toutes les especes de cordes; il est seulement plus sensible avec les grosses cordes et avec les neuves qu'avec les petites, avec les petits rouleaux qu'avec les gros; mais si on laisse le rouleau remonté quelque temps en repos, sans l'obliger à redescendre, on trouvera que la roideur de la corde augmente sensiblement, et qu'elle ne parvient à sa limite telle qu'on l'a trouvée dans les expériences, qu'après un repos de 5 ou 6 minutes. Ainsi, dans un mouvement alternatif, où les forces seroient employées à faire monter et descendre un poids, comme par exemple, dans les sonnettes qui servent à élever le mouton pour battre les pilotis, la roideur de la corde seroit un peu moindre que dans les expériences précédentes. Il en seroit de même d'une corde qui passeroit sur deux poulies très proches l'une de l'autre; pour peu que le mouvement fût rapide, l'effort qu'il faudroit faire pour vaincre la roideur de la corde en la pliant sur la seconde poulie seroit moindre, quoique sous le même degré de tension, que la force employée à la plier sous la premiere.

Expériences faites, avec l'appareil de M. Coulomb, le sur frottement de la deuxieme espece.

1188. La deuxieme méthode, dont on a parlé art. (1098), pour déterminer la roideur des cordes et le frottement des cylindres qui roulent sur des plans horizontaux, est plus directe que celle de M. Amontons, et fournit plus de facilité pour faire des expériences sur de gros rouleaux. Voici les résultats des expériences de M. Coulomb sur le frottement de la seconde espece, produit par des rouleaux de bois de gaïac de 6 et de 2 pouces de diametre.

Digitized by Google

Frottement de la deuxieme espece avec des rouleaux de bois de Gaiac.

Charge des rouleaux, leur poids compris.	Poids qui produisent un mouvement continu très lent, le diametre des rouleaux étant de	
	6 pouces.	2 pouces.
100 lb	0,6 lb	1,6 lb
500	3,0	9,4
1000	6,0	18,0

Il résulte de cette table que les frottements des cylindres qui roulent sur des plans horizontaux est en raison directe des pressions et inverse du diametre des rouleaux. M. Coulomb a éprouvé que les enduits ne donnent ici aucune diminution sensible dans les frottements.

1189. Les rouleaux de bois d'orme ont donné un frottement de $\frac{1}{5}$ plus grand que les rouleaux de gaïac, ainsi qu'il suit.

Pression.	Frottement, le diametre des rouleaux étant de	
	12 pouces.	6 pouces.
1000 lb	5 lb	10 lb

Sous les petites pressions, le frottement paroît un peu plus grand que celui qui résulteroit de la loi des frottements proportionnels aux pressions; mais cette différence peut se négliger dans la pratique.

1190. Voici maintenant les résultats des expériences faites sur la roideur des cordes, N°s 1, 2 et 3 de la table de l'art. (1176), avec l'appareil de M. Coulomb et différents rouleaux depuis 12 jusqu'à 2 pouces de diametre. On a fait la déduction du frottement des rouleaux, et on a mis dans une colonne particuliere la roideur des cordes telle qu'on la déduiroit des expériences faites avec l'appareil de M. Amontons, d'après la table et les préceptes de l'art (1186).

Expériences faites avec le même appareil sur la roideur des cordes.

Digitized by Google

Expériences faites, avec l'appareil de M. Coulomb, sur la roideur des cordes blanches, N°s 1, 2 et 3, éprouvées antérieurement avec l'appareil de M. Amontons, art. (1176).

N^os des expériences.	CORDES mises en expérience.	ESPECE de bois, diametre et poids des rouleaux.	POIDS suspendus de chaque côté de la corde, en livres	POIDS additionnel qui surmonte le frottement du rouleau et la roideur de la corde.	CHARGE totale des regles qui supportent le rouleau.	FROTTEMENT du rouleau d'après les expériences des art. (1188 et 1189).	ROIDEUR DE LA CORDE, évaluée avec l'appareil de M. Coulomb.	ROIDEUR DE LA CORDE, telle qu'on l'auroit déduite de l'expérience faite avec l'appareil de M. Amontons, art. (1186).
1re	Corde N° 3, de 30 fils de carret.	Orme, diam. 12 pouces, poids 110 lb.	100 lb	5 lb	315 lb	1,5	3,5	4,4
			300	11	721	3,6	7,4	10,4
			500	20	1130	5,6	14,4	16,4
2^e	*Idem.*	Orme, diam. 6 pouces, poids 25 lb.	200	18	443			
3^e	*Idem.*	Gaïac diam. 6 pouces, poids 50 lb.	200	16	466	2,8	13,2	14,8
4^e	*Idem.*	Gaïac, diam. 2 pouces, poids 4,5 lb.	25	11	65 ÷			
			200	52	456 ÷			
5^e	Corde N° 2, de 15 fils de carret.	Gaïac, diametre 6 pouces, poids 50 lb.	25	1 ÷	101 ÷			
			100	6	256			
			200	11	461	2,8	8,2	7,6
			500	24	1074	6,4	17,6	17,8
6^e	Corde N° 1, de 6 fils de carret.	*Idem.*	100	3	253			
			200	6	456	2,7	3,3	3,1

Conformité de ces expériences avec celles faites au moyen de l'appareil de M. Coulomb.

On voit, par cette table, que la méthode de M. Amontons et celle de M. Coulomb donnent à-peu-près les mêmes résultats; il n'y a que la corde de 30 fils de carret, premiere et troisieme

sieme expérience qui donne des résultats dont les différences sont plus sensibles. M. Coulomb attribue ces différences à ce que la roideur de cette corde n'a été éprouvée par sa méthode qu'après avoir été usée précédemment par un grand nombre d'essais.

Expériences sur le frottement des axes.

1191. M. Coulomb, avant de faire des expériences sur le frottement des axes avec l'appareil décrit art. (1093), a d'abord fait tourner la poulie sur son axe pendant le temps et avec la vîtesse nécessaires pour faire acquérir aux surfaces en contact tout le poli dont elles pouvoient être susceptibles.

1192. On a seulement eu en vue, dans les expériences dont nous allons parler, de déterminer le frottement des axes dans les machines en mouvement, parcequ'on ne peut rien trouver de régulier lorsqu'on veut ébranler le système après un temps quelconque de repos. On a en conséquence fait parcourir un espace de 6 pieds aux poids suspendus à la poulie, et on a mesuré séparément en demi-secondes le temps employé à parcourir les trois premiers pieds et celui employé à parcourir les trois derniers.

La table suivante contient les résultats des expériences sur le frottement des axes de fer dans des boîtes de cuivre : il faut se rappeller (1093) que l'axe de fer immobile a 19 lignes de diametre et 1 $\frac{3}{4}$ ligne de jeu dans la boîte de cuivre, et que la poulie, de 144 lignes de diametre, pese 14 livres, y compris la boîte de cuivre.

Digitized by Google

Résultats des expériences faites sur le frottement des axes de fer dans des chappes de cuivre, avec enduit et sans enduit.

Nos des expériences.	ESPECES des enduits.	CORDES dont on s'est servi.	POIDS employé à plier les cord. sur la poulie.	POIDS suspendu de chaque côté de la poulie.	POIDS additionnel, qui a mis la poulie en mouvement.	MOUVEMENT des poids suspendus de chaque côté de la poulie.	PRESSION de l'axe.	FROTTEMENT réduit à la surface de l'axe de la poulie.	RAPPORT du frottem. à la pression.
			lb	lb	lb		lb	lb	
1ere	Frottement sans enduit.	Ficelle très flexible de 3 lignes de tour.	0, 0	103	6	Mouvemt lent et irrégulier.		42	0, 186
2e	*Idem.*	corde N° 1 de 6 fils de carret.	1, 5	200	10, 5	Mouvemt lent et irrégulier.	424	65	0, 153
					13, 5	Les trois prem. pieds de chûte parcourus en 6" et les trois autres en 3".			
3e	*Idem.*	*Idem.*	3, 0	400	21	Mouvemt lent et continu.	835	130	0, 156
					28	Les trois prem. pieds parcourus en 5",5 et les trois derniers en 2",5.			
					39	Les trois prem. pieds parcourus en 3", les trois derniers en 1",5.			
4e	Enduit de suif.	Petite ficelle très flexible de 2 lig. de tour.	0, 0	100	2, 5	Lent et continu.	216, 5	17, 5	0, 081
					6, 0	Les trois prem. pieds parcourus en 3",5, les trois derniers en 1",5.			
5e	*Idem.*	Corde N° 1 de 6 fils de carret.	1, 5	200	6, 5	Lent et continu.	420	36	0, 086
					10, 0	Les trois prem. pieds parcourus en 3",5, les trois derniers en 1",5.			
6e	*Idem.*	*Idem.*	3, 0	400	13	Lent et continu.	827	72	0, 087
					18	Les trois prem. pieds parcourus en 5",5, les trois derniers en 2".			
					24	Trois prem. pieds en 3" et les derniers pieds en 2".			
7e	Enduit de vieux oing.	Ficelle de 2 lignes de tour.	0, 0	50	2, 5	Lent et continu.	117	17, 5	0, 15
8e	*Idem.*	*Idem.*	0, 0	100	3, 7	Lent et continu.	218	26	0, 119
9e	*Idem.*	*Idem.*	0, 0	150	5, 7	*Idem.*	320	40	0, 125
10e	*Idem.*	Corde N° 1 de 6 fils de carret.	0, 7	100	4, 3	Lent, incertain et continu.	218	26	0, 119
					9	Trois prem. pieds en 3", les trois dern. pieds en 1",5.			
11e	*Idem.*	*Idem.*	1, 5	200	8, 5	Incertain et continu.	422	50	0, 118
					14	Trois prem. pieds en 4", trois dern. pieds parc. en 2".			
					20	6 pieds parc. en 3",5.			
12e	*Idem.*	*Idem.*	3, 0	400	17	Incertain.	831	101	0, 121
					22	Trois pieds en 6",5, les trois suivants en 2",5.			
					28	Trois pieds en 4", les trois suivants en 1",5.			
13e	Le vieux oing des expér. précéd. essuyé, le mét. dont les pores étoient pénétrés de suif restant onctueux.	. . . . .	. . .	. . .	. . .	. . . . .	Depuis 200 jusqu'à 1000 et 1200 livres.	. . .	0, 127
14e	La surface précédente onctueuse, enduite d'huile.	. . . . .	. . .	. . .	. . .	. . . . .	. . .	. . .	0, 127 0, 133
15e	Enduit qui n'a pas été renouvelé depuis longtems, quoiqu'on ait fait un usage continuel de la machine.	. . . . .	. . .	. . .	. . .	. . . . .	. . .	. . .	0, 133

Digitized by Google

1193. Les poids employés à plier la corde, et qui sont contenus dans la 4ᵉ colonne, ont été calculés d'après les tensions exprimées dans la 5ᵉ colonne, et au moyen des formules et des expériences de l'art. (1186). Ces poids étant retranchés de ceux de la 6ᵉ colonne, qui ont mis la poulie en mouvement, les différences sont égales aux poids employés à vaincre le frottement. Ces derniers poids agissent à une distance du centre de rotation égale au demi-diametre de la poulie, plus le demi-diametre de la corde : le frottement qui s'exerce sur l'axe, et qui, dans le cas d'un mouvement très lent, peut être censé faire équilibre à ces poids, est donc égal au produit de ces poids, par le rapport de la somme des rayons de la poulie et de la corde au rayon de l'axe, lequel rapport est, à très peu de chose près, égal à 7 lorsque le poids est suspendu à une ficelle, et à 7,2 lorsqu'il est suspendu à la corde nº 1. C'est d'après ces considérations qu'on a calculé la 9ᵉ colonne. Les poids compris dans la 8ᵉ sont composés, 1º du poids de la poulie, 2º du double des poids compris dans la 5ᵉ colonne, 3º des poids compris dans la 6ᵉ colonne; car il est évident que la somme de tous ces poids compose la pression de l'axe. D'après cela, pour trouver le rapport du frottement à la pression compris dans la 10ᵉ colonne, il ne s'agit que de diviser les nombres de la 9ᵉ colonne par ceux de la 8ᵉ. Observations sur ces expériences.

Pour connoître, dans les cas où il faut avoir égard à la vîtesse des poids, quel est l'effort qui a surmonté le frottement et la roideur de la corde, nous observerons d'abord que, dans ces cas, le mouvement a été à-peu-près accéléré (1132), puisque les trois premiers pieds ont été parcourus dans un temps à-peu-près double des trois derniers. Il s'agit donc de savoir quelle partie p' du poids additionnel, énoncé dans la 6ᵉ colonne, que nous nommerons p, a été employée à accélérer le mouvement des poids suspendus à la poulie; et l'autre partie de ce poids additionnel, c'est-à-dire $p - p'$, sera évidemment celle qui a surmonté le frottement et la roideur des cordes. D'après cela, t étant le temps de la descente totale, la force accélératrice qui a lieu est égale (1065) à $\frac{2 \times 6}{t^2}$, en nommant P la somme totale des poids suspendus à la poulie, y compris 7 livres pour l'inertie de la poulie qui pese 14 liv. (1068), et φ la force accélératrice de la pesanteur. La masse mise en mouvement sera (176) $\frac{P}{\varphi}$, et le produit de cette masse par la force accélératrice

Digitized by Google

sera la quantité $\frac{2 \times 6P}{9t^2}$, qui, étant retranchée du poids additionnel qui a mis la poulie en mouvement, donnera la quantité $p - p'$, ou la partie du poids p employée à vaincre la roideur de la corde et le frottement.

1194. En calculant les valeurs de $p - p'$, dans le cas du mouvement, on les trouve, pour chaque expérience, peu différentes des poids qui ont surmonté le frottement et la roideur des cordes dans le cas de l'équilibre ou d'un mouvement très lent; ce qui prouve que la vîtesse n'influe que d'une maniere insensible dans le frottement.

1195. Dans les 2e et 3e expériences, où la boîte de cuivre tournoit sur l'axe sans enduit, le frottement est un peu moindre que le $\frac{1}{6}$ de la pression; il est plus grand dans la premiere expérience, où la pression n'est que d'environ 200 livres. Les expériences de la table de l'art. (1118) sur le frottement du fer contre cuivre sans enduit donnent le rapport du frottement à la pression égal à $\frac{1}{4}$ à-peu-près; mais il faut voir à cet égard l'observation de l'art. (1197).

1196. Les 4e, 5e et 6e expériences, dans lesquelles l'axe a été enduit de suif, donnent à-peu-près le même rapport du frottement de la pression que les expériences 9e et 10e de la table de l'art. (1162): ainsi ces deux genres d'expériences se correspondent et se servent de preuve réciproque.

Remarques sur le frottement des axes comparé à celui des traîneaux, et fin des observations sur les expériences.

1197. « Remarquons cependant, ajoute M. Coulomb, que, « dans le mouvement des axes, nous avons toujours trouvé le « frottement moindre que dans celui du traîneau. Il semble en « effet que, dans le mouvement de rotation, les parties en con- « tact peuvent se désengrainer bien plus facilement que lorsque « les surfaces glissent l'une sur l'autre. Voici encore une remarque « qui distingue ces deux especes de frottement. Lorsqu'on fait « passer plusieurs fois les lames de cuivre sur les lames de fer sans « renouveler l'enduit, le suif s'use et le frottement s'augmente; « l'on éprouve cet effet beaucoup moins sensiblement dans le « frottement des axes. Quatre expériences ont été faites sans renou- « veler l'enduit, et répétées quatre ou cinq fois chacune; le frotte- « ment, à la derniere, n'avoit pas paru augmenter sensiblement. »

1198. On voit, par les 7e, 8e, 9e, 10e, 11e et 12e expériences, que le frottement des axes de fer dans des chappes de cuivre est beaucoup moins adouci par le vieux oing que par le suif; le rapport du frottement à la pression y est toujours une quantité à-peu-près constante, non seulement sous tous les degrés de pression, mais encore sous tous les degrés de vîtesse.

Digitized by Google

1199. Les trois dernieres expériences sont destinées à faire connoître le rapport du frottement à la pression des axes de fer dans des boîtes de cuivre enduites d'huile d'olives, ou seulement onctueuses et telles à-peu-près qu'elles se trouvent dans l'usage des machines qui n'ont pas été enduites depuis long-temps.

Expériences sur le frottement des axes faits avec différentes especes de bois.

1200. M. Coulomb, après des expériences dont on vient de rendre compte, a voulu connoître le frottement des différentes especes de bois qui entrent ordinairement dans les machines de rotation. Pour rendre les frottements plus sensibles il s'est servi de poulies de 12 pouces montées sur des axes de trois pouces; quelquefois on fixoit les axes à la poulie, d'autres fois les axes étoient immobiles; et dans tous les cas le frottement étoit le même. On a pris les précautions convenables pour polir les surfaces de contact et éviter par là l'incertitude et l'irrégularité des résultats qui sont présentés dans la table suivante.

Bois mis en expérience.	Rapport du frottement à la pression.
Axe de chêne verd, boîte de gaïac, enduit de suif,	0,038
En essuyant l'enduit, la surface restant onctueuse,	0,06
Axe de chêne verd et boîte de gaïac qui ont servi plusieurs mois sans qu'on en ait raffraîchi les enduits, ...	0,06 à 0,08
Axe de chêne verd et boîte d'orme, enduit de suif.	0,03
En essuyant les boîtes et l'axe, les surfaces restant onctueuses, ...	0,05
Axe de buis, boîte de gaïac, enduit de suif, . .	0,043
En essuyant l'enduit, les surfaces restant onctueuses, ...	0,07
Axe de buis, boîte d'orme, ...	0,035
L'enduit étant essuyé, ...	0,05

Peu d'influence de la vitesse des axes.

1201. L'axe étant de fer et la boîte de bois de gaïac, si on essuie l'enduit et qu'on fasse tourner la poulie pendant quelque temps, le frottement deviendra le $\frac{1}{3}$ de la pression.

Irrégularité du frottement des axes dans les premiers instants, qui est surmonté; explication de cette irrégularité.

1202. La vîtesse ne paroît pas influer sur le frottement d'une maniere sensible dans les différentes circonstances dont on vient de parler; cette propriété a principalement lieu pour les axes de bois tournant dans des boîtes de bois lorsqu'on a essuyé l'enduit et que les surfaces restent seulement onctueuses.

1203. Le premier effort employé pour vaincre le frottement

Digitized by Google

d'un axe dans sa boîte donne toujours des résultats très irréguliers, soit que les surfaces soient enduites ou non enduites. On en trouve la raison dans la démonstration des formules des art. (1024 et 1025), où l'on voit que, soit que l'axe ou la boîte se meuvent, il faut que l'un ou l'autre se mettent dans une position telle que la direction de la tangente, menée au point de contact, et la direction de la résultante du moteur et de la résistance fassent entre elles un angle dont la tangente soit égale au rapport de la pression au frottement. Or comme il s'écoule un intervalle de temps avant que la poulie ou l'axe soient dans cette position, les premiers efforts du moteur ne sont pas les mêmes que ceux qu'il est obligé de faire ensuite lorsque la tangente ou point de contact a l'inclinaison dont on vient de parler.

Expériences sur la roideur des cordes dans le cas du mouvement.

1204. Les expériences sur la roideur des cordes que nous avons rapportées jusqu'à présent ont été faites dans le cas d'un mouvement insensible. M. Coulomb a voulu connoître si, avec une vîtesse finie, l'effet qui résulte de la roideur de la corde étoit augmenté ou diminué. Il s'est servi, comme à l'art. (1192), d'une poulie à boîte de cuivre et à axe de fer, enduite de suif. Le diametre de la poulie étoit, comme dans l'article cité, de 144 lignes, et celui de l'axe de $20\frac{1}{2}$ lignes; mais au lieu d'employer, comme à l'art. (1192), la corde n° 1 de 6 fils de carret, il s'est servi de celle de 30 fils n° 3, dont il connoissoit la roideur dans les vîtesses insensibles par les différentes expériences qui précedent.

La table suivante présente les résultats des expériences : on a fait parcourir aux poids suspendus à la poulie une hauteur de 6 pieds, et les temps employés à parcourir tant les trois premiers que les trois derniers ont été mesurés avec une pendule à demi-secondes, comme on l'a fait à toutes les expériences précédentes qui exigoient la mesure du temps.

Digitized by Google

Table pour les expériences sur la résistance due à la roideur des cordes dans les machines en mouvement.

N^os des expériences.	Poids suspendu de chaque côté de la poulie en livres.	Poids additionnel qui a mis la poulie en mouvement.	Partie du poids ci à côté employée à vaincre le frottement et la roideur de la corde.	Mouvement des poids suspendus à la poulie.	Pression de l'axe en livres.	Poids qui, agissant à l'extrémité du rayon de la poulie, peut faire équilibre au frottement sur l'axe.	Roideur de la corde, évaluée en déduisant le poids ci à côté de celui qui a mis la poulie en mouvement.	Roideur de la corde, évaluée d'après sa tension et les expériences de l'art. (1190).
		7,5 lb	7,5 lb	Lent et continu.	221 lb	2,6 lb	4,9 lb	4,0 lb
1re	100 lb	12	7,6	Les trois premiers pieds en 3″. Les trois derniers pieds en 1″½.				
		15	7,6	Les trois premiers pieds en 2″. Les trois derniers pieds en 1″½.				
		11	11	Lent et incertain.	425	4,9	6,1	6,6
2^e	200	15	12,9	Les trois premiers pieds en 6″. Les trois derniers pieds en 3″.				
		19	12,2	Les trois premiers pieds en 3″½. Les trois derniers pieds en 1″¾.				
		20,5	20,5	Lent et incertain.	834	9,7	10,8	11,8
3^e	400	24	19,9	Les trois premiers pieds en 6″. Les trois derniers pieds en 3″.				
		31	17,6	Les trois premiers pieds en 3″. Les trois derniers pieds en 2″.				
4^e	600	31,5	31,5	Incertain et continu.	1245	14,5	17,0	17,0
		37	31,5	Les trois premiers pieds en 6″. Les trois derniers pieds en 3″¾.				

1205. On a vu, dans la table de l'art. (1190), que, pour plier la corde n° 3 de 30 fils de caetrr, autour d'un rouleau de 12 pouces de diametre et avec une tension de 500 livres, il falloit un poids de 14,4 liv.; la partie constante de ce poids due à la fabrication de la corde est, d'après la table de l'art. (1186), de 1,4 liv. : on peut conserver cette valeur; mais il faut réduire, eu égard à l'usé de la corde, la partie due à la tension par quintal à $\frac{1}{5}(14{,}4 - 1{,}4) = \frac{1}{5} \times 13$ liv. $= 2{,}6$ liv. C'est d'après ces données qu'on a calculé immédiatement la derniere colonne à droite de la table précédente.

Observations sur ces expériences, qui prouvent que, dans les cas ordinaires, la vitesse n'influe pas sensiblement sur la roideur des cordes.

Pour remplir l'objet des expériences il falloit avoir la roi-

Digitized by Google

deur de la corde sans rien statuer *à priori* sur les valeurs qu'on auroit pu trouver précédemment à cette roideur. Pour cela M. Coulomb a évalué le frottement de l'axe d'après sa charge et les expériences de l'art. (1192); où l'on a vu que ce frottement est indépendant de sa vîtesse et égal aux 0,087 de la pression. Ce frottement qui s'exerce à la surface de l'axe étant calculé et le rayon de l'axe étant à la distance entre le centre de rotation et l'axe de la corde comme 1 est à 7,5, il a été aisé de calculer les poids qui, agissant dans la direction verticale de l'axe de la corde, peuvent faire équilibre au frottement dans chaque expérience; et ces poids sont contenus dans la septieme colonne. Retranchant ces poids des poids additionnels contenus dans la troisieme colonne, lesquels poids ont mis la poulie en mouvement, on a, dans le cas d'un mouvement très lent, les valeurs des poids qui ont surmonté la roideur de la corde, lesquels poids sont contenus dans la huitieme colonne et different peu des poids calculés immédiatement et contenus dans la neuvieme colonne.

Maintenant, pour savoir si le plus ou le moins de vîtesse des poids suspendus à la poulie a pu influer sur la résistance due à la roideur de la corde, il a fallu, dans le cas du mouvement, calculer quelle étoit la portion du poids additionnel suspendu à la poulie employée à vaincre le frottement et la roideur de la corde. On s'est servi pour cela de la formule $p' = \frac{3 \times 6\,P}{9\,t'}$ de l'art. (1193), qui pouvoit avoir son application; car les temps employés par les poids à parcourir les trois premiers pieds étant, d'après ce qui est dit dans la 5e colonne de la table, à-peu-près sous-doubles des temps employés à parcourir les trois derniers pieds, le mouvement a dû (1132) être uniformément accéléré, et les quantités $p - p'$ qui en sont résultées et qui sont contenues dans la 4e colonne, different peu, comme on voit, des poids employés à vaincre le frottement et la roideur des cordes dans le cas d'un mouvement très lent. Or, comme nous savons, par les expériences précédentes, que le frottement est indépendant de la vîtesse et qu'il a dû opposer la même résistance dans les divers essais de chaque expérience; il suit de là que la résistance due à la roideur de la corde a été pareillement constante dans ces mêmes essais, et n'a point dépendu de la vîtesse, au moins d'une maniere sensible et qui mérite qu'on y ait égard, dans le calcul des machines.

1206. L'invariabilité de la résistance due à la roideur des cordes,

Digitized by Google

cordes, sous différentes vîtesses, auroit pu se déduire immédiatement des résultats compris dans la 5e colonne de la table qui, comme on vient de le dire, prouvent que le mouvement a été uniformément accéléré. Il suit, en effet, de cette propriété qu'il y a toujours eu une partie constante de la pesanteur employée à surmonter le frottement et la roideur des cordes.

Cas particulier où la vîtesse paroit influer sur la roideur des cordes.

1207. « Cependant, ajoute M. Coulomb, il faut avouer qu'il « n'est pas exactement vrai que l'augmentation de vîtesse n'aug- « mente pas les résistances dues à la roideur des cordages. Cette « augmentation paroît sur-tout sensible lorsque les cordes ne « sont tendues que par des forces au-dessous de 100 livres. L'on « a estimé, par beaucoup d'essais, qu'en pareil cas, une vîtesse « de 8 pouces par seconde pouvoit augmenter d'un peu plus « d'une livre les résistances dues à la roideur de notre corde de « trente fils de carret : mais cette augmentation de résistance « paroît être une quantité constante pour le même degré de « vîtesse, quelle que soit la tension; en sorte qu'elle cesse d'être « sensible sous les grandes tensions, et qu'il n'y a guere de cir- « constances où l'on ne puisse la négliger dans la pratique : cette « augmentation, relative à la vîtesse, paroît d'ailleurs beaucoup « plus grande dans les cordes neuves que dans les vieilles, dans « les cordes goudronnées que dans les cordes blanches. »

Conclusion générale des expériences rapportées depuis l'article (1174).

1208. M. Coulomb conclud généralement des expériences rapportées depuis l'art. (1174);

1°. *Que, relativement à la pratique, dans toutes les machines de rotation le rapport de la pression ou frottement peut toujours être supposé constant, et que la vîtesse y influe trop peu pour qu'on doive y avoir égard;*

2°. *Que la résistance qu'il faut vaincre pour plier une corde sur un rouleau est représentée par une formule composée de deux termes; le premier est une quantité constante indépendante de la tension et de la forme;* $\frac{ak^{\mu}}{R}$ *ou* a *est une quantité constante que l'expérience détermine,* k^{μ} *est une puissance du diametre* k *de la corde, et* R *le rayon du rouleau; le second terme,* $\frac{bk^{\mu}}{R}$ Q *ou* b *est une quantité constante;* k^{μ} *à-peu-près la même puissance du diametre de la corde que dans le premier terme;* Q *est la tension de la corde. Ainsi on a, pour la formule qui donne la roideur de la corde,* $\frac{k^{\mu}}{R}(a + bQ)$; *la puissance* μ, *comme on l'a*

Digitized by Google

dit précédemment (1186), *est une quantité qui varie suivant la flexibilité de la corde; dans les cordes neuves et dans les cordes goudronnées, composées de 5 ou 6 fils de carret et au-dessus, nous trouvons* $\mu = 2$; *dans les cordes plus qu'à demi usées,* $\mu = \frac{3}{2}$ (*).

Application de la théorie et des expériences exposées dans les chapitres précédents au calcul d'un cabestan.

1209. La formule générale de l'équilibre dans le cabestan est, art. (1039),

$$MR = SR' + \frac{rS}{\left(1+\frac{1}{ff}\right)^{\frac{1}{\mu}}} + K^{\mu}(a + bS).$$

Exemple de l'application de la théorie et de l'expérience à la pratique du calcul des machines.

On suppose qu'on veut élever un poids . . . . . $S = 8000$ livres,

Et, d'après la construction de la machine, le rayon de l'axe qui est en fer, ou . . . . . $r = 2$ pouces.

N^a. Cet axe tourne dans une boîte de cuivre; le rayon de l'arbre ou cylindre, autour duquel s'enroule la corde, ou . . . . . $R' = 10$ pouces.

Le bras du cabestan, ou le rayon de la circonférence dans laquelle s'exercent les efforts des hommes = $R = 10$ pieds $= 120$ pou.

L'axe est supposé n'avoir pas été enduit de suif depuis quelque temps; ainsi le rapport du frottement à la pression se trouve dans le cas de la 15e expérience de la table de l'art. (1192), où on a . . . . . $f = 0{,}133$.

On déduit de cette valeur . . . $\left(1+\frac{1}{ff}\right)^{\frac{1}{\mu}} = 7{,}5851$.

La corde est supposée une corde goudronnée de 120 fils de carret, qui pourroit porter 12 à 14 milliers sans se rompre. Une corde goudronnée, de 30 fils de carret, exige (1186), pour être pliée autour d'un rouleau de 2

(*) Les nombres 2 et $\frac{3}{2}$ sont les nombres entiers qui approchent le plus des nombres fractionnaires 1,7 et 1,4 donnés immédiatement par l'expérience, et l'on ne court aucun risque, dans presque tous les cas de pratique, de substituer les premiers aux seconds.

Digitized by Google

pouces de rayon, un effort constant de 6,6 liv., et un effort proportionnel à la tension, à raison de 11,6 liv. par quintal, ou 116 liv. par millier. Le rayon du cylindre étant ici de 10 pouces, il faut, en supposant d'abord les diametres des cordes égaux, diminuer ces efforts dans la raison de 10 à 2, c'est-à-dire faire leur somme égale à $\frac{2}{10}(6,6+116)$ pour un millier, et à $\frac{2}{10}(6,6+8\times 116)$ pour les 8 milliers. Mais comme la corde est de 120 fils de carret au lieu de 30, il faut, d'après l'article (1186), augmenter ce dernier résultat dans la raison de 30 à 120; et on aura finalement $\frac{120}{30}\times\frac{2}{10}(6,6+8\times 116)$ ou 747,7 pour la valeur de l'effort qui doit surmonter la roideur de la corde, c'est-à-dire . . . . . $\frac{K''}{R'}(a+bS)=747,7.$

Et comme $R'=10$, on a . . $K''(a+bS)=7477.$

D'après toutes les données précédentes la formule

$$MR=SR'+\frac{rS}{\left(1+\frac{1}{ff}\right)^{\frac{\alpha}{r}}}+K''(a+bS)$$ se change en

$M\times 120=8000\times 10+\frac{8000\times 2}{7,5851}+7477$; d'où on tire $M=666,6+17,577+62,3=746,5$ liv.

1210. Il faut donc distribuer, à l'extrémité des barres ou leviers du cabestan, des efforts dont la somme soit égale à 746,5 liv. En supposant que chaque homme fasse un effort de 25 liv., il faudra 30 hommes pour faire mouvoir le poids de 8000 liv., au moyen de ce cabestan; la somme des efforts employés à vaincre le frottement et la roideur du câble sera de $17,577+62,3=79,9$ liv., et emploiera par conséquent la force de plus de trois hommes.

Des forces de l'homme, ou de l'effort dont il est capable sous différentes vîtesses, lorsqu'il est employé à porter, pousser, traîner, lancer et en général à mouvoir des machines.

Motifs qui engagent à donner une théorie détaillée de la force de l'homme.

1211. LORSQUE nous avons traité dans la dynamique (487) des machines en mouvement, nous avons adopté (496), pour représenter l'effort du moteur, une expression qui, quoique applicable en bien des circonstances, ne doit cependant pas, ainsi que nous l'avons observé, être généralement adoptée sans modification. Notre objet étoit seulement d'avoir un moyen provisoire de donner quelques exemples de l'application de la théorie générale des machines; et nous nous sommes réservé d'exposer ensuite d'une maniere plus détaillée et plus exacte les principes d'après lesquels on doit évaluer l'action des différents moteurs. Cette tâche est déja remplie quant aux fluides. Nous avons exposé la théorie de leur équilibre, de leur mouvement et de leur résistance; nous y avons joint la plus grande partie des expériences propres à confirmer cette théorie et à la rendre applicable, en nous réservant de donner le surplus lorsqu'il en sera temps. On peut donc, lorsqu'une machine devra être mue par un fluide, trouver, par les principes exposés dans les deux sections précédentes, la valeur ou générale ou particuliere de l'effort du moteur. Il est une espece de fluide qui joue un très grand rôle dans l'emploi des machines, et sur lequel l'expérience seule peut donner des connoissances; c'est le fluide élastique produit par l'eau réduite en vapeurs. Nous ne finirons pas cete section sans en parler, afin de préparer à des recherches plus étendues, qui trouveront leur place dans la section où nous traiterons des pompes à feu. Nous allons, en attendant, dans ce chapitre et dans le suivant, traiter de l'effort dont les hommes et les animaux sont capables pour le mouvement des machines; au moyen de quoi ce traité contiendra tout ce qui est nécessaire pour trouver dans les différents cas la forme à donner à la fonction qui représente l'effort du moteur d'une machine.

Travail de M. Lambert sur cette matiere.

1212. Feu M. Lambert, de l'académie de Berlin, et que nous avons déja eu occasion de citer dans cet ouvrage (551), a publié, dans les Mémoires de l'académie de Berlin, année 1776, un mémoire sur les forces du corps humain, où il a déployé la finesse de recherche et la sagacité qui distinguent tous ses ouvrages. La théorie qu'il donne est très propre à s'appliquer à tou-

Digitized by Google

tes les expériences qu'on pourroit faire, et est en même temps dépouillée de toutes les discussions physiologiques qui pourroient embarrasser quelques lecteurs. Nous prendrons donc cet auteur pour guide dans les recherches qui vont suivre ; et nous espérons qu'on y trouvera tous les principes nécessaires pour analyser les différents cas où l'homme est considéré comme *agent mécanique.*

Différentes manieres dont l'homme emploie ses forces.

1213. L'homme emploie ses forces, ou en marchant, ou en restant à la même place. Ces deux manieres d'être fournissent deux divisions générales de ce chapitre et y seront traitées l'une après l'autre. Nous allons d'abord traiter la premiere, c'est-à-dire le cas où l'homme marche, que nous sous-diviserons en deux autres, savoir celui où l'homme porte un fardeau, et celui où il tire ou pousse : commençons par la sous-division où nous considérons l'homme marchant et portant un fardeau.

Maniere de considérer le mouvement d'un homme qui marche chargé d'un fardeau.

1214. Lorsqu'un homme marche chargé d'un fardeau, on peut considérer les différents efforts résultants de son organisation comme autant de puissances qui agissent sur la masse totale de l'homme et du fardeau, et dont la résultante commune passe par le centre de gravité de cette masse totale où elle est censée toute réunie. Cette résultante se combine avec la gravité pour produire les différents phénomenes du mouvement progressif de l'homme.

Recherche d'une équation fondamentale applicable au cas où un homme chargé d'un fardeau s'élance verticalement.

1215. Nommons P le poids du corps de l'homme, et q le poids du fardeau dont il est chargé. Dans le cas de l'immobilité, la résultante dont on a parlé dans l'article précédent doit être égale et directement opposée au poids $P + q$; et dans le cas où le centre de gravité s'éleveroit verticalement, cette résultante doit surpasser le poids $P + q$ d'une quantité quelconque de laquelle dépend la vîtesse ascensionnelle.

Nommons $P + K$ le poids équivalent à cette résultante ou à l'effort qui s'exerce de bas en haut sur le centre de gravité de la masse $P + q$ pour élever ce centre. Le cas de l'immobilité donnera donc $P + K = P + q$, et le cas de l'ascension verticale donnera $P + K > P + q$.

1216. Dans le dernier cas $(P + K) - (P + q)$ ou $K - q$, représente l'impulsion donnée à chaque instant au centre de gravité, ou plutôt (25) la quantité de mouvement que la masse $P + q$ acquerroit si cette impulsion agissoit uniformément pendant l'unité de temps. D'après cela, φ étant la force accélératrice due à la pesanteur, $\frac{K-q}{\frac{1}{\varphi}(P+q)}$ est la force accélératrice qui a lieu (174).

Digitized by Google

U étant la vîtesse à chaque instant et x l'espace parcouru, on aura (24) l'équation $udu = \frac{\varphi(K-q)}{P+q}dx$. Soit h la hauteur due à la vîtesse u, on a (65) $u^2 = 2\varphi h$, ou $udu = \varphi\, dh$, qui, substituée dans l'équation précédente, donne

Exposition de cette équation.

1217. $dh = \frac{K-q}{P+q}dx$.

Réflexion sur l'application de cette équation.

1218. Pour bien concevoir l'application de cette équation, il faut observer que lorsqu'un homme veut s'élancer, il plie d'abord les genoux. Dans cette situation le sol sur lequel pose la plante de ses pieds lui sert de point d'appui; il éleve son centre de gravité en pressant contre ce sol avec un effort $K-q$, proportionné au saut qu'il veut faire; et pendant le petit intervalle de temps que dure l'élan, le centre de gravité monte d'un mouvement accéléré dont la force accélératrice est à chaque instant proportionelle à $\frac{K-q}{P+q}$, la hauteur due à la vîtesse étant dans le même instant égale à h, et l'espace parcouru depuis le commencement de l'élan étant x. Lorsque ensuite le centre de gravité est élevé de maniere que la plante des pieds commence à ne plus presser le sol sur lequel elle est posée, alors ce centre de gravité n'est plus sollicité de bas en haut par aucune puissance; il s'éleve en l'air avec la vîtesse acquise en vertu de l'accélération qui a eu lieu pendant la durée de l'élan, et parvient par conséquent jusqu'à la hauteur due à cette vîtesse.

L'équation $dh = \frac{K-q}{P+q}dx$ est donc celle qui a lieu pendant la durée de l'élan, et cet élan fini, la masse $P+q$ est soumise à la pesanteur à la maniere de tous les projectiles.

Considérations au moyen desquelles on obtient une intégrale approchée de cette équation.

1219. Si on suppose la quantité $\frac{K-q}{P+q}$ constante, ou, en la considérant comme variable, si on suppose à K une valeur moyenne entre sa plus grande et sa plus petite valeur pendant la durée de l'élan, l'intégrale approchée de l'équation de l'art. (1217) sera $h = \frac{(K-q)}{P+q}x$. Il n'y a point de constante à ajouter, parceque x et h commencent ensemble. Cette intégrale doit être prise dans toute l'étendue de l'élan; et en supposant l'espace total parcouru par le centre de gravité égal à A, on aura $h = \frac{(K-q)A}{P+q}$.

1220. On peut raisonnablement supposer que, pour imprimer au centre de gravité une vîtesse due à une hauteur donnée h, on emploie une force accélératrice moyenne d'autant plus grande que la hauteur totale A de l'élan est plus petite, c'est-à-dire qui, lorsque A devient a, $\frac{K-q}{P+q}$ devient $\frac{(K-q)a}{P+q}$, de telle sorte que

Digitized by Google

$ak = A$: on a donc généralement $h = \frac{(K-q)\,ak}{P+q}$, ou, en faisant $ak = n$,

1221. $h = n.\frac{K-q}{P+q}$.

Equation finie, déduite de ces considérations.

Equation dans laquelle n est un coëfficient constant à déterminer par quelque expérience.

Mouvement d'un homme chargé d'un fardeau qui s'élance dans une direction inclinée à l'horizon. Ce cas peut toujours se rapporter à celui où un homme marche sur un plan incliné.

1222. Cherchons maintenant à déterminer les circonstances du mouvement lorsque le centre de gravité de l'homme et du fardeau est lancé dans une direction inclinée à l'horizon. Il est évident que ce cas peut toujours se rapporter à celui où un homme marche sur un plan incliné, car à chaque pas qu'il fait il est obligé de donner une impulsion à son centre de gravité pour le lancer obliquement du point que ce centre quitte au point où il doit parvenir au commencement du pas suivant.

1223. Le centre de gravité décrit donc un arc de parabole, pendant la durée d'un pas, comme le font (409 et art. suiv.) tous les projectiles lancés obliquement.

Observations sur le pas de l'homme.

1224. Soit ADM (fig. 184) un arc de parabole représentant celui décrit par le centre de gravité de l'homme et du fardeau, et AM le chemin ou le plan incliné sur lequel l'homme marche: nous observerons d'abord que la tangente en M doit être horizontale, ou que M doit être le sommet de la parabole. En effet, lorsque cette condition a lieu, la direction du centre de gravité se trouve horizontale à la fin du pas ADM, et ainsi ce centre de gravité n'appuie pas sur le pied qu'on pose alors par terre pour recommencer le pas suivant. S'il en étoit autrement et que le centre de gravité commençât à tomber lorsqu'on pose le pied par terre pour faire un second pas, ce centre appuieroit sur le pied qu'on met par terre et exigeroit une augmentation d'effort pour l'élan qui doit produire le second pas. L'horizontalité de la tangente en M comporte donc moins de fatigue que son inclinaison; et comme l'homme tend toujours à se donner le moins de fatigue possible, il doit disposer ses pas de maniere à ce que cette horizontalité ait lieu.

Recherche et exposition d'une équation qui donne la vîtesse moyenne d'un homme qui marche sur un plan incliné.

1225. Soit AN la tangente au point A ou la direction dans laquelle le centre de gravité est lancé au commencement du pas, AV la vîtesse de projection. Nommons t le temps total qui s'écoule depuis l'instant où le centre de gravité s'élance du point A avec la vîtesse V jusqu'à l'instant où, arrivé en M, il s'élance de ce point M pour parcourir un second arc de parabole. On conçoit sans peine que le temps t doit être partagé en deux parties, l'une employée à parcourir l'arc ADM, et l'autre employée à se pré-

Digitized by Google

parer au pas suivant. Nous ferons ces deux parties de temps égales, et par conséquent chacune aura pour valeur $\frac{1}{2}t$.

1226. Menons l'horizontale AB, la verticale BMN, et faisons,

Angle MAB $= \lambda$,
Angle NAB $= \omega$;
On aura, AN $= \frac{1}{2}t\,V$,
AM $= \frac{1}{2}t\,V.\,\frac{\cos.\,\omega}{\cos.\,\lambda} = x$.

La vîtesse moyenne, qui doit être égale à la longueur AM d'un pas, divisée par le temps total t employé à faire ce pas, sera désignée par v, et on aura :

$$v = \frac{1}{t}.\,AM = \frac{x}{t} = \frac{V\cos.\,\omega}{2.\cos.\,\lambda}.$$

C'est la vîtesse avec laquelle un mobile parcourroit uniformément la droite AM pendant le temps t. La propriété de la parabole donne :

$$\text{Tang. } \omega = 2\,\text{tang. } \lambda, \text{ ou } \frac{\sin.\,\omega}{\cos.\,\omega} = \frac{2.\,2\sin.\,\lambda}{2\cos.\,\lambda}.$$
$$\text{D'où } \frac{\sin.\,\omega}{2\sin.\,\lambda} = \frac{\cos.\,\omega}{2.\cos.\,\lambda}.$$

Et la vîtesse moyenne $v = \frac{V\cos.\,\omega}{2\cos.\,\lambda}$ devient $v = \frac{V\sin.\,\omega}{4\sin.\,\lambda}$.

Mais $\sin.\,\omega = \frac{\text{tang. }\omega}{\text{sec. }\omega} = \frac{\text{tang. }\omega}{(1+\text{tang.}^2\omega)^{\frac{1}{2}}}$, ou substituant pour tang. ω, sa valeur 2 tang. λ trouvée ci-dessus,

$$\text{Sin. } \omega = \frac{2\,\text{tang. }\lambda}{(1+3\,\text{tang.}^2\lambda)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\frac{2.\,\sin.\,\lambda}{\cos.\,\lambda}}{\left(1+4.\frac{\sin.^2\lambda}{\cos.^2\lambda}\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{2\sin.\,\lambda}{(\cos.^2\lambda+4\sin.^2\lambda)^{\frac{1}{2}}} =$$
$$\frac{2\sin.\,\lambda}{(1+3\sin.^2\lambda)^{\frac{1}{2}}}.$$

Il faut observer, pour cette derniere réduction, que $\sin.^2\lambda + \cos.^2\lambda = 1$.

1227. Substituant la valeur de $\sin.\,\omega$, qu'on vient de trouver dans l'équation $v = \frac{V\sin.\,\omega}{4\sin.\,\lambda}$ trouvée ci-dessus, il vient pour la valeur de la vîtesse moyenne,

$$v = \frac{V}{2\,(1+3\sin.^2\lambda)^{\frac{1}{2}}}.$$

Comment on introduit, dans cette équation, le poids de l'homme et celui du fardeau dont il est chargé.

1228. Pour introduire dans l'expression précédente la valeur du poids $P + q$ et celle de l'effort $P + K$, nous observerons que la portion du poids $P + q$ qui agit suivant NA, et que l'homme doit surmonter, est égale à $(P + q)\sin.\,\omega$, et que l'effort $P + K$ peut être considéré, d'après les observations de M. Lambert, comme étant le même dans toutes les directions; donc l'impulsion donnée

au

au centre de gravité doit être représentée par $(P+K)-(P+q)\sin.\omega$, et h représentant la hauteur due à la vîtesse V de projection que le centre de gravité acquiert en vertu de cette impulsion dans la direction AN, on a, par un raisonnement semblable à celui de l'art. (1215 et suiv.),

$$h = n\,\frac{[(P+K)-(P+q)\sin.\omega]}{P+q},$$

Ou, en substituant la valeur de sin. ω, art. (1226).

$$h = \frac{[(P+K)(1+3\sin.^2\lambda)^{\frac{1}{2}} - 2(P+q)\sin.\lambda]\,n}{(P+q)(1+3\sin.^2\lambda)^{\frac{1}{2}}}.$$

1229. h étant la hauteur due à la vîtesse V, et φ la force accélératrice due à la pesanteur, on a (65) $V=(2\varphi h)^{\frac{1}{2}}$; ainsi l'équation de l'art. (1227) devient $v=\frac{(2gh)^{\frac{1}{2}}}{2(1+3\sin.^2\lambda)}$; substituant dans cette équation la valeur de h, trouvée dans l'art. précédent, il vient

$$v=\tfrac{1}{2}(2\varphi n)^{\frac{1}{2}}\left\{\frac{(P+K)(1+3\sin.^2\lambda)^{\frac{1}{2}}-2(P+q)\sin.\lambda}{(P+q)(1+3\sin.^2\lambda)^{\frac{1}{2}}}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

qu'on réduit aisément à

1230. $$v=\left\{\frac{P+K}{P+q}\cdot\frac{n\varphi}{2(1+3\sin.^2\lambda)}-\frac{n\varphi.\sin.\lambda}{(1+3\sin.^2\lambda)^{\frac{1}{2}}}\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Equation qui donne le rapport entre la vîtesse de l'homme qui marche, le poids de son corps et de son fardeau et la pente du chemin sur lequel il marche.

1231. Faisons $\frac{\varphi}{2(1+3\sin.^2\lambda)}=A$ et $\frac{\varphi\sin.\lambda}{(1+3\sin.^2\lambda)^{\frac{1}{2}}}=B$, et l'équation précédente deviendra

$$v=\left\{n\left(\frac{P+K}{P+q}A-B\right)\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

1232. La table suivante offre les valeurs de A et B, correspondantes aux valeurs de λ, prises de 5 en 5 degrés, dans toute l'étendue du quart de cercle, et calculées d'après la valeur connue de φ, qui est égale à 30,196 pieds-de-roi.

Table pour faciliter l'usage de cette équation.

Digitized by Google

Valeurs des quantités A *et* B *dans l'équation* $v = \left\{ n\left(\frac{P+K}{P+q}A - B\right)\right\}^{\frac{1}{2}}$ *qui donne la valeur de la vîtesse moyenne* v, P *étant le poids de l'homme*, q *celui du fardeau*, $(K - q)\,dt$, *la force motrice, et* n, *un coëfficient à déterminer par expérience.*

Angle λ, ou inclinaison du chemin à l'horizon.	Valeurs de A ou de $\frac{30,196}{2(1+3\sin.^2\lambda)}$	Valeurs de B ou de $\frac{30,196\sin.\lambda}{(1+3\sin.^2\lambda)^{\frac{1}{2}}}$	Angle λ, ou inclinaison du chemin à l'horizon.	Valeurs de A ou de $\frac{30,196}{2(1+3\sin.^2\lambda)}$	Valeurs de B ou de $\frac{30,196\sin.\lambda}{(1+3\sin.^2\lambda)^{\frac{1}{2}}}$
Degrés.			Degrés.		
0	15,098	0,0000	45	6,0362	5,4016
5	14,761	2,5443	50	5,4695	5,0437
10	13,846	4,6045	55	5,0110	4,7294
15	12,571	5,9380	60	4,6456	4,4633
20	11,176	6,5776	65	4,3583	4,2475
25	9,8308	6,7052	70	4,1372	4,0704
30	8,6274	6,5217	75	3,9742	3,9390
35	7,5984	6,1836	80	3,8619	3,8470
40	6,7417	5,7916	85	3,7962	3,7926
45	6,0392	5,4016	90	3,7745	3,7745

De la force centrifuge qui a lieu quand on marche.

1233. Nous pourrions passer sur le champ à quelques applications; mais il est bon de dire un mot de la force centrifuge qui a lieu quand on marche. Pour concevoir ce phénomene, il faut observer que le centre de gravité décrit une courbe qui a pour rayon de courbure le pied sur lequel on avance en marchant. Faisons ce rayon de courbure $= r$, la vîtesse du centre de gravité $=$ V, et la force centrifuge $= f$. On a, d'après ce qui est dit art. (399) de l'équation,

1234. $f = \frac{V^2}{r}(P + p)$.

Vîtesse nécessaire pour que la force centrifuge soit égale à la pesanteur, et que l'homme qui court avec cette vîtesse, ne pese point sur le sol.

Si on suppose la force centrifuge égale à la pesanteur, on aura $f = \varphi\,(P + p)$, et l'équation précédente donnera $V = (\varphi\, r)^{\frac{1}{2}}$.

1235. La quantité r est égale à environ $2\frac{1}{2}$ pied pour les hommes de taille moyenne, ce qui donne, dans le cas de l'art. précédent, V $= 8,6884$ pieds. Ainsi un homme qui courroit avec une vîtesse d'environ 9 pieds par seconde cesseroit entièrement de graviter sur ses pieds (1).

(1) M. Lambert a trouvé, par des essais, qu'en courant avec une pareille vîtesse, on reste tellement dans l'air que les pieds n'agissent que comme *s'ils repoussoient la terre*

Digitized by Google

1236. Considérons le cas de la formule $v = \left\{ n \left(\frac{p+K}{p+q} A - B \right) \right\}^{\frac{1}{2}}$ où la fatigue est la moindre, c'est-à-dire où l'effort qu'on emploie en marchant est sensiblement le même que celui qu'on emploieroit à se tenir debout sans marcher. Cette condition donne $K = q$, et l'équation précédente devient

Équation qui donne la vitesse moyenne de la marche, lorsqu'on ne fait qu'un effort égal à celui nécessaire pour se tenir debout sans marcher.

$$v = \left\{ n (A - B) \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

1237. On peut, au moyen de la table de l'art. (1222), calculer les valeurs de $A - B$ pour différentes inclinaisons dans l'hypothese de l'article précédent, et former ainsi la table suivante. On observera que l'expression $A - B$ a été considérée jusqu'à présent comme s'appliquant au cas où l'homme marche en montant; mais lorsqu'il marche en descendant, sin. λ devient négatif, et B change de signe. Voilà pourquoi la table suivante contient deux colonnes des coëfficients de $\sqrt{n}$ dans les valeurs de v, l'une pour la montée et l'autre pour la descente.

---

en arriere. Cela demande beaucoup d'agilité dans les pieds; ils ne doivent frapper la terre qu'autant qu'il faut pour conserver la vîtesse. C'est plutôt l'inégalité du chemin et le frottement qui en résulte dont il faut se servir pour cet effet, et il faut recommencer à pousser la terre en arriere, dans les moments où le centre de gravité atteint le sommet de la parabole : si on le fait plutôt, on fatigue les pieds au-delà de ce qu'il faudroit; et si on le fait plus tard, le choc des pieds contre le chemin en devient plus rude, et l'on est forcé de plier les genoux, parceque le centre de gravité recommence à peser sur le pied qu'on met à terre, ce qui demande plus de force pour l'élancer de nouveau.

On voit, par là, que c'est l'expérience et l'habitude qui forment un habile coureur plutôt qu'une force particuliere des muscles; on en peut dire autant d'un sauteur.

C'est la force centrifuge qui fait qu'on passe en partie sur une glace beaucoup trop mince pour qu'on puisse s'y tenir sans mouvement.

Les anciens savoient qu'une grande vîtesse diminue et détruit même l'effet de la pesanteur; ils avoient bien observé que, dans les courses rapides, la force est presque entièrement employée à plier la jointure des pieds aussi fréquemment qu'il le faut, et que, bien loin de frapper rudement la terre, on ne la touche qu'autant qu'il faut pour conserver la vîtesse.

Virgile dit, en parlant de la guerriere Camille :

Illa vel intactæ segetis per summa volaret
Gramina, nec teneras cursu læsisset aristas;
Vel mare per medium, fluctu suspensa tumenti,
Ferret iter, celeres nec tingeret æquore plantas.

Digitized by Google

Table pour faciliter l'usage de cette équation.

Table pour calculer les vîtesses correspondantes à différentes inclinaisons du chemin, lorsque l'effort de l'homme qui marche ne differe pas sensiblement de l'effort nécessaire pour se tenir debout sans marcher.

Angle λ, ou inclinaison du chemin à l'horizon.	Nombres à multiplier par $\sqrt{n}$, pour avoir la vitesse de l'homme		Angle λ, ou inclinaison du chemin à l'horizon.	Nombres à multiplier par $\sqrt{n}$, pour avoir la vitesse de l'homme	
	en montant.	en descendant.		en montant.	en descendant.
Degrés.			Degrés.		
0	3,8856	3,8856	45	0,79849	3,3824
5	3,4953	4,1599	50	0,65268	3,2423
10	3,04	4,2909	55	0,53065	3,1210
15	2,5754	4,3022	60	0,42696	3,0181
20	2,1444	4,2136	65	0,33287	2,9337
25	1,7679	4,0664	70	0,25846	2,8649
30	1,4511	3,8921	75	0,18761	2,8130
35	1,1894	3,7124	80	0,12207	2,7764
40	0,97472	3,5401	85	0,06	2,7547
45	0,79849	3,3824	90	0,000	2,7475

Détermination du coefficient constant de la valeur de la vîtesse moyenne.

1238. Il ne s'agit plus, pour être en état de tirer parti de la table précédente, que de déterminer la quantité n par quelque expérience. J'ai éprouvé souvent qu'un homme qui ne porte pas de fardeau, peut, sans forcer sa marche, parcourir, sur un chemin à-peu-près horizontal, 1000 toises en 20 minutes, ce qui donne une vîtesse de 5 pieds par seconde. On a donc, dans ce cas, $\lambda = 0$, $v = 5$, et l'équation $v = \left\{ n \left(A - B \right) \right\}^{\frac{1}{2}}$ devient $5 = 3{,}8856 \sqrt{n}$; d'où $n = \frac{25}{15{,}098} = 1{,}6559$, et $\sqrt{n} = 1{,}2868$, nombre par lequel il faut multiplier ceux de la table de l'art. précédent pour avoir les vîtesses correspondantes à ces nombres.

1239. M. Lambert a observé qu'il employoit, sans faire aucun effort particulier, 13 secondes à monter un escalier de 24 marches, haut de 13,5 pieds du Rhin, et où l'angle $\lambda = 37{,}5$ degrés. On a, d'après ces valeurs, une hypoténuse de 21,3 pieds-de-roi (1), qui, divisés par 13 secondes, donnent $v = 1{,}64$ pieds-de-roi. En calculant la valeur de v d'après la table de l'art. (1237) (où l'on regardera le nombre répondant à 37,5 degrés

(1) Le pied-de-roi est au pied du Rhin comme 1440 est à 1382; ainsi le pied du Rhin contient 11 pouces 6 lignes 2 points du pied-de-roi.

Digitized by Google

comme moyen arithmétique entre les nombres répondant à 35 et à 40 degrés) et d'après la valeur de $\sqrt{n} = 1{,}2868$, on a $v = \frac{1{,}1894 + 0{,}9747}{2}$. $1{,}3 = 1{,}41$, valeur qui differe de la valeur observée d'une quantité peu considérable, eu égard à la précision qu'on doit attendre de ces sortes d'essais.

1240. La valeur de $n = 1{,}7$ paroît donc assez conforme à l'expérience. M. Lambert fait $n = 2$, parcequ'il suppose qu'un homme, sautant verticalement de toute sa force sans être chargé d'un fardeau, s'éleve à 2 pieds : cette hypothese donne peut-être une valeur un peu trop grande à la force moyenne de l'homme. M. Lambert a néanmoins calculé les tables analogues aux tables des art. (1232 et 1237) d'après la supposition de $n = 2$. Nous avons préféré de laisser n indéterminé, afin qu'on ait toute facilité de lui donner les valeurs qu'on croira le plus conformes à l'expérience ; et les tables dont on vient de parler n'en seront pas moins extrêmement commodes pour abréger les calculs.

Recherche des pentes qui comportent les plus grandes vitesses, soit en descendant soit en montant, lorsque l'homme ne fait qu'un effort égal à celui necessaire pour se tenir debout.

1241. On voit, par la 3e colonne de la table de l'art. (1237), qu'à la descente, la plus grande vîtesse doit avoir lieu lorsque l'inclinaison du chemin est d'environ 15 degrés. Pour trouver la valeur précise de l'angle λ répondant à la plus grande vîtesse, il faut égaler à zéro la différentielle de la valeur $\left\{ n\,(A + B) \right\}^{\frac{1}{3}}$ (1237), ou de la valeur $\left\{ \frac{n\,\varphi}{2\,(1 + 3\sin.^2\lambda)} + \frac{n\,\varphi\sin.\lambda}{(1 + 3\sin.^2\lambda)^{\frac{1}{2}}} \right\}^{\frac{1}{3}}$ (1231), ce qui donne $\sin.^2\lambda = \frac{7 - \sqrt{45}}{6}$, d'où on tire $-\lambda = 12°.\,44'$, la vîtesse correspondante étant d'environ 6 pieds par seconde.

1242. La 2e colonne de la table de l'art. (1237), qui sert à trouver la vîtesse de l'homme qui monte, ne présente point de *maximum* ni de *minimum ;* on en trouvera néanmoins en ayant égard au temps. Supposons qu'on veuille aller en ligne droite d'un point de position donnée à un autre point élevé au-dessus du premier d'une quantité H ; λ étant l'inclinaison du chemin, sa longueur sera $\frac{1}{\sin.\lambda}$H. Nommant le temps, t, et la vîtesse v, on a $t = \frac{H}{v.\sin.\lambda} = minimum$ ou $v\sin.\lambda = maximum$. Mettant pour v sa valeur générale, donnée art. (1230), différenciant et égalant la différentielle à zéro, on a

$$\sin.^2\lambda = \frac{(P + K)^2}{9\,(P + q)^2 - 3\,(P + K)^2}.$$

1243. On voit, par l'équation précédente, que l'inclinaison qui répond au *minimum* de temps nécessaire pour s'élever d'une

Digitized by Google

1248. $t = \frac{Q-K}{Q} T.$

1249. Le temps t dont on vient de donner la valeur étant celui qui s'écoule depuis que l'homme commence à marcher jusqu'à l'instant où la fatigue ne lui permet plus d'avancer, il est évident qu'à cet instant il a parcouru le plus grand espace possible, et qu'ainsi la valeur vt de cet espace doit être un *maximum*. Nous avons vu (1231) que $v = \left\{ n \left(\frac{P+K}{P+q} A - B \right) \right\}^{\frac{1}{2}}$; multipliant cette valeur par celle de t, donnée dans l'article précédent, différenciant le produit, divisant par n et égalant la différentielle à zéro, on a les valeurs suivantes:

1250. $K = \frac{1}{3}(Q - 2P) + \frac{2B}{3A}(P+q)$. . . . [1].

$P + K = \frac{1}{3}(Q+P) + \frac{2B}{3A}(P+q)$. . . . . [2].

$v = \left\{ \frac{1}{3} A \frac{P+Q}{P+q} - \frac{1}{3} B \right\}^{\frac{1}{2}}$. . . . . [3].

$t = \frac{2}{3} T \frac{(P+Q)A - (P+q)B}{AQ}$. . . . . [4].

Au moyen de ces équations, le fardeau q et l'inclinaison du chemin étant donnés, on connoîtra l'effort $P+K$ nécessaire pour rendre vt un *maximum*, ou pour faire le plus de chemin possible avant d'épuiser ses forces : on déterminera de plus la vîtesse moyenne résultante de cet effort et le temps qui s'écoulera jusqu'à ce que la lassitude ne permette plus de continuer la marche.

Ce que deviennent ces équations lorsqu'on suppose que le plus grand effort dont l'homme est capable est égal au poids de son corps.

On peut observer que la quantité n n'entre point dans les formules de l'article précédent ; mais leur usage exige qu'on détermine, par quelque hypothese ou quelque expérience, la quantité Q ou le plus grand effort que l'homme puisse faire outre celui nécessaire pour supporter son corps. M. Lambert suppose $Q = P$, ce qui change ces formules en

$$P + K = \frac{2B}{3A}(P+q). \quad . \quad . \quad . \quad [1].$$

$$v = \left\{ \frac{2}{3} \frac{AP}{P+q} - \frac{2}{3} B \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad . \quad . \quad [2].$$

$$t = \frac{2}{3} T \frac{2PA - (P+q)B}{AQ}. \quad . \quad . \quad [3].$$

Quantité indéterminée qui reste dans ces équations.

1251. Il ne reste plus, dans ces équations, que la quantité T à déterminer par hypothese ou d'après l'expérience ; elle est susceptible de quelques variations, suivant l'âge, la force des individus et l'habitude qu'ils ont acquise par l'exercice: cependant on doit regarder comme un fait assez prouvé par l'expérience

Digitized by Google

qu'un homme peu chargé peut marcher 12 ou 14 heures par jour, ce qui détermine la valeur de T.

Du cas où le produit de la vîtesse par le fardeau est un *maximum*.

1252. Chaque fardeau q exigeant une vîtesse différente pour que l'homme puisse lui faire parcourir le plus grand espace avant d'avoir épuisé ses forces, on peut desirer de connoître le cas où le produit de la vîtesse v par la masse q transportée est un *maximum*. Pour cela on aura, d'après l'équation [3] de l'art. (1250), $v^2 q^2 = q^2 (\frac{1}{3} A \frac{P+Q}{P+q} - \frac{1}{3} B)$; différenciant le 2e membre, en regardant q comme variable et égalant la différentielle à zéro, on aura la valeur cherchée de q.

Il est évident qu'on doit rejeter les valeurs de q, qui donneroient $q > Q$.

Du cas où un homme, marchant sur un chemin horizontal, pousse ou tire dans une direction horizontale.

1253. Examinons maintenant le cas où un homme pousse ou tire, et supposons d'abord que le chemin qu'il parcourt est horizontal ainsi que la direction dans laquelle il pousse ou tire. La figure 185 peut représenter l'attitude de cet homme pour le moment où il va appuyer sur le pied CDB. Dans cette attitude il a deux points d'appui; l'un est en A et l'autre en K au bras KE qui est supposé étendu horizontalement. Les efforts qu'il fait sont ceux nécessaires pour tenir le bras droit de même que le corps et celui dont il a besoin pour marcher; mais la vraie puissance qui entre ici en considération c'est la gravité et particulièrement le poids de son corps.

Recherche et exposition d'une équation qui donne la valeur de l'effort horizontal du bras.

1254. Soit une verticale Cg représentant le poids de l'homme; menons les horizontales Cf et gd, et achevons le parallélogramme Cfgd; le poids Cg pourra être représenté par les résultantes Cd et Cf. Or l'effort qui s'exerce horizontalement dans la direction EK, et que nous représenterons par Ei, cet effort Ei, disons-nous, dérive de Cf, et comme il peut être censé appliqué au point E d'un levier EA dont l'axe de rotation est en A, on a la proportion Ei : Cf : : AC : AE; d'où $Ei = \frac{Cf \times AC}{AE}$.

1255. Faisons $Ei = f$: on voit que f représentera l'effort nécessaire pour tenir le bras tendu. Nommons σ l'angle ACg, le poids Cg de l'homme étant égal à P, on a dg ou $Cf = P$ tang. σ, qui, substituée dans l'équation de l'art. précédent, donne $f = \frac{AC}{AE} P$ tang. σ. La proportion moyenne des parties du corps de l'homme donne à-peu-près $\frac{AC}{AE} = \frac{3}{5}$; ainsi

1256. $f = \frac{3}{5} P$ tang. σ.

Temps pendant lequel cet effort peut subsister.

1257. Si on nomme F le plus grand effort dont le bras soit susceptible,

Digitized by Google

susceptible, T' le temps nécessaire pour consommer tout cet effort, et t' le temps nécessaire pour consommer l'effort $F-f$: on aura, par les mêmes raisonnements de l'art. (1247), l'équation

$$t' = \frac{F-f}{F}\,T'.$$

1258. La composante Cd représente la pulsion du point A, qui, ne souffrant aucune diminution, doit être prise en son entier, et a pour valeur $\frac{P}{\cos.\sigma}$. Cet effort $\frac{P}{\cos.\sigma}$ étant celui que fait l'homme pour se tenir droit sur ses pieds, on a l'équation

Effort de l'homme pour se tenir droit sur ses pieds en poussant ou tirant.

$$\frac{P}{\cos.\sigma} = P + q;$$

c'est-à-dire que $\frac{P}{\cos.\sigma}$ agit comme feroit la gravité si on se tenoit droit en portant un fardeau.

1259. Maintenant, pour simplifier les calculs qui vont suivre, remarquons que l'inclinaison EAB du corps de l'homme le met dans le même cas que si son corps étoit dans une situation verticale et que AB fît avec l'horizon le même angle que EA fait avec la verticale. On peut donc, dans le cas dont il s'agit, supposer AE vertical et AB faisant avec l'horizon un angle $= ACg = \sigma$. Cette hypothese, qui ne change rien à l'état des choses, relativement aux efforts de l'homme, nous fournit l'avantage de pouvoir appliquer ici directement les formules données art. (1228 et suiv.), en substituant la quantité $\frac{P}{\cos.\sigma}$ à la quantité $P+q$, et l'angle σ à l'angle λ, lorsque le chemin est horizontal; s'il ne l'étoit pas, ce seroit $\sigma + \lambda$ qu'il faudroit substituer à λ, ou en faisant ces substitutions:

Recherche et exposition d'une équation qui donne la vitesse moyenne de l'homme.

1260.
$$v = \left\{\frac{P+K}{P}\cdot\frac{n\phi\cos.\sigma}{2(1+3\sin.^2\sigma)} - \frac{n\phi\sin.\sigma}{(1+3\sin.^2\sigma)^{\frac{1}{2}}}\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

$$\frac{\phi}{2(1+3\sin.^2\sigma)} = A;\quad \frac{\phi\sin.\sigma}{(1+3\sin.^2\sigma)^{\frac{1}{2}}} = B.$$

$$v = \left\{n\left[\frac{P+K}{P}A\cos.\sigma - B\right]\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Les tables des art. ( ) peuvent encore servir dans ce cas, en appellant $\sigma + \Psi$ ce qu'on a alors appellé Ψ.

1261. Lorsqu'on tire ou pousse, on se lasse de deux manieres que M. Lambert regarde comme assez indépendantes l'une de l'autre. La premiere maniere est due à l'épuisement de l'effort des pieds, qui a lieu dans un temps donné (1248), par l'équation

De la relation entre le temps nécessaire pour épuiser les efforts dont les pieds ou les bras sont susceptibles.

$$t = \frac{Q-K}{Q}\,T.$$

La 2e maniere vient de l'épuisement de l'effort des bras, qui a lieu dans un temps donné (1257), par l'équation

Digitized by Google

$$t' = \frac{F-f}{F} T'.$$

1262. « Je n'ai point, dit M. Lambert, assez d'expériences « pour savoir si et sous quelles conditions les temps t, t' peuvent « être le même temps. Les forces F, Q dépendent beaucoup de « l'expérience. Ordinairement elles ne sont pas moins grandes « que la force P; mais elles peuvent aller au double, au triple, « au quadruple et même au-delà. Les temps T, T′ paroissent « pouvoir être le même temps. »

Recherche d'une équation qui donne l'inclinaison du corps de l'homme nécessaire pour que cet homme marchant horizontalement, pousse ou tire horizontalement avec le plus de force et de vîtesse et fasse le plus de chemin possible avant d'être las.

1263. La question importante à examiner est celle de savoir comment, en poussant ou tirant, on peut faire le meilleur emploi possible de ses forces. Pour cela il faut d'abord chercher quelle est l'inclinaison la plus avantageuse à donner au corps. Cette recherche doit naturellement se déduire de la condition que vf soit un *maximum:* multipliant donc la valeur de f, art. (1256) par la valeur de v, art. (1260), divisant par $\frac{3}{5} P n^{\frac{1}{3}} \varphi^{\frac{1}{3}}$, et élevant au quarré, on a, pour le *maximum* cherché,

$$d\left\{\frac{P+K}{P} \cdot \frac{\text{Sin.}\,\sigma\,\text{tang.}\,\sigma}{2(1+5\,\text{sin.}^2\sigma)} - \frac{\text{sin.}\,\sigma\,\text{tang.}^3\sigma}{(1+3\,\text{sin.}^2\sigma)^2}\right\} = 0,$$

qui, en regardant σ comme variable, donne l'équation

1264. $\frac{P+K}{P}$ cos. σ $(2 - \text{sin.}^2\sigma - 3\,\text{sin.}^4\sigma)(1 + 3\,\text{sin.}^2\sigma)^{\frac{1}{3}} =$ sin. σ $(6 - 2\,\text{sin.}^2\sigma + 12\,\text{sin.}^4\sigma) = 0$.

1265. L'effort K restant indéterminé dans cette équation, il faut trouver quelque moyen de l'éliminer. Pour cela on cherchera sa valeur d'après la condition qu'avant de se lasser on fait le plus de chemin possible, et qu'ainsi vt doit être un *maximum.* On a $t = \frac{Q-K}{Q} T$, art. (1248); et $v = \left\{ n \left[\frac{P+K}{P} A \cos.\sigma - B\right]\right\}^{\frac{1}{2}}$ art. (1260). Faisant le produit des quarrés des seconds membres, et divisant par $\frac{nT^2}{Q^2}$, il vient,

$$d(Q-K)^2\left(\frac{P+K}{P} A\cos.\sigma - B\right) = 0$$

ou $d(Q-K)^2\left(K - \frac{BP}{A\cos.\sigma} + P\right) = 0$.

On a, en regardant K comme variable et en faisant le calcul,

$$(Q-K)^2 = 2(Q-K)\left(K - \frac{BP}{A\cos.\sigma} + P\right);$$

D'où on tire $K = \frac{1}{3}\left(Q - 2P + \frac{2BP}{A\cos.\sigma}\right)$ et $\frac{P+K}{P} = \frac{Q+P}{3P} + \frac{2B}{3A\cos.\sigma}$, qui, en substituant pour $\frac{B}{A}$, sa valeur $\frac{2\sin.\sigma}{(1+3\sin.^2\sigma)^{\frac{1}{2}}}$, art. (1260),

Digitized by Google

et pour cos.σ sa valeur $\frac{\text{sin.}\sigma}{\text{tang.}\sigma}$, devient $\frac{P+K}{P} = \frac{P+Q}{3P} + \frac{4\,\text{tang.}\sigma}{3(1+3\,\text{sin.}^2\sigma)}$.

1266. Cette valeur de $\frac{P+K}{P}$ substituée dans l'équation de l'art. (1264) la change en

$$\frac{P+Q}{P}.\ \text{cos.}\sigma\ (2 - \text{sin.}^2\sigma + 3\ \text{sin.}^4\sigma)\ (1 + 3\ \text{sin.}^2\sigma)^{\frac{1}{2}} = \text{sin.}\sigma\ (10 - 2\ \text{sin.}^2\sigma + 24\ \text{sin.}^4\sigma);$$

équation au moyen de laquelle on déterminera l'angle σ en valeurs de P et Q, de maniere à satisfaire au double *maximum* de pousser avec le plus de force et de vîtesse et de faire le plus de chemin possible avant d'être las.

1267. Pour faire une application de l'équation de l'article précédent, posons P = Q, ainsi que nous l'avons déja fait art. (1249) : cette équation ne renfermera plus que σ, donnera sin.σ = 0,4142, et par conséquent σ = 24°. 28′. Substituant les valeurs numériques de sin.σ et tang.σ, et faisant P = Q dans l'équation de l'art. (1265), qui donne la valeur de $\frac{P+K}{P}$, il vient P + K = 1,1596 P, et K = 0,1596 P. La table de l'article (1232) donne A = 9,96, B = 6,69, et $\frac{B}{A}$ = 0,67 : substituant ces valeurs dans l'équation de l'art. (1260) qui donne la valeur de v, on a $v = \{ n\ (1{,}16 \times 9{,}96 \times 0{,}91 - 6{,}69) \}^{\frac{1}{2}} = 1{,}95 \sqrt{n} = 2{,}5$ pieds. En faisant, d'après ce qui est dit art. (1238), $\sqrt{n} = 1{,}3$; l'équation $t = \frac{Q-K}{Q}$ T de l'art. (1248) donne, en faisant Q = P et K = 0,1596 P, t = 0,8404 T; enfin l'équation $f = \frac{3}{5}$P tang.$\dot{\sigma}$ de l'art. (1256) donne $f = \frac{3}{5}$P tang. 24°. 28′ = 0,273 P.

Le poids de l'homme étant supposé de 125 liv., on aura P = 125 liv. ; f = 34 liv. ; K = 20 liv. ; $P + q = \frac{P}{\text{cos.}\sigma}$ = 137 liv., q = 12 liv. : ainsi cet homme tirera avec une force de 34 liv., et fera 2 $\frac{1}{2}$ pieds par seconde (1). Il pourra donc, en tirant une corde qui passe par-dessus une poulie, faire monter un poids de 34 liv. à une hauteur de 2 $\frac{1}{2}$ pieds par seconde, ou bien en disposant convenablement la machine, il élevera un poids de 85 liv. à la hauteur d'un pied par seconde.

Ce qu'on entend par moment statique de l'homme.

1268. L'effet de la machine à laquelle l'homme est appliqué peut donc être représenté, pendant l'unité de temps, par 85 liv. × 1 pied; c'est le produit de v = 2,5 pieds par f = 34 liv.

(1) M. Lambert évalue la vîtesse à 3 pieds environ ; mais cette différence tient tant à la différence de mesure qu'à l'hypothese sur la valeur de n. Voyez ce qui est dit art. (1240).

Digitized by Google

Ce produit vf est en effet, ainsi qu'on a vu art. (494), celui qui mesure l'effet d'une machine : M. Lambert l'appelle, suivant l'usage ordinaire, *moment statique*.

Table pour faciliter l'usage de l'équation de l'art. (1266), en supposant une valeur quelconque au plus grand effort dont l'homme est capable.

1269. L'angle $\sigma = 24°.\ 28'$, qui résulte de l'hypothese de $P = Q$, est très conforme aux résultats moyens des expériences. Mais quoique ce cas de $P = Q$ soit assez ordinaire pour des personnes qui ne sont ni infirmes ni exercées à la fatigue, néanmoins les hommes dont on se sert ordinairement pour mouvoir les machines, sont capables d'un effort Q bien plus grand que le poids P. Or si on regarde le rapport de P à Q comme variable, l'angle σ déduit de l'équation de l'art. (1266) varie aussi. M. Lambert donne, en conséquence, la table suivante, où il suppose $\frac{AC}{AE} = \frac{3}{5}$ et $n = 2$. Nous la laissons telle qu'elle est dans son mémoire, vu que nous avons plutôt besoin du raport des quantités que de leurs valeurs absolues.

sin. σ	σ	$\frac{P+Q}{P}$	$\frac{f}{P}$	$\frac{P+K}{P}$	$\frac{P+\varphi}{P}$	v	$\frac{t}{T}$	$\frac{vtf}{TP}$
0,3	17°. 27′	1,474	0,189	0,863	1,048	2,54	1,29	0,62
0,4	23,35	1,927	0,272	1,121	1,091	2,79	0,87	0,66
0,5	30,0	2,478	0,346	1,408	1,155	2,81	0,72	0,70
0,6	36,52	3,176	0,450	1,742	1,250	2,90	0,66	0,86
0,7	44,26	4,134	0,588	2,210	1,400	2,95	0,61	1,06
0,8	53,8	5,591	0,800	2,904	1,667	2,93	0,58	1,38
etc.								
1,0	90,0	Infini.	Infini.	Infini.	Infini.	Infini.	Infini.	

Maximum déduit de cette table et réflexions sur les variations dont le moment statique de l'homme est susceptible.

1270. On voit, par cette table, que la vîtesse v varie fort peu ; elle est à-peu-près la moitié de celle qu'on auroit en marchant librement sur un chemin horizontal et en n'employant que l'effort P : car nous avons vu (1238) que cette derniere vîtesse est d'environ cinq pieds.

1271. La vîtesse qui répond à sin. $\sigma = 0{,}8$ commence à être moindre que celle qui répond à sin. $\sigma = 0{,}7$; ainsi il y a un *maximum* de vîtesse. M. Lambert trouve que ce *maximum* répond à la valeur de sin. $\varphi = 0{,}78$ ou $\varphi = 51°.\ 16'$.

1272. En déduisant de la table qu'on vient de donner (1269), dans l'hypothese de $P = 125$ livres, les valeurs de vf et de f, correspondantes aux différents angles σ, on trouve

Digitized by Google

$\frac{\text{sin. } \sigma}{}$	$\frac{vf}{}$	$\frac{f}{}$
0,3	59liv.	24 liv.
0,4	95	34
0,5	121	43
0,6	163	56
0,7	217	73
0,8	293	100

On voit par là que le produit vf est sujet à de grandes variations, suivant les angles σ, et qu'il ne peut pas se déterminer une fois pour toutes par des expériences particulieres, ainsi qu'on le pense assez généralement. Il ne faut donc pas s'étonner si les résultats donnés par différents auteurs s'accordent si peu. M. Daniel Bernoulli a trouvé que le produit vf équivaloit au poids des $\frac{3}{4}$ d'un pied cube d'eau ; d'autres l'évaluent à 50 ou 60 livres. M. Desaguilliers le porte à 100 livres, tandis que M. Amontons n'a trouvé que $37\frac{1}{2}$ livres. « Nos formules, dit M. « Lambert, font voir que toutes ces évaluations peuvent avoir « lieu ; mais c'est précisément la raison pourquoi on ne « peut s'en tenir à aucune. Il faut absolument avoir égard, tant « à la force des gens qu'on emploie qu'à la maniere dont on les « emploie. Dans les cas particuliers, c'est le poids P de l'ouvrier et « l'effort Q qu'il faut commencer à déterminer : par là on aura le « rapport $\frac{P+Q}{P}$, qui, étant cherché dans la table, donnera l'an- « gle σ, le rapport $\frac{f}{P}$, et par conséquent l'effort f. C'est à cet « effort que doit être égale la résistance qu'il faut vaincre en « poussant ou en tirant ; et alors la vîtesse v pourra être celle « qui répond à cet angle σ ; autrement l'arrangement sera mal « pris. J'ai vu des hommes tirant des bateaux avec un effort P « + K, avec lequel ils leveroient de terre un poids de 300 livres « et au-delà. Si donc vf n'étoit que de 60 livres, leur vîtesse ne « pourroit être que de $\frac{1}{5}$ de pied par seconde, tandis qu'il est « de fait qu'ils marchent avec une vîtesse de près de trois pieds, « inclinés au point d'être plus d'à moitié couchés. Il n'y a rien là « qui ne soit très-conforme à la table ci-dessus. Aussi sont-ce « des gens très exercés, qui savent prendre leurs mesures. »

De l'homme qui marche sur un chemin incliné à l'horizon, et qui pousse ou tire dans une direction quelconque.

1273. Ce qu'on vient de dire sur le cas où l'on tire ou pousse dans une direction horizontale et en marchant sur un chemin horizontal, rend aisée la considération générale des cas où tant le chemin que la direction dans laquelle on pousse ou tire sont

inclinés. La *fig.* 186 ne differe de la *fig.* 185 qu'en ce que le chemin AB fait avec l'horizon AH un angle BAH, que nous avons nommé (1226) λ, et que la direction EK de l'effort du bras fait avec la verticale un angle quelconque que nous nommerons Ψ.

Menons la verticale Cg, qui représente le poids de l'homme; traçons Cf parallele à EK, et achevons le parallélogramme $dCfg$: l'angle dCg est celui que nous avons déja nommé σ, et que nous désignerons encore par le même signe.

1274. Cela posé, le triangle dCg donne sin. dCg : sin. Cdg :: gd : Cg; mais sin. Cdg = sin. dCf = sin. $(\sigma+\Psi)$; donc on tire de la proportion précédente

$$gd = Cf = \frac{Cg \times \text{sin. } dCg}{\text{sin. } (\sigma+\Psi)} = \frac{P. \text{ sin. } \sigma}{\text{sin. } (\sigma+\Psi)};$$

et d'après ce qu'on a vu art. (1255),

$$Ei = f = \frac{AC}{AE} \cdot \frac{P \text{ sin. } \sigma}{\text{sin. } (\sigma+\Psi)} = \frac{3}{5} \frac{P \text{ sin. } \sigma}{\text{sin. } (\sigma+\Psi)};$$

et de plus,

$$Cd = P + g = \frac{P \text{ sin. } \Psi}{\text{sin. } (\sigma+\Psi)}.$$

1275. Ces formules sont indépendantes de l'angle BAH = λ, parcequ'elles se rapportent aux droites AE, EK et à la verticale Cg.

Mais en considérant, d'après ce qu'on a dit art. (1259), la droite AE comme une verticale, l'inclinaison réelle BAH du chemin doit être augmentée de l'angle dCg; ainsi cette inclinaison aura pour mesure $\sigma+\lambda$. Il faut donc, dans l'équation de l'art. (1230) qui donne la valeur de v, substituer $\sigma+\lambda$ à λ, et de plus mettre au lieu de $P+q$, sa valeur $\frac{P \text{ sin. } \sigma}{\text{sin. } (\sigma+\Psi)}$ trouvée dans l'art. précédent : cette équation deviendra, au moyen de ces substitutions,

$$v = \left\{ \frac{P+K}{P} \cdot \frac{n\theta \text{ sin. } (\sigma+\Psi)}{2 \text{ sin. } \Psi \left[1+3 \text{ sin.}^2(\sigma+\lambda)\right]} - \frac{n\theta \text{ sin. } (\sigma+\lambda)}{\left[1+3 \text{ sin.}^2(\sigma+\lambda)\right]^{\frac{3}{2}}} \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

1276. Faisant $\frac{\theta}{2\left[1+3 \text{ sin.}^2(\sigma+\lambda)\right]} = A$ et $\frac{\theta \text{ sin. } (\sigma+\Psi)}{\left[1+3 \text{ sin.}^2(\sigma+\lambda)\right]^{\frac{3}{2}}} = B$;

quantités qui se calculeront au moyen de la table de l'art. (1232), en mettant $\sigma+\lambda$ au lieu de λ; substitution au moyen de laquelle on pourra se servir de la table de l'art. (1237) : lorsqu'on fera $P+K = P+q$, l'équation précédente deviendra,

Equation qui donne sa vitesse moyenne.

$$v = \left\{ n \left[\frac{P+K}{P} \cdot \frac{\text{sin. } (\sigma+\Psi)}{\text{sin. } \Psi} A - B \right] \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

1277. Supposons, pour faire des applications, que le chemin

est horizontal, ou que $\lambda = 0$, l'angle formé par la direction de l'effort du bras et par la verticale restant seul indéterminé, l'équation de l'art. (1275) devient

Ce que devient cette équation lorsqu'on suppose le chemin horizontal.

$$v = \left\{ \frac{P+K}{P} \cdot \frac{n\varrho \sin.(\sigma+\Psi)}{2\sin.\Psi(1+3\sin.^2\sigma)} - \frac{n\varrho \sin.\sigma}{(1+3\sin.^2\sigma)^{\frac{1}{2}}} \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

1278. Si on multiplie cette valeur de v par f, le *maximum* de vf ou de v^2f^2 fournit deux équations analogues à celle de l'article (1264); l'une lorsqu'on suppose que l'angle σ est variable, l'autre lorsque c'est l'angle Ψ, K restant ensuite indéterminé dans l'une et dans l'autre, ou déterminé dans l'une et dans l'autre : on le détermine comme on a fait art. (1265) par la condition que vt ou v^2t^2 est un *maximum*, K étant regardé comme variable. On a vu, art. (1274 et 1261), les valeurs de f et t qui doivent être employées dans les calculs dont il s'agit ici.

Recherche et exposition des équations applicables au cas où le chemin étant horizontal, l'homme tire avec le plus de vitesse et de force, et fait le plus de chemin possible avant d'être las.

Les trois équations sont

$$\frac{P+K}{P} \cdot \frac{\sin.(\sigma+\Psi)}{\sin.\Psi} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$= \frac{\sin.\sigma \left\{ 6\cos.\sigma\sin.(\sigma+\Psi) - 4\sin.\sigma\cos.(\sigma+\Psi) - 12\sin.^3\sigma\cos.(\sigma+\Psi) \right\}}{\left\{ 2\cos.\sigma\sin.(\sigma+\Psi) - \sin.\sigma\cos.(\sigma+\Psi) - 3\sin.^3\sigma\cos.(\sigma+\Psi) \right\} (1+3\sin.^2\sigma)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{4\sin.\sigma\sin.\Psi.\cos.(\sigma+\Psi)}{\left\{ \sin.(\sigma+\Psi)\cos.\Psi + \cos.(\sigma+\Psi)\sin.\Psi \right\} (1+3\sin.^2\sigma)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{4\sin.\sigma}{3(1+3\sin.^2\sigma)^{\frac{1}{2}}} + \frac{P+Q}{3P} \cdot \frac{\sin.(\sigma+\Psi)}{\sin.\Psi}.$$

Les deux premieres sont données par la condition que v^2f^2 est un *maximum*, et la troisieme par la condition que c'est v^2t^2.

Le premier membre de chacune de ces équations étant $\frac{P+K}{P}\sin.(\sigma+\Psi)$, cette quantité s'élimine d'elle-même. Les deux équations qui restent peuvent être changées de telle sorte qu'on exprime les fonctions des angles Ψ par tang. Ψ, et elles seront du second degré : éliminant ensuite tang. Ψ, il reste encore une équation entre σ, P et Q; de sorte que, deux de ces quantités étant données, on en déduira la troisieme.

1279. Mais on voit aisément que le calcul est moins embarrassant lorsqu'on suppose que l'angle σ est donné, et nous nous en tiendrons à cette hypothese. Voici donc l'ordre dans lequel on calculera les valeurs correspondantes des autres quantités.

En combinant les deux premieres équations de l'art. précédent, on trouve pour l'angle Ψ l'équation

Digitized by Google

$$\text{Tang.}^{3}\,\Psi + \frac{4+12\sin.^{4}\sigma}{\sin.(2\sigma)}\,\text{tang.}\,\Psi = 2 - 3\cos.(2\sigma). \quad . \quad . \quad [1].$$

Ensuite on aura le rapport

$$\frac{P+Q}{P} = \frac{\sin.\sigma.\sin.\Psi\left\{2\sin.(\sigma+2\Psi)-6\sin.\sigma\right\}}{\sin.(\sigma+\Psi)\sin.(\sigma+2\Psi)(1+3\sin.^{\frac{1}{2}}\sigma}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots[2].$$

De plus, le rapport

$$\frac{P+K}{P} = \frac{P+Q}{3P} + \frac{4\sin.\sigma\sin.\Psi}{3\sin.(\sigma+\Psi)(1+3\sin.^{\sigma})^{\frac{1}{2}}}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots[3].$$

Enfin le rapport

$$\frac{P+q}{P} = \frac{\sin.\Psi}{\sin.(\sigma+\Psi)}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots[4].$$

En outre, la vîtesse moyenne

$$v = \left\{n\left[\frac{P+K}{P}.\ \frac{\sin.(\sigma+\Psi)}{\sin.\Psi}.\ A - B\right]\right\}^{\frac{1}{2}}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots[5].$$

Enfin la durée

$$\frac{t}{T} = \frac{Q-K}{Q}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots[6].$$

Et le rapport

$$\frac{f}{P} = \frac{AC}{AE}\,\frac{\sin.\sigma}{\sin.(\sigma+\Psi)};$$

le tout d'après les conditions que $vf = maximum$, et $vt = maximum$.

Application de ces équations.

1280. Supposons l'angle $\sigma = 30°$; $n = 2$; $\frac{AC}{AE} = \frac{3}{5}$; l'équation [1] donnera tang. $\Psi = -\frac{52,9089}{12} \pm \frac{53,9853}{12}$; le signe positif donne un trop petit angle; et, en prenant le signe négatif, on a

$$\Psi = 100°.\ 10'.$$

Cette valeur, étant substituée dans les équations suivantes, donne,

Equ. [2]. . $\frac{Q+P}{P} = 2,869.$
Equ. [3]. . $\frac{P+K}{P} = 1,606.$
Equ. [4]. . $\frac{P+q}{P} = 1,208.$
Equ. [5]. . $v = 2,96$ pieds.
Equ. [6]. . $\frac{t}{T} = 0,676.$
Equ. [7]. . $\frac{f}{P} = 0,393.$

1281.

Digitized by Google

1281. Nous n'avons rien changé aux calculs de M. Lambert, afin de pouvoir comparer les résultats qu'on vient de voir avec ceux de la table de l'art. (1269), pour le cas de cette table où $\sigma = 30°$: on voit que ce cas ne differe de celui de l'article précédent qu'en ce que $\Psi = 90°$, dans la table citée, et qu'il est ici égal à 100°. 10′. Les quantités Q, K, F, q sont ici plus grandes, le poids P étant supposé le même. La vîtesse est aussi tant soit peu plus grande; mais la durée est moindre; et le produit $\frac{vtf}{TP}$ est ici $= 0{,}79$, tandis que dans l'autre cas il n'étoit que $= 0{,}70$. Cependant il faut dire que, lorsqu'on veut comparer les cas où l'angle Ψ varie, il faut le faire en supposant que le rapport $\frac{P+Q}{P}$ reste le même. Ce n'est que de cette maniere qu'on pourra juger s'il est plus avantageux de faire l'angle $\Psi = 90°$ ou de le faire plus grand. Pour cet effet il faut remarquer que l'angle Ψ ne varie pas beaucoup. On trouve $\Psi = 90°$, soit qu'on fasse $\sigma = 0$ ou $\sigma = 90$; car en résolvant l'équation [1] de l'art. (1279), on verra que l'un et l'autre cas donne tang. $\Psi = \infty$: quant aux valeurs intermédiaires, M. Lambert a trouvé

Réflexions sur ces applications, et sur les pentes du chemin correspondantes aux directions dans lesquelles on pousse ou tire.

pour sin. $\sigma = \surd(0{,}1)$	$\Psi = 98°.\ 21'.$
$0{,}4$	$99.\ 40.$
$0{,}5$	$100.\ 10.$
$0{,}6$	$99.\ 30.$
$\surd(0{,}5)$	$97.\ 50.$

Or la table de l'art. (1269) est pour le cas de $\Psi = 90°$. Ainsi la différence étant si petite, le produit vtf ne sauroit être fort différent, dès que le rapport $\frac{P+Q}{P}$ reste le même. Ainsi prenant pour ce rapport, la valeur 2,869, telle que nous venons de la trouver, cette valeur, dans la table de l'art. (1269) répondra à sin. $\sigma = 0{,}56$, et le produit $\frac{vtf}{TP}$ correspondant est $= 0{,}79$, c'est-à-dire exactement ou peu s'en faut le même que nous venons de trouver pour $\Psi = 100°.\ 10'$. Cependant, cet angle $\Psi > 90°$ peut mériter la préférence à d'autres égards. Car si, par exemple, l'effort f est employé à traîner un fardeau ou à tirer une charrette, cet angle $> 90°$ aide à vaincre le frottement et à faire monter le fardeau ou la charrette lorsque le chemin n'est pas uni quoique horizontal.

Cas où l'homme est employé à lancer une masse; recherche de la valeur de la force accélératrice qu'il communique à cette masse.

1282. La théorie que nous avons exposée depuis le com-

Digitized by Google

mencement de ce chapitre, et celles développées dans les différentes parties de cet ouvrage, sur-tout art. (487) et suiv. sont très suffisantes pour faciliter l'analyse de tous les cas où l'homme est employé à porter, tirer ou pousser; et le lecteur doit être en état de faire différentes applications particulieres dont le détail nous meneroit trop loin: nous allons passer au cas où l'homme est employé à lancer une masse.

1283. La figure 187 représente un homme lançant une masse M; son bras est supposé se mouvoir dans un plan vertical qui passe l'aisselle A; la distance AM est censée sensiblement invariable, et par conséquent égale à la longueur du bras.

Nommons P un poids équivalent à l'effort dont le bras est capable perpendiculairement à sa longueur AM, cet effort étant rapporté au point M. On peut trouver par expérience la valeur de P, en tenant à la main une corde MB passant sur une poulie B et ayant à son extrémité un poids P. M^r. Lambert dit que, pour des hommes robustes et exercés, cet effort P peut aller à 100 livres et au-delà: il n'a pas trouvé qu'il varie beaucoup lorsque l'angle MAV formé par la direction du bras et par une verticale AV varie. Faisons de plus le poids du bras $= p$, le poids de la masse à lancer $= Q$, l'angle $MAV = \sigma$; la force accélératrice due à la pesanteur $= \varphi$; la hauteur due à la vîtesse finale de $Q = h$.

1284. Tout le système devant tourner autour de l'aisselle A, nous allons d'abord chercher la vîtesse angulaire, d'après la regle de l'art. (423). Pour cela nous considérerons le bas AM comme un cylindre, ou plutôt une ligne pesante. Soit r la distance d'un élément de cette ligne au point A mesurée sur AM, et $a\,dr$ la pesanteur de cet élément, a étant le poids de l'unité de longueur; $ar\,dr$ sin. σ sera le moment du poids $a\,dr$ par rapport au point A. Or, $\int ar\,dr$ sin. $\sigma = \frac{1}{2} ar^2$ sin. σ, qui, prise dans toute l'étendue du bras, est $\frac{1}{2} a\,R^2$ sin. $\sigma = \frac{1}{2} R\,p$ sin. σ, puisque $aR = p$.

Le moment du poids Q est RQ sin. σ, et celui du poids P, qui agit perpendiculairement à la direction du bras, est PR; ainsi la somme des moments sera, en donnant des signes contraires aux puissances qui tendent à faire tourner en sens contraire, $PR - (\frac{1}{2} p + Q)\,R$ sin. σ.

Il faut diviser cette somme des moments par le moment d'inertie; pour cela, la masse du poids élémentaire $a\,dr$ étant $\frac{a}{g}\,dr$, le moment d'inertie du bras sera $\frac{a}{g} \int r^2\,dr = \frac{a}{3g} r^3$ (407), qui

Digitized by Google

prise dans toute l'étendue du bras est $\frac{1}{3}$ R^2 p, en faisant attention que aR $=$ p. Il faut à $\frac{1}{3}$ R^2 p ajouter $\frac{Q}{g}$ R^2 pour avoir le moment d'inertie total; et la vîtesse angulaire ou plutôt la force accélératrice angulaire sera, d'après la regle énoncée art. (423) et toutes réductions faites,

1285. $$\frac{g\left\{P-(\frac{1}{2}p+Q)\sin.\sigma\right\}}{(\frac{1}{3}p+Q)R}.$$

1286. Pour avoir la force accélératrice réelle qui a lieu au point M dans le sens perpendiculaire au bras AM, il faut multiplier l'expression par R. Si ensuite on multiplie le produit par l'élément R$d\sigma$ de l'espace que parcourt le point M, et qu'on divise par g, l'expression résultante sera, d'après ce qui est démontré art. (1216), égale à l'élément dh de la hauteur due à la vîtesse du point M, cette vîtesse étant toujours considérée dans le sens perpendiculaire à AM. On a donc,

$$dh = \frac{P-(\frac{1}{2}p+Q)\sin.\sigma}{\frac{1}{3}p+Q}\,R\,d\sigma.$$

1287. Le poids P peut être considéré comme constant par rapport à σ, d'après ce qui est dit art. (1283); et, d'après cette considération, l'intégrale de l'équation précédente sera,

$$h = \frac{PR\sigma+R(\frac{1}{2}p+Q)\cos.\sigma}{\frac{1}{3}p+Q}+C.$$

Equation qui donne la hauteur due à la vîtesse finale.

Or, le mouvement commençant quelque part, nous ferons $h = 0$ lorsque $\sigma = \omega$, ce qui donne,

1288. $$h = \frac{PR(\sigma-\omega)+R(\frac{1}{2}p+Q)(\cos.\sigma-\cos.\omega)}{\frac{1}{3}p+Q}.$$

Ce que devient cette équation en supposant le bras également éloigné de la verticale au commencement et à la fin de l'action de l'homme sur le corps.

1289. Si on suppose que l'angle initial ω est négatif et égal à l'angle final σ, l'équation précédente devient,

$$h = \frac{PR(\sigma+\omega)}{\frac{1}{3}p+Q}.$$

1290. Supposons, par exemple, que le poids du bras soit de 6 livres $= p$, et celui du corps qu'on jette de 2 livres $=$ Q. Posons la valeur moyenne de P $=$ 32, l'angle $\omega = -20°$, l'angle $\sigma = +20°$, la longueur du bras $=$ 2 pieds $=$ R; et nous aurons,

Application de l'équation qui résulte de cette hypothese.

$h = 16.$ arc $40° = 16 \times 0{,}698 = 11{,}168$ pieds.

Le corps lancé décrira une parabole; la vîtesse de projection due à une hauteur de 11,17 pieds est, d'après la 2e table qu'on trouve à la fin de ce volume, de 27,973 pieds. Ainsi, d'après les

Digitized by Google

formules de l'art. (409), l'angle de projection étant de 20°, le corps s'élevera, au-dessus du point de départ, à une hauteur = 11,168 + sin.² 20 = 1,3064 pieds, et il retournera à la ligne horizontale d'où il est parti à une distance = 2 × 11,168 × sin. 40 = 14,357 pieds; c'est l'amplitude du jet ou la distance horizontale à laquelle le corps est lancé.

Cas où l'on introduit dans la question le frottement et d'autres obstacles semblables.

1291. Nous avons supposé que la force accélératrice P s'exerçoit dans le vide, et qu'elle n'étoit diminuée ni par le frottement ni par aucun autre obstacle d'une nature analogue. Pour avoir égard aux causes de cette sorte qui seroient capables de diminuer P, il faut retrancher du numérateur du 2ᵉ membre de l'équation de l'art. (1286) une quantité équivalente à l'obstacle qui s'oppose à l'action de P. Soit μ cette quantité, l'équation différentielle générale sera,

$$dh = \frac{P - (\frac{1}{2}p + Q)\sin.\sigma - \mu}{\frac{1}{2}p + Q} R\, d\sigma,$$

dont l'intégration dépendra de l'espece et de la forme de la fonction μ.

Nous pourrions faire de nombreuses applications de la théorie exposée dans ce chapitre qui, comme on voit, est très générale; mais les matieres que nous aurons à traiter dans la suite de cet ouvrage, devant nous en fournir plusieurs occasions, nous n'irons pas plus loin dans ce moment. Nous profiterons aussi des circonstances où nous aurons à revenir sur la force de l'homme, pour faire connoître au lecteur ce que différents auteurs, autres que M. Lambert, ont écrit sur cet objet; comme, par exemple, ce qu'on trouve dans la 9ᵉ section de *l'Hydrodynamique* de Daniel Bernoulli, dans le mémoire du même auteur *sur les moyens de suppléer à la mer à l'action du vent*, imprimé dans le *tome* 8 *du Recueil des prix de l'Académie;* dans un mémoire de M. Coulomb sur les moulins à vent, *Mém. de l'Acad. année* 1781, etc. Nous n'oublierons pas la description des moyens imaginés pour appliquer les hommes au mouvement des machines, en employant en même temps le poids du corps et la force des bras de chaque individu : M. l'abbé de V..... est l'inventeur d'un moyen de cette espece qui mérite toute l'attention des mécaniens. Ces objets intéresseront davantage les lecteurs lorsqu'ils seront amenés par des objets de pratique et des questions d'une utilité immédiate.

Analogie des recherches sur la force de l'homme et de celles sur la force des animaux.

De la force des chevaux.

1292. La théorie que nous avons exposée dans le chapitre

Digitized by Google

précédent sur la force de l'homme considéré comme employé à porter ou à traîner, a l'avantage de pouvoir s'appliquer aisément aux chevaux dans les mêmes circonstances. En effet nous avons considéré la masse de l'homme et du fardeau comme concentrée dans son centre de gravité, et mue par les différentes puissances provenant de l'organisation du corps humain; et les formules générales qui dérivent de cette considération peuvents'appliquer à toutes les especes d'animaux employés à porter et traîner : il ne sagit donc que d'intégrer convenablement l'équation de l'art. (1217), lorsqu'on ne croira pas suffisamment exact de l'intégrer comme elle l'a été art. (1221), et d'assigner aux quantités indéterminées P, Q, T, F, etc. les valeurs qu'on trouvera par expérience devoir convenir à chaque espece d'animal.

Défaut de connoissance expérimentale sur cette matiere.

1293. Il faut avouer qu'on ne s'est pas occupé jusqu'ici de ces connoissances expérimentales de maniere à donner des résultats satisfaisants. On a évalué, par quelques expériences, la force absolue du cheval et la relation de cette force avec celle de l'homme; mais on s'est peut-être trop hâté de donner pour généraux des résultats qui ne peuvent avoir leur application que dans des cas particuliers. Nous avons fait voir des exemples d'une pareille méprise (1272) dans l'évaluation du *moment statique* de l'homme; et l'on en peut dire autant du *moment statique* des chevaux dont nous parlerons bientôt : nous allons auparavant rapporter ce que dit M. de Buffon sur la marche du cheval.

Détails sur la marche du cheval.

« 1294. Les quadrupedes marchent ordinairement en portant « à-la-fois en avant, une jambe de devant et une jambe de der- « riere; lorsque la jambe droite de devant part, la jambe gauche « de derriere suit et avance en même temps, et ce pas étant fait, « la jambe gauche de devant part à son tour conjointement avec « la jambe droite de derriere, et ainsi de suite : comme leur « corps porte sur quatre points d'appui qui forment un quarré « long, la maniere la plus commode de se mouvoir est d'en « changer deux à-la-fois en diagonale, de faire que le centre de « gravité du corps de l'animal ne fasse qu'un petit mouvement « et reste toujours à-peu-près dans la direction des deux points « d'appui qui ne sont pas en mouvement dans les trois allures « du cheval, le pas, le trot, et le galop. Cette regle de mouve- « ment s'observe toujours, mais avec des différences; dans le « pas il y a quatre temps dans le mouvement; si la jambe droite « de devant part la premiere, la jambe gauche de derriere suit un « instant après, ensuite la jambe gauche de devant part à son tour

Digitized by Google

« pour être suivie un instant après de la jambe droite de derriere. « Ainsi le pied droit de devant pose à terre le premier, le pied « gauche de derriere pose à terre le second, le pied gauche de de- « vant pose à terre le troisieme, et le pied droit de derriere pose à « terre le dernier; ce qui fait un mouvement à quatre temps et à « trois intervalles, dont le premier et le dernier sont plus courts « que celui du milieu. . . . . Dans le pas, les jambes du che- « val ne se levent qu'à une petite hauteur, et les pieds rasent « la terre d'assez près. . . . . Le pas, pour être bon, doit « être prompt, léger, doux et sûr. . . »

1295. Nous avons omis ce que M. de Buffon dit du trot et du galop, vu que ces deux allures ne sont point celles des chevaux employés à mouvoir des machines, à transporter des fardeaux et à traîner des charrettes; et ce que nous venons de rapporter sur le pas est assez conforme à ce que dit M. Borelli, dans son Traité *de Motu Animalium*, chap. 12 (1).

Du cheval employé à porter des fardeaux.

1296. On peut employer le cheval à porter des fardeaux; mais ce n'est pas le meilleur usage qu'on en puisse faire; s'il s'agit sur-tout de monter une pente un peu roide, on perdra beaucoup sur son moment statique, eu égard au parti qu'on en peut tirer d'ailleurs. M. de la Hire observe (*Mém. de l'Acad. année* 1699) que, s'il sagit de monter un fardeau sur une montagne un peu roide, trois hommes, chargés de 100 livres chacun, la monteront plus vîte et plus facilement qu'un cheval chargé de 300 livres, ce qui vient de la disposition des parties du corps de l'homme qui sont plus propres à monter que celles du cheval.

Si on avoit une suite d'expériences comparatives faites avec différents fardeaux et sur différentes pentes, on pourroit essayer d'établir une loi; mais nous ne savons pas qu'on ait publié de pareilles expériences, et heureusement nous n'en avons pas un grand besoin pour l'objet de cet ouvrage. On sait seulement, en général, qu'un cheval, chargé d'un homme et d'un équipage, le tout pesant environ 200 liv., peut, sans être forcé, parcourir, en 7 ou 8 heures de marche, 20000 toises dans un bon chemin. Il faudroit diminuer le poids ou la longueur du chemin s'il s'agissoit d'une marche qui dût se répéter tous les jours sans discontinuer : mais on ne peut pas fixer avec quelque certitude

(1) Désaguliers qui, dans son Cours de physique, parle du pas du cheval d'après ce qu'en a dit Borelli, critique trop légèrement les sculpteurs anciens et modernes, pour avoir représenté les chevaux avec deux jambes en l'air, diagonalement opposées; cette position est celle du trot, où il n'y a que deux temps dans le mouvement. Voyez *l'Hist. Naturelle de Buffon.*

la valeur moyenne précise du produit de la masse à porter par la vîtesse et le nombre d'heures de marche dans un jour.

De la vîtesse comparative des hommes et des chevaux employés les uns et les autres à porter des fardeaux.

1297. On trouve, dans les Mémoires de l'Académie (an. 1703), des expériences comparatives de M. Amontons sur la vîtesse des hommes et des chevaux, où il porte la vîtese d'un cheval chargé de son homme en allant au petit pas, à 0,875 toises par seconde, et celle d'un cheval portant le même fardeau et allant au grand pas, à 1,4 toises par seconde. Ces vîtesses sont un peu fortes pour des vîtesses moyennes, d'autant plus que la premiere est sensiblement égale à celle de l'homme dans les circonstances mentionnées art. (1238); et que, d'après l'expérience, la marche moyenne de l'homme est plus prompte que celle du cheval allant au petit pas. M. Amontons, au surplus, ne parle pas de la pente du chemin ni du nombre d'heures qu'un cheval pourroit supporter une pareille marche pendant un jour.

Du cheval employé à tirer.

1298. La grande utilité des chevaux se manifeste principalement dans le tirage, et c'est à ce genre de travail qu'on doit principalement les appliquer lorsqu'on veut en tirer le plus grand parti. Un cheval attelé qui fait effort pour tirer, se bande en avant en inclinant les jambes et approchant le poitrail de terre, et cela d'autant plus que l'effort est plus considérable. On voit donc qu'il faut considérer dans le tirage le poids de l'animal et de ce qu'il porte à dos, par une méthode semblable à celle que nous avons suivie lorsque nous avons traité de l'homme tirant ou poussant.

Utilité de la charge à dos pour faciliter le tirage.

1299. Ainsi il est utile de charger à dos jusqu'à un certain point le cheval qui tire; cette méthode paroît, au premier coup-d'œil, augmenter inutilement sa fatigue, toutes choses égales d'ailleurs : mais il faut considérer que, d'après ce que nous venons de dire, la masse dont on le charge verticalement s'ajoute en partie à l'effort qui se fait dans la direction du tirage, dispense ainsi le cheval de s'incliner autant, et peut, sous ce point de vue, le soulager davantage qu'elle ne le fatigue par le poids vertical qu'elle lui fait supporter. Les rouliers et les charretiers ont toujours grand soin de disposer la charge de maniere que le brancard ou le timon presse sur le dos des chevaux qui y sont attelés.

De la meilleure disposition des traits pour le tirage.

1300. La meilleure disposition des traits, pendant le temps que l'effort du tirage a lieu, est d'être parallele au plan sur lequel se fait le tirage, ou d'avoir la même inclinaison que le chemin sur lequel roule la voiture : mais pour que les traits aient une pareille inclinaison pendant l'effort du tirage, il est nécessaire

Digitized by Google

qu'ils soient disposés de maniere à s'éloigner davantage de l'horizontale que la ligne du tirage, lorsque le cheval ne fait point d'effort et que ses jambes sont dans la situation verticale : en effet le poitrail du cheval s'abaissant pendant le tirage, l'extrémité antérieure des traits s'abaisse d'autant, et ils ne peuvent, dans ce dernier état, être paralleles au plan qui porte la voiture, qu'autant qu'ils auroient été primitivement inclinés à ce plan; cette inclinaison peut même être nécessaire pour tenir lieu de la charge à dos, et en même temps pour diminuer le frottement, lorsque le cheval est employé à tirer un traîneau.

C'est d'après ces considérations qu'on pourroit établir quelques regles sur les dimensions des roues, la longueur et la disposition des traits, relativement à l'effort que doivent faire les chevaux et à l'inclinaison que comporte cet effort. Nous ne fatiguerons pas inutilement l'attention de nos lecteurs par l'exposition de la théorie qu'on pourroit en déduire, vu qu'on manque de connoissances expérimentales nécessaires pour en faire l'application, et que, d'après ce qui a été dit dans le chapitre précédent, cette théorie n'a en soi aucune difficulté.

De l'effort qui tend à abattre les chevaux aux changements de pente, et de l'influence de la longueur des traits dans ce cas.

1301. Nous avons annoncé, art. (267), que nous parlerions de l'influence qu'a sur le tirage des chevaux la longueur des traits avec lesquels ils sont attelés; voici le cas que nous avions en vue dans cet article.

Lorsque plusieurs chevaux sont attelés à la suite l'un de l'autre, et que la pente change, comme de DA en AB, *fig.* (188), l'effort du cheval qui tire sur la pente AB se décompose en deux parties, dont l'une tend à faire monter la voiture et l'autre tend à abattre le cheval qui tire près du point A sur la pente DA. Cette derniere composante est d'autant plus grande que le trait est plus long; et il est à propos de trouver sa valeur ainsi que l'augmentation qu'elle éprouve eu égard à l'augmentation de la longueur du trait. Soit EA′ la hauteur au-dessus de AD, du poitrail du cheval qui tire sur la pente DA près du point A; soient ensuite ER et ER′ deux différentes longueurs de trait; le poitrail du cheval attelé à l'un ou l'autre de ces traits seroit à une distance de la ligne AB′, égale à RB = R′B′ = EA′. Prenons EF = EF′ pour représenter l'effort du cheval dans la direction du trait, menons Eq parallele à AD, et tirons la perpendiculaire EQ sur AB′ prolongé en Q, la parallele Eg' à AB′ et les perpendiculaires Fq, F′q' sur Eq. L'effort qui tend à abattre le cheval placé en A est égal à Fq lorsqu'on se sert du trait EF et

à

Digitized by Google

à F′q' lorsqu'on se sert du trait ER′; qE et q'E sont les efforts correspondants qui tendent à faire monter la voiture sur la pente DA.

1302. Faisons EA′ = RB = R′B′ = a; ER = λ; ER′ = λ'; angle A′EQ = angle qEg' = σ; c'est le supplément de l'angle formé par DA et AB′, EF = φ. Lorsqu'on se servira du trait EF, l'effort qui tend à abattre le cheval placé en A, au sommet de la montée DA, sera = φ sin. qEF = φ sin. (qEg' — F′Eg'), et l'effort qui tendra à faire monter la voiture, sera égal à φ cos. (qEg' — FEg').

Pareillement, en se servant du trait ER′, l'effort qui tendra à abattre le cheval placé en A, sera φ sin. (qEg' — F′Eg'), et l'effort qui tendra à faire monter la voiture, sera φ cos. (qEg' — F′Eg).

1303. On a sin. FEg = $\frac{Rg}{ER}$ et sin. F′Eg' = $\frac{R'g'}{ER'}$ = $\frac{Rg}{ER'}$. Mais Rg = BR — EQ = a — a cos. σ = a (1 — cos. σ): substituant cette valeur dans les équations précédentes, faisant attention que les angles FEg', F′Eg' sont toujours assez petits pour que, dans de pareils angles, les arcs different peu des sinus, il vient FEg = $\frac{a(1-\cos.\sigma)}{\lambda}$ et F′Eg' = $\frac{a(1-\cos.\sigma)}{\lambda'}$; ces valeurs, substituées dans les expressions de l'article précédent, donnent,

$$Fq = \varphi \text{ sin. } \left(\sigma - \frac{a(1-\cos.\sigma)}{\lambda}\right) \cdots [1].$$

$$F'q' = \varphi \text{ sin. } \left(\sigma - \frac{a(1-\cos.\sigma)}{\lambda'}\right) \cdots [2].$$

$$Eq = \varphi \text{ cos. } \left(\sigma - \frac{a(1-\cos.\sigma)}{\lambda}\right) \cdots [3].$$

$$Eq' = \varphi \text{ cos. } \left(\sigma - \frac{a(1-\cos.\sigma)}{\lambda'}\right) \cdots [4].$$

Application des équations résultantes des recherches précédentes.

1304. Supposons AB horizontal, et la pente AD de $\frac{1}{8}$; cette pente est trop forte pour des routes pavées, mais elle peut avoir lieu dans des rampes pratiquées pour l'exploitation des carrieres et pour d'autres objets. L'angle σ sera de 9°. 28′, qui, exprimés en parties décimales du rayon, donnent σ = 0,16522, et cos. σ = 0,98638: faisons l'effort φ = 200 liv., et soient de plus a = 3 $\frac{1}{2}$ pieds, γ = 8 pieds, λ 12 pieds; on aura,

$$[1] \cdots Fq' = 200 \text{ sin. } \left\{0{,}16522 - \frac{3{,}5(1-0{,}98638)}{8}\right\} =$$
$$200 \text{ sin. } 9°.\,7'\,29'' = 31{,}716 \text{ livres.}$$

[2]. . . . . $F'q' = 200 \sin. \left\{ 0{,}16522 - \frac{3{,}5\,(1 - 0{,}98638)}{12} \right\} =$
$200 \sin. 9^\circ. 14'. 19'' = 32{,}250$ livres.

[3]. . . . . $Eq = 200 \cos. 9^\circ. 7'. 29'' = 197{,}470.$

[4]. . . . . $Eq' = 200 \cos. 9^\circ. 14' 29'' = 197{,}404.$

On voit que le cheval, placé en A, tend à être abattu avec un poids d'environ 32 livres : ce poids est petit pour un cheval qui n'est pas fatigué; mais il faut considérer qu'au haut d'une montée roide, l'animal affoibli, peut céder à une petite augmentation d'effort. Un alongement de quatre pieds sur un trait de 8 pieds produit une augmentation de 32,25 — 31,716 = 0,534 liv. dans l'effort qui tend à abattre le cheval, et une diminution de 197,47 — 197,404, dans l'effort qui tire la voiture : ces quantités ne sont pas considérables; mais il étoit bon d'avoir une méthode par laquelle on pût se rendre compte de l'influence qu'elles ont sur le tirage. Le lecteur pourra, s'il le veut, consulter un Mémoire de M. Couplet sur le tirage des charrettes et des traîneaux, inséré dans le vol. de l'Acad. de l'année 1733; mais ce mémoire ne nous paroît pas pouvoir être d'une grande utilité dans la pratique.

Du cheval qui tire en parcourant la circonférence d'un cercle; avantage qu'on obtient en donnant au cercle le plus grand rayon possible.

1305. Lorsqu'on fait mouvoir un cheval dans un espace circulaire, comme cela se pratique dans les moulins et les autres machines mues par les chevaux, il faut donner au cercle que l'animal a à parcourir le plus grand diametre que pourront comporter le local et les différentes conditions auxquelles on est obligé de s'assujettir. On conçoit d'abord que le mouvement rectiligne étant le plus aisé pour le cheval, moins la ligne qu'il parcourt aura de courbure, et plus il se mouvra avec facilité; d'un autre côté, à égale vîtesse, la force centrifuge est moindre dans un grand cercle, ce qui diminue le frottement de la partie cylindrique des tourillons et la fatigue de la machine. Soit BD (*fig.* 189) le plan d'un manege et *nm* la direction de la ligne de traction, qu'on suppose en même temps être la corde sous-tendue par le cheval sur la circonférence du manege; on peut faire tourner l'axe A, ou par le moyen d'une barre A*n*, ou par le moyen d'une barre AB, perpendiculaire à *nm*. Dans l'un et l'autre cas, le bras de levier de la portion de l'effort du cheval employée à faire équilibre à l'effort de la résistance est AL, ou $\sqrt{(AB^2 - \overline{nL}^2)}$; et faisant cet effort $= f$; le rayon $AB = r$; la demi-corde $nL = n'l = b$; le moment de l'ef-

Digitized by Google

fort sera $f\,(r^2 - b^2)^{\frac{1}{2}}$. Maintenant, dans un manege $n'm'D'$, dont le rayon sera le $\frac{1}{n}$ du rayon r, l'effort étant f', le moment de cet effort seroit $f'\left(\frac{r^2}{n^2} - b^2\right)^{\frac{1}{2}}$. Le moment de l'effort de la résistance étant supposé le même dans les deux cas, on aura, $f(r^2 - b^2)^{\frac{1}{2}} = f'\left(\frac{r^2}{n^2} = b^2\right)^{\frac{1}{2}}$, d'où on tire $\frac{f}{f'} = n\,\frac{(r^2 - b^2)^{\frac{1}{2}}}{(r^2 - n^2 b^2)^{\frac{1}{2}}}$; on voit par là que n étant plus grand que l'unité, $\frac{(r^2 - b^2)^{\frac{1}{2}}}{(r^2 - n^2 b^2)^{\frac{1}{2}}}$ sera aussi plus grand que l'unité, et qu'on aura $\frac{f}{f'} > n$ ou $\frac{f}{f'} > \frac{AB}{Ab}$. Ensuite, pour en venir à notre objet, nous observerons qu'il faut ajouter aux efforts f et f' employés à faire équilibre à l'effort de la résistance ceux qui sont consommés par des obstacles dépendants du mouvement circulaire; on peut représenter ces obstacles par $\frac{k}{(AL)^\mu}$ dans le grand manege, et par $\frac{k}{(Al)^\mu}$ dans le petit; k et μ étant deux constantes. Le centre de gravité de la masse du cheval étant supposé en L et l, la vîtesse de ce centre sera représentée par $\frac{v \times AL}{t}$ et $\frac{v' \times Al}{t}$, v et v' étant deux constantes et t le temps, et les moments statiques qui représentent dans chaque cas le travail du cheval seront, $\frac{v \times AL}{t}\left(f + \frac{K}{(AL)^\mu}\right)$ et $\frac{v' \times Al}{t}\left(f' + \frac{K}{(Al)^\mu}\right)$: or, l'effet étant constant, la derniere de ces expressions sera plus grande que la premiere, puisqu'on aura $\frac{v \times AL}{t} f = \frac{v' \times Al}{t} f'$, et que $\frac{K}{(Al)^\mu} > \frac{K}{(AL)^\mu}$.

1306. Il est aisé de voir que l'expression variable du moment statique qu'on vient de donner n'est point en contradiction avec le 2e principe général de l'art. (493).

De l'effort qu'un cheval peut faire journellement pendant un certain nombre d'heures. Il seroit à desirer qu'on fît de nouvelles expériences sur cet objet.

1307. On a trouvé qu'un cheval, employé journellement à tirer, pouvoit faire, pendant 8 heures de la journée, un effort de 200 livres avec une vîtesse d'environ $3\frac{1}{2}$ pieds par seconde. Si on augmente cet effort jusqu'à 240 livres, le cheval ne pourra travailler que 6 heures avec une moindre vîtesse. M. Sauveur évalue l'effort moyen d'un cheval à 175 livres avec une vîtesse de 3 pieds par seconde : cet effort doit, d'après les notions que nous avons si souvent développées, être représenté par celui que feroit un cheval pour tirer une corde passant sur une poulie à l'extrémité de laquelle seroit suspendu un poids. Au reste les résultats des différentes expériences qu'on peut faire doivent être sujets à bien des variations, par des raisons semblables à celles que nous avons données art. (1272). Il en est de

Digitized by Google

même de la comparaison de la force des hommes avec celle des chevaux. Désaguillers a trouvé, en Angleterre, qu'un cheval équivaloit à cinq hommes. Les auteurs françois comptent ordinairement 7 hommes pour un cheval. Cette différence peut venir de celle des hommes, mais elle tient beaucoup à la maniere dont les expériences ont été faites. Il seroit à desirer qu'on en répétât de nouvelles, où l'on tiendroit compte de toutes les circonstances propres à influer sur le tirage, et dont le chapitre précédent et celui-ci offrent le développement.

De l'emploi du poids du cheval pour mouvoir les machines.

1308. On a voulu essayer de tirer parti du poids du cheval pour mouvoir des machines, comme on tire parti du poids des hommes qui marchent dans des roues à tympan; mais le peu de vîtesse qui a résulté de cette maniere d'employer les chevaux, a empêché, dans les expériences qu'on a faites à notre connoissance, que l'effet ne répondît au poids considérable qui servoit de moteur. Il seroit bien important que des hommes instruits et zélés s'occupassent à faire beaucoup d'épreuves sur tous les objets traités dans ce chapitre et dans le précédent.

Du fluide élastique produit par l'eau réduite en vapeur, et de l'application de ce fluide au mouvement des machines.

Raisons qui ont engagé à renvoyer à ce chapitre; les recherches sur l'action de l'eau réduite en vapeur.

1309. Nous avons dit, art. (627, *note*), que l'eau échauffée au-delà du 80e degré du thermometre de Réaumur, se maintenoit sous la forme d'un *gas* ou fluide aériforme très élastique, au moins 800 fois plus rare que l'air ordinaire, le barometre étant à 28 pouces de hauteur; que ce gas, qui produisoit, par son dégagement, l'ébullition de l'eau échauffée, étoit le plus puissant moteur qu'on pût appliquer aux machines (1); et nous avons annoncé, dans la note citée ainsi que dans celle de l'art. (526) et dans l'art. (527), que nous traiterions de l'eau réduite en vapeur

(1) C'est également par la dilatation instantanée du gas aqueux et des autres fluides aériformes que la nature produit dans son sein ces mouvements dont les effets sont si puissants et si prompts; telles sont les explosions et les éruptions volcaniques, ainsi sans doute que les tremblements de terre, lesquels sont toujours plus ou moins l'effet ou la suite d'une commotion donnée par les volcans. De cette dilatation dépendent aussi les vents et les ouragants, ainsi que toutes les observations de la physique moderne paroissent le démontrer. Il paroît que le gas aqueux, ou l'eau réduite en vapeur, est si essentiellement nécessaire pour produire des éruptions volcaniques, que les naturalistes ont observé constamment, 1°. que tous les crateres, dans chaque explosion, vomissent toujours une certaine quantité d'eau plus ou moins grande, échauffée au moins au degré de l'eau bouillante; 2°. que les volcans se trouvent toujours dans le voisinage des mers; 3°. enfin que ces bouches à feu s'éteignent à mesure que les mers, en se retirant, ne fournissent plus d'aliment à leur activité.

avec les détails convenables. Comme les recherches qui y sont relatives sont entièrement fondées sur la physique, nous avons voulu éviter de couper, par leur exposition, le cours des matieres renfermées dans les sections qui traitent de la théorie mathématique et expérimentale des fluides, afin de ne point déranger l'analogie des idées que nous présentions successivement au lecteur, et de fixer davantage l'attention et l'intérêt, en isolant et classant les différents objets d'étude.

Détails qu'il contient sur le mécanisme des machines à feu.

1310. L'explication de la maniere dont l'eau, réduite en vapeur, s'applique au mouvement des machines, exige que nous entrions d'avance dans quelques détails sur le mécanisme des machines à feu : mais ces détails ne doivent être considérés que comme des notions préliminaires destinées à préparer l'intelligence des parties subséquentes de cet ouvrage, où nous traiterons d'une maniere complete du mécanisme et de tout ce qui a rapport aux différentes especes de machines à feu. C'est ainsi que ce que nous avons dit art. (654 et suiv.) sur les pompes ordinaires et sur les machines à élever l'eau en général, ne doit être considéré que comme une préparation au traité entier des machines à élever l'eau, qui entrera dans la partie descriptive de cette nouvelle Architecture Hydraulique.

Des découvertes modernes sur la physique du feu; de la *lumiere*, du *calorique* et de leurs différences.

1311. Avant de parler des phénomenes relatifs à la vaporisation de l'eau, nous allons d'abord jeter un coup-d'œil général sur l'ensemble de la théorie qui contient l'explication de ces phénomenes et de plusieurs autres. Cette théorie, entièrement due aux découvertes modernes, est très bien exposée dans l'excellent Traité de Chymie de M. de Lavoisier, où nous puiserons, en même temps le langage précis qui exclut toute équivoque tant de l'énonciation des causes que de l'explication des effets.

Lorsque les anciens physiciens considéroient certains effets naturels que nous avons de fréquentes occasions d'observer, tels que la sensation de la lumiere, la combustion, l'ébullition, la fermentation qui a lieu dans certaines circonstances, l'évaporation, etc., ils les attribuoient communément, et d'une maniere vague, à l'action du feu ou matiere ignée. Mais les progrès de la science, et la découverte de plusieurs faits que ces physiciens, ou ne connoissoient pas, ou sur lesquels ils n'avoient pas assez médité, ont exigé un langage plus précis. On a remarqué que, dans bien des circonstances, il y avoit chaleur et combustion sans dégagement de lumiere; que, dans d'autres, il y avoit lumiere sans combustion ni chaleur; et on a conclu de l'isolement et de la différence de ces effets, qu'ils

Digitized by Google

pouvoient avoir des causes différentes qu'on ne devoit pas ranger sous la même dénomination. Ainsi on a nommé *lumiere* la cause, quelle qu'elle soit, de la sensation que produit en nous le corps lumineux, et *calorique*, la cause, quelle qu'elle soit pareillement, de la chaleur et des phénomenes qui s'y rapportent (*). On n'oseroit pas encore assurer positivement que des découvertes postérieures ne nous apprennent que la lumiere et le calorique sont la même chose, et ne nous fassent connoître en quoi consiste la différence apparente de leurs effets; mais il n'en est pas moins sage et avantageux de ne rien supposer au-delà de ce que l'état actuel des choses nous présente, et de mettre, dans le langage savant, des nuances qu'on pourra toujours faire disparoître quand le progrès des connoissances l'exigera.

Le calorique est un fluide éminemment élastique. Comment ses combinaisons avec différents corps expliquent des phénomenes qu'on n'avoit point encore expliqués.

1312. Nous n'avons, dans l'article précédent, considéré la lumiere et le calorique que comme *causes*, dans l'acceptation abstraite ou métaphysique; mais on rend assez bien raison des phénomenes, en regardant le calorique comme un être matériel, un corps éminemment fluide et élastique, dans lequel tous les corps de la nature sont plongés, qui remplit l'intervalle que laissent entre elles les molécules de ces corps, se fixe quelquefois de maniere à constituer leurs parties solides, a avec eux des affinités plus ou moins grandes, desquelles résultent des combinaisons, des décompositions, des dégagements d'une nature absolument analogue à celle des phénomenes semblables que les chymistes ont de tout temps observés et produits entre les différents corps (1). Ce système, si toutefois c'en est un, met dans le rang des effets les plus ordinaires et les plus connus, d'autres effets qu'on plaçoit dans une classe entièrement différente, et dont l'explication se déduisoit d'hypotheses, très ingénieuses à la vérité, soutenues encore par quelques personnes d'un grand mérite, mais que bientôt le monde savant placera à côté des qualités occultes de l'école péripatéticienne (2). Ainsi tous les effets de la

(*) Voyez la note (3) de l'art. (1312).

(1) La lumiere jouit de propriétés semblables; on sait qu'elle a une grande affinité avec celui des éléments de l'air que nous avons nommé *oxygene*, art. (627 *note*), qu'elle se combine avec lui, et qu'elle contribue avec le calorique à le constituer dans l'état de gas: c'est par cette force d'affinité que la lumiere dégage et réduit à l'état de gas cette grande quantité d'oxygene, combinée dans les parties vertes des plantes, ainsi que l'ont prouvé les expériences de MM. Priestley, Sennebier et Ingenhouz: en maintenant ce même oxygene à différents degrés de densité dans les parties diverses du végétal, il devient le principe de sa coloration. Voyez l'ouvrage intitulé: *Considérations sur la Chymie des végétaux*, par M. Riche, *page* 82 *et suiv.* et *page* 118 *et suiv.*

(2) Il est peu de lecteurs qui ne connoissent, ou par eux-mêmes, ou par ouï-dire, la fameuse théorie du *phlogistique*, au moyen de laquelle on a expliqué jusqu'à ces derniers

Digitized by Google

combustion n'offrent à présent aux chymistes que des dégagements et des combinaisons chymiques qu'on peut suivre dans tous leurs détails (3). Le calorique combiné, c'est-à-dire uni à

---

temps, les phénomenes de la combustion, de la calcination, etc. Cette théorie, inventée par Bécher, chymiste, né à Spire en 1645, et mort à Londres en 1685, a été attribuée à Stalh, son disciple. Bécher appelloit *soufre* ce que Stalh appelloit *phlogistique*, et ce dernier mot, ayant prevalu a laissé la gloire de l'invention à celui qui n'avoit fait que représenter la même idée par un signe différent.

(3) La combustion résulte de la combinaison de l'air pur avec une matiere combustible, par l'intermede du calorique. Cette combinaison est prouvée dans ces circonstances; 1° par la nécessité absolue de l'air pur dans toute combustion; 2° par son absorption; 3° par les derniers produits de cette opération, qui sont toujours de l'eau, un acide, une chaux métallique, ou toute autre combinaison résultante de l'union de l'air avec le corps mis à brûler. La lumiere et le calorique qui deviennent libres par la combustion, sont dégagés de l'air pur, et peut-être en partie de la matiere combustible par une affinité double.

L'auteur des *Considérations sur la Chymie des Végétaux* a observé que la nature emploie l'action de la lumiere et du calorique pour ramener à l'état gaseux l'air pur fixé dans les corps. Il paroît que ce phénomene ne peut être attribué qu'à la combinaison des principes lumineux et calorifiques, avec le principe oxygene. On connoît, par là, d'où proviennent, au moins en grande partie, le calorique et la lumiere qui se dégagent lorsque la lumiere se fixe de nouveau dans les corps par l'acte de la combustion. Ces faits présentent en même temps de grandes analogies entre le calorique et la lumiere; cependant on peut observer plusieurs caracteres qui distinguent ces deux substances. La lumiere paroît être composée de parties homogenes : chaque rayon jouit d'une maniere plus ou moins énergique des propriétés physiques et chymiques de tous les autres; mais leurs différentes densités établissent entre eux différents degrés de ressort et de réfrangibilité d'où résultent autant de sortes de couleurs pour l'organe de la vue, qui n'est, ainsi que l'ouie, qu'une modification de l'organe du tact, lequel ne peut percevoir que les propriétés tangibles des corps, tels que la dureté, le volume, la roideur, etc. Le calorique, au contraire, paroît se faire sentir par une action qui affecte de la même maniere toutes les parties avec lesquelles il est en contact : il est perceptible à tous nos sens, où il ne se fait reconnoître que par un état de spasme et d'atonie qu'il y établit en les pénétrant. La lumiere est assujettie, ainsi que Newton l'a demontré, à toutes les loix de l'attraction : la propriété caractéristique du calorique paroît consister au contraire dans cette action par laquelle il contre-balance continuellement la puissance attractive; non-seulement il n'est point sujet aux loix de la pesanteur (et il paroît résulter de quelques expériences nouvelles que son addition allege les corps), mais c'est même de son action répulsive qui agit dans une direction opposée à celle de l'attraction, que nait sans doute le principe de mouvement universel établi dans la matiere. C'est ainsi que, de la destruction de la force de la cohésion et d'attraction par le calorique, résulte la fluidité des solides, la dilatation des fluides, et, dans le dernier état d'expansion des uns et des autres, leur sublimation et leur volatilisation, qui peut avoir lieu dans le vide par la seule action répulsive du calorique, suivant les expériences des académies *del cimento*, de *Stockholm* et plusieurs autres. Voilà ce qui explique, au moins en partie, pourquoi l'évaporation des fluides s'opere à un degré de chaleur d'autant moindre, qu'ils sont plus éloignés du centre de la terre ou du centre d'attraction; c'est par la même raison que les forces d'affinités sont plus energiques sur les hautes montagnes, parceque la force d'attraction y est moindre de là vient encore que la volatilisation d'un corps, par la même chaleur, n'est pas toujours en raison de sa pesanteur, mais en raison de la cohésion de ses parties; le mercure se volatilise à un degré de chaleur beaucoup moindre qu'un corps solide plus léger que lui, tel que le fer.

On pourroit aussi deduire un caractere distinctif entre la lumiere et le calorique, de ce que ce dernier ne peut jamais être substitué complètement à la lumiere dans la végétation des plantes : à quelque température qu'on les tienne, elles cessent de croître et périssent dès qu'elles se trouvent dans l'obscurité. De là vient que, dans leur accroissement, elles se dirigent toujours vers la lumiere. C'est à cette attraction que la lumiere exerce sur

Digitized by Google

un corps, peut le quitter pour s'unir à un autre corps avec lequel il a plus d'affinité; il peut aussi se dégager et devenir libre, et

---

les plantes, qu'il faut attribuer leur direction verticale lorsqu'elles croissent à l'air libre, puisque lorsque la lumiere leur vient de côté, elles se dévient toujours d'autant de la verticale. M. l'abbé Teissier a observé que les plantes qui pouvoient jouir de la lumiere solaire directe, s'inclinoient vers les miroirs qui la réfléchissoient ou vers la lumière d'une chandelle, végétoient et se coloroient plus ou moins, suivant l'intensité des rayons lumineux qui parvenoient à elles, et enfin se décoloroient complètement et périssoient dans une nuit absolue. Voilà pourquoi Bécher, maître de Stalh, dont nous avons parlé dans la 2e note de l'art. (1312), avoit cru (*Traité de l'Immortalité de l'Ame*), d'après des expériences analogues sur la nécessité indispensable de la lumiere pour la végétation, que les plantes se nourrissoient de lumiere. Cette erreur, qui est celle d'un homme de génie, étoit une conséquence nécessaire de ses expériences, dans un temps où l'on ne soupçonnoit pas l'existence des fluides élastiques autres que l'air.

Le calorique étant susceptible de se combiner avec les corps, les maintient alors, d'après la propriété répulsive que nous avons fait connoître en lui, dans un état fixe d'expansion plus ou moins considérable, tel que l'état gaseux. Nous observerons, par occasion, que ces combinaisons fixes, et bien d'autres phénomenes prouvent que le principe calorique est un corps, et non pas un simple mouvement communiqué, qui ne pourroit produire qu'une dilatation passagere.

Une autre propriété du calorique qui résulte de sa force expansive, c'est celle par laquelle il favorise l'affinité, c'est-à-dire la combinaison des principes hétérogenes, en détruisant l'attraction des parties intégrantes qui s'opposoit à cette combinaison. De là vient que le calorique favorise toutes les combinaisons, et qu'un grand nombre de substances ne peuvent se combiner qu'à l'aide d'un degré de chaleur déterminé; et souvent même à ce degré l'ordre des affinités s'intervertit. On voit ici encore que le calorique produisant des effets contraires, sur l'attraction qu'il détruit, et sur l'affinité qu'il favorise, on doit distinguer l'attraction de l'affinité : cependant quelques chymistes ont confondu ces deux moyens de la nature.

Il suit, des propriétés que nous venons d'établir, que la combinaison de l'air pur avec les parties de la matiere combustible, c'est-à-dire le développement de la combustion résulte de la destruction d'attraction entre les parties intégrantes de l'air pur gaseux et entre celles de la matiere combustible en contact; destruction d'attraction produite par l'action du calorique libre qui y est appliqué. En effet le calorique étant, comme on l'a prouvé, dans un véritable état de combinaison avec l'air pur gaseux, et avec la matiere en combustion, supposons que, dans une masse totale d'air pur et de matiere combustible en contact, il y ait deux parties de calorique combiné ou latent, et qu'on leur ajoute une partie du calorique libre suffisante pour détruire la cohésion des parties intégrantes de la masse et déterminer la combinaison de l'air pur et de la matiere en contact, c'est-à-dire la combustion; dans cette opération, deux parties de calorique latent ou combiné seront précipitées et unies à la partie du calorique libre, qui avoit été appliquée pour déterminer l'embrasement, et qui n'a point été détruite dans l'opération; ainsi, à l'instant du premier instant de la combustion, il y aura trois parties de calorique libre. Ces parties agiront pendant le deuxieme instant en raison de leur somme; chacune d'elles occasionnera la précipitation de deux parties de calorique d'une maniere semblable à celle qu'on vient d'expliquer pour l'éternelle primitive; il se dégagera donc, pendant le deuxieme instant de la combustion, 6 parties de calorique, qui, jointes aux trois parties qui ont produit ce dégagement, formeront, au commencement du troisieme instant, neuf parties de calorique libre. Ces neuf parties occasionneront, pendant la durée du troisieme instant, la précipitation de 18 autres; et il y en aura 27 de libres au commencement du quatrieme instant, et ainsi de suite, comme on voit par la table suivante :

ce

Digitized by Google

ce dégagement produit la chaleur des corps en combustion (1), qui n'est jamais sensible à la vue, etc.

Instant de la combustion.	Nombre de parties de calorique libre au commencement de chacun des instants ci-à-côté.	Nombre de parties de calorique latent, rendues libres pendant la durée de chacun des instants ci-à-côté.
1.	1.	 2
2.	3.	 6
3.	9.	 18
4.	27.	 54
5.	81.	 162
6.	243.	 486
etc.	etc.	etc.
n	$3^{n-1}+1$	$2\times 3^{n-1}+2$

Ainsi, au commencement du n^e instant, le nombre des parties du calorique libre, ou qui doivent opérer la combustion pendant l'instant suivant, est égal à $3^{n-1}+1$, et le nombre des parties dégagées pendant la durée de cet instant, est égal à $2\times 3^{n-1}+2$. Cette progression peut donner une idée de la rapidité des embrasements; puisqu'en supposant chaque partie de calorique rendue libre, égale à celle qui a produit le dégagement, et supposant la durée de ce dégagement d'une seconde, une petite étincelle peut, pendant une minute ou 60 secondes, rendre libre un nombre d'étincelles semblables égal à 3 élevé à la soixantieme puissance, c'est-à-dire un nombre entier de 29 chiffres, dont les cinq premiers sont 42390.

Les parties de calorique dégagées ou rendues libres, peuvent être plus ou moins considérables que les parties qui ont produit ce dégagement, et c'est ce qui détermine la plus ou moins grande rapidité de l'embrasement. Dans les circonstances les plus favorables à la combustion, il y a inflammation explosive; dans d'autres cas, la rapidité de la combustion doit souffrir un déchet considérable, par l'impureté de l'air atmosphérique, par le mélange des substances incombustibles dans le corps qui brûle, par sa densité ou son peu d'affinité avec l'oxigene, comme dans la combustion des métaux, par sa situation par rapport à la direction ascensionnelle du calorique et de la flamme enfin, par la déperdition du calorique que peuvent occasionner la communication ou une évaporation trop considérable; tel est le cas où l'air agite trop violemment une flamme et produit l'extinction. Voyez *les Considérations sur la Chymie des Végétaux, par M. Riche.*

(1) C'est d'après un préjugé généralement répandu dans tous les ouvrages de chymie, que l'on croit que la flamme des substances en combustion n'est qu'un mélange de lumiere et de calorique pur dégagée de ces substances. Mais en réfléchissant un peu sur ce phénomene, on verra que la flamme n'est que la combustion particuliere et isolée des matieres volatiles que la chaleur du corps brûlé en fait dégager. On peut remarquer que, parmi les matieres susceptibles de combustion, il n'y a que celles qui ont quelques principes volatils au degré ordinaire de chaleur de nos foyers, qui donnent de la flamme; de cette espece sont les huiles, les graisses, les résines, le bois; par son principe huileux et résineux; et parmi les substances minérales, le zinc, l'arsenic, le soufre, les bitumes. Le charbon et tous les métaux dont les principes sont beaucoup plus fixes, ne donnent de la flamme que lorsque leur combustion étant très vive, le calorique, en s'accumulant, peut par là volatiliser une partie de ces principes, et c'est ce qui a lieu lorsqu'on brûle du fer dans de l'air pur. Avec un peu d'adresse on peut facilement s'assurer que la seule combustion de la fumée produit la flamme. Pour cela il faut placer un anneau de métal autour de la base de la flamme qui se produit à l'extrémité d'une meche allumée; alors le contact de l'air n'ayant pas

Digitized by Google

On a fait des expériences pour mesurer la quantité de calorique qui se dégage des différents corps pendant leur combustion; voyez l'ouvrage cité dans l'article précédent.

1313. Chaque corps est, suivant sa nature susceptible de contenir, sous un volume donné de ce corps, une plus ou moins grande quantité de calorique; les physiciens anglois ont désigné cette propriété par *capacité des corps pour contenir la matiere de la chaleur*. Ce sont, selon M. de Lavoisier, les premiers qui ont eu des notions exactes à cet égard. Ce savant nomme *calorique spécifique*, la quantité de calorique respectivement nécessaire pour élever d'un même nombre de degrés la température de plusieurs corps égaux en poids.

Comment le calorique réduit les différents corps en *gas* ou fluides aériformes.

1314. Les substances volatilisées et réduites en *gas* ou fluides aériformes, ne sont autre chose que des corps solides ou liquides ordinaires qui, par quelque circonstance, se trouvent surabondamment combinées avec du calorique, de telle maniere que les particules constitutives de ces corps sont séparées les unes des autres par une quantité de calorique ambiant beaucoup plus considérable que celle qui environne les mêmes particules dans l'état naturel du corps. L'élasticité extrême du calorique, dont l'effet est augmenté par la condensation de ce fluide, et l'affoiblissement de l'attraction réciproque ou de la cohésion des particules du corps, affoiblissement produit par l'éloignement de ces particules; ces deux causes, disons-nous, concourent à diminuer la densité du corps de telle sorte qu'il est réduit à l'état aériforme.

L'élasticité du calorique produit en plus grande partie celle des gas.

1315. Quant à l'élasticité des gas ainsi formés, il y a tout lieu de croire qu'elle est produite, au moins en grande partie, par l'élasticité du calorique lui-même, qui, lorsque les corps sont ré-

---

lieu dans cette partie, on verra la fumée se dégageant de la meche, et produisant de la flamme par sa combustion au-dessus de l'anneau.

Voici une autre expérience qui prouve que la flamme n'est que le produit de la combustion de la fumée. Si on plonge lentement une meche allumée dans un gas incombustible, alors la flamme reste quelques instants à la surface du gas, et séparée de la meche tant que celle-ci conserve un degré de chaleur suffisant pour volatiliser une partie des vapeurs combustibles qui alimentent la flamme.

La fumée et les autres principes qui, en se volatilisant, produisent la flamme, se mélangeant avec une très grande quantité d'air, éprouvent une combustion presque complette et aussi rapide qu'elle peut l'être, car en faisant passer un courant d'air pur à travers une flamme, sans le diriger sur la matiere qui brûle, il n'en augmente que très peu l'intensité, et c'est une erreur de croire qu'un jet de ce gas puisse être préférable pour souffler la lampe d'émailleur, à un jet de gas aqueux par l'éolipile ou de tous autre gas qui, dans ce cas, ne sont que des moyens purement mécaniques pour déterminer la direction et l'action de la flamme sur un point déterminé. *Note de l'auteur des Considérations sur la Chymie des Végétaux*, ci-dessus citées.

duits à l'état gaseux, occupe une très grande partie de leur volume.

Opposition continuelle entre l'effort expansif du calorique et l'effort aggrégatif de la cohésion, effets de cette opposition.

1316. Cette éminente élasticité du calorique tend continuellement à le faire entrer en expansion; d'un autre côté ce fluide, par une destination particuliere de la nature, est, comme on a vu, plus ou moins disséminé entre les molécules de tous les corps, de telle maniere qu'on peut dire avec M. Lavoisier que, même dans l'état solide, ces molécules ne se touchent pas, mais nagent dans le calorique à une certaine distance l'une de l'autre. Il doit donc y avoir un combat perpétuel entre la force expansive du calorique qui tend à disséminer les molécules, et l'attraction ou la cohésion des molécules qui tend à les rassembler. C'est de l'intensité réciproque de ces deux puissances que résulte l'état solide ou liquide des corps : ainsi l'eau ne differe de la glace que par la plus ou moins grande condensation du calorique qui permet plus ou moins aux molécules de ce liquide de céder à l'effet de leur attraction ou cohésion réciproque.

Le calorique n'a a surmonter dans les substances liquides que la pression de l'atmosphere, ou d'un fluide élastique quelconque.

1317. Lorsque les substances passent de l'état liquide à l'état aériforme, il y a une troisieme puissance à combiner avec l'effort expansif du calorique et l'effort aggrégatif ou attractif des molécules (1); savoir la pression de l'atmosphere ou d'un fluide élastique quelconque qui comprimeroit le fluide, et s'opposeroit à l'écartement ou dissemination de ses parties. Cette troisieme puissance influe certainement aussi sur le passage de l'état solide à l'état liquide; mais elle est le plus souvent très petite, et même négligeable, en comparaison de la résistance provenant de la cohésion des molécules entre elles. L'effet contraire a lieu lorsqu'il s'agit du passage de l'état liquide à l'état de gas ou fluide aériforme; la cohésion des molécules fluides étant extrêmement petite, l'élasticité du calorique n'a, pour ainsi dire, à surmonter que la pression de l'atmosphere ou gas quelconque qui comprime le liquide à volatiliser.

(1) Toute substance qui passe de l'état liquide à l'état gaseux produit du froid thermométrique, en se combinant et en absorbant le calorique des corps environnants. Les physiciens modernes ont établi un principe déduit d'une multitude infinie d'expériences, et qui se prouve par presque toutes les opérations chymiques, c'est que tout corps qui passe d'un état plus dense à un état plus rare, produit du froid, et que tout corps qui passe d'un état plus rare à un état plus dense, dégage du calorique. Dans le premier cas, le calorique libre ou thermométrique devient latent ou combiné, et dans le deuxieme cas, le calorique combiné devient thermométrique ou sensible; car il faut assimiler le calorique à tout autre corps qui, étant combiné avec une base, perd sa force active sur toute autre substance qui n'auroit pas avec lui une affinité supérieure. Ce double phénomene conduit naturellement à conclure que tous les degrés de densité de la matiere en général ne sont dus, au moins originairement, qu'aux quantités de calorique combiné dans les corps.

Digitized by Google

Conséquence de la proposition précédente; expériences de MM. Lavoisier et de Luc, à l'appui de cette conséquence.

1318. Il résulte de ce qu'on vient de dire, qu'un même liquide, sous des pressions différentes, doit se volatiliser à des températures différentes. M. Lavoisier a prouvé, par une belle expérience, la vérité de ce résultat, en plaçant de l'éther sous le récipient d'une machine pneumatique, et faisant volatiliser ce liquide par la seule soustraction d'une partie de la pression de l'atmosphere. *Voyez sa Chymie, tome I, page* 9. On savoit d'ailleurs, par différentes expériences, que l'eau entre d'autant plus vîte en ébullition qu'elle est moins pressée par l'air libre ou le poids de l'atmosphere. Le Traité de M. de Luc, sur les *modifications de l'atmosphere*, contient plusieurs observations sur ce sujet, (*voyez cet ouvrage art.* 449 *et suiv.*, *et* art. 858 *et suiv.*), que nous ne citerons pas, parcequ'elles n'embrassent qu'une très petite partie de l'ensemble des expériences faites récemment par M. le chevalier de Bettancourt, et dont il sera bientôt question : nous ne parlons ici que de la pression de l'air libre ou du poids de l'atmosphere; car lorsque la pression de l'eau est due à l'air dilaté et chauffé avec ce liquide dans un même espace clos, on observe des phénomenes d'un genre particulier; mais dont la discussion est étrangere à notre objet.

Autres conséquences de la même proposition.

1319. On peut faire remarquer, d'après M. Lavoisier, une conséquence intéressante de ce qui vient d'être dit; savoir, que, si notre planete subissoit des révolutions telles que la pression de l'atmosphere devînt moindre, ou que la température devînt plus élevée, il y auroit des fluides que nous connoissons sous l'état liquide, et qui n'existeroient plus que sous l'état aériforme. Par exemple, si, sous la température d'été, la pression de l'atmosphere n'équivaloit qu'à 20 ou 24 pouces de mercure, au lieu de 28, une pareille pression ne pourroit pas tenir l'éther dans l'état liquide, et il se changeroit en gas; il se volatiliseroit encore, si la pression de l'atmosphere restant la même, la température habituelle étoit de 32 ou 33 degrés.

1320. Cette conséquence, et plusieurs autres d'une curiosité piquante, sont très bien développées dans l'ouvrage ci-dessus cité; et le grand jour qu'elles répandent sur l'intelligence des opérations de la nature, est une récompense bien douce des moments qu'on a employés à l'étude des découvertes modernes (1).

(1) Avant de passer aux applications, il ne sera pas hors de propos de présenter aux lecteurs quelques réflexions qui peuvent avoir leur utilité. Nous n'avons pas fait de différence, dans toute la théorie qu'on vient de voir, entre les gas proprement dits, et les vapeurs ou émanations d'un liquide produites par la chaleur : nous avons en cela suivi

Digitized by Google

1321. Les principes que nous venons de poser sont plus que suffisants pour l'intelligence de tout ce qui a rapport à l'action de l'eau réduite en vapeurs, qu'on peut nommer *gas aqueux*, dont nous allons nous occuper dans le reste de ce chapitre.

Comment la théorie du calorique s'applique à l'expansion de l'eau réduite en vapeur.

On sait, par une expérience journaliere, que l'eau chauffée en plein air, se volatilise à 80° du thermometre de Réaumur, la hauteur du barometre étant de 28 pouces. La force expansive de la vapeur doit donc, dans le cas dont nous venons de parler, et d'après les principes et les expériences exposés précédemment, être mesurée par une colonne de mercure de 28 pouces, de la même maniere que nous avons mesuré le ressort de l'air art. (629), ou par la hauteur d'une colonne d'eau, comme nous avons fait art. (675 *et suiv.*).

1322. Pour rendre plus sensible la maniere dont on peut mesurer la force expansive de l'eau réduite en vapeurs, nous allons donner une idée de l'appareil imaginé et employé par M. le chevalier de Bettancourt, pour faire les belles et utiles expériences dont nous rendrons compte ci-après. Soit un vase A (*fig.* 190) placé sur un réchaud B, n'ayant d'autres ouvertures que l'ouverture *o*, à laquelle est adapté le barometre recourbé *o g r* l'ouverture *s*, à travers laquelle passe le thermometre *th*, et l'ouverture *o'*, à laquelle est adapté le tuyau *o' o''* fermé par

Conformité de la théorie et des expériences faites avec l'appareil précédent.

---

l'exemple des chymistes célébres quin ous ont servi de guides. Cependant, la nature nous offre des corps qui, *sous une pression déterminée, restent constamment dans l'état de fluides aériformes, quel que soit leur degré de froid thermométrique*, et d'autres corps, *qui ne restent dans l'état de fluide aériforme, qu'à un certain degré de chaleur et de pression*; et il paroît nécessaire de distinguer ces deux especes de corps par des noms différents. Ne pourroit-on pas désigner les premiers par le mot *gas*, les seconds par le mot *vapeurs*, le mot *fluide aériforme* restant commun aux uns et aux autres, c'est-à-dire, désignant un genre, dont *gas* et *vapeur* sont les deux especes? Ajoutons quelques observations propres à bien établir les caracteres distinctifs de chacune de ces especes.

En admettant que c'est le calorique qui maintient tous les corps dans l'état d'expansion, on verra qu'il doit le maintenir dans les gas par un état de combinaison qui fait qu'il y reste fixé, jusqu'à ce qu'un autre corps s'en empare par une affinité supérieure. Le calorique paroît être à un *gas* ce que l'eau est à un sel crystallisé dans lequel elle perd toutes ses propriétés de liquide. Dans la *vapeur*, au contraire, le calorique n'est point uni aux molécules par une combinaison chymique; c'est un fluide étranger, qui les tient en suspension ou dans un foible état de dissolution; mais il est toujours libre, et peut se répandre et couler (si on peut se servir de ce terme) dans tous les corps environnants, ainsi qu'il eut fait dans son état de pureté.

Les expériences que M. de Lavoisier annonce, page 8 et suiv. du premier vol. de son Traité de Chymie, ne détruisent point la distinction qu'on fait ici entre le gas et les vapeurs, quoique ce grand chymiste paroisse les confondre. Ajoutons encore qu'il ne faut pas admettre, sans restriction, ce qu'il dit (*page* 8, *premier alinéa*) de l'expansion indéfinie des fluides aériformes dégagés du poids de l'atmosphere; car la pression de l'air étant détruite il resteroit encore la pression produite par la gravitation des parties intégrantes du fluide aériforme lui-même, et qui seroit suffisante pour coërcer le calorique jusqu'à un certain point, et l'empêcher de produire une expansion indéfinie.

Digitized by Google

le robinet *b*; le tout disposé de maniere que, lorsque le robinet *b* est fermé, il n'y ait aucune communication entre l'espace intérieur A et l'air extérieur.

Cela posé, lorsque le robinet *b* est ouvert et que l'eau n'est point chauffée, le mercure doit se tenir dans les deux branches du barometre à deux points de niveau *m* et *m'*. Si ensuite, par un moyen quelconque, on fait le vide en A, et qu'on ferme le robinet *b*, le mercure montera de *m* en *k*, et descendra de *m'* en *k'* de telle sorte que l'eau étant supposée à-peu-près à la température de la glace, la différence de niveau des points *k* et *k'* sera de 28 pouces.

Si alors on commence à faire chauffer l'eau rapidement, on s'appercevra, dès les premiers instants de son ébullition, par les percussions que recevra la paroi intérieure du vase, et dont tout l'appareil sera même ébranlé. Le mercure commencera en même-temps à baisser, le thermometre à monter; et lorsque les points *k* et *k'* seront arrivés au même niveau *m* et *m'*, le thermometre sera à 80°. La pression de la vapeur exercera donc à cette température, sur la section *m* la même pression que le poids de l'atmosphere exerce dans la branche *m' r* sur la section *m'*. Si on éleve encore la température de l'eau, le mercure s'élevera au-dessus de *m'*, et descendra au-dessous de *m* à des points *n'* et *n*, dont la différence sera relative à la température de l'eau.

Si on ajoute à cette différence de niveau la hauteur du mercure dans un barometre placé à côté de l'appareil, prise à l'instant de l'observation, la somme sera la hauteur d'une colonne de mercure, représentative de la force expansive de la vapeur. La différence de niveau doit être prise positivement ou négativement suivant que la température de l'eau est au-dessus ou au-dessous de 80°.

Les expériences ont d'abord été faites comme nous venons de le dire, l'extrémité *r* du tube étant ouverte: mais comme il falloit sans cesse avoir égard à l'état de l'atmosphere pour évaluer le poids de la colonne d'air qui pressoit en *r*, ce qui exigeoit l'observation d'un barometre particulier étranger à la machine, M. le chevalier de Bettancourt a pris le parti de fermer l'extrémité *r* du tube, de faire le vide dans la partie parcourue par le mercure, de la même maniere et avec les mêmes précautions employées pour les barometres ordinaires; et c'est au moyen de ce changement qu'il a obtenu la plus grande préci-

Digitized by Google

sion dans ses expériences. On voit que lorsque le vide étoit fait en A, le mercure étoit de niveau, à la température de la glace, dans les deux branches du tube, et que son ascension mesuroit ensuite immédiatement la force expansive, sans qu'on fût obligé d'ajouter le poids de l'atmosphere à celui représenté par la différence de hauteur du mercure dans les deux branches du tube.

1223. Cet exposé nous apprend déja que l'expérience confirme les principes et les faits exposés précédemment (1317 *et suiv.*), puisque, conformément à ces principes et à ces faits, lorsque la pression de la surface *ef* est nulle, il se forme du gas aqueux à la plus petite température au-dessus de la glace; que la force expansive de ce gas aqueux augmente à mesure que la température est plus élevée; qu'à 80 degrés l'expansion du gas fait équilibre au poids de l'atmosphere; et qu'enfin, à une température plus élevé, elle surpasse la pression de l'atmosphere d'une quantité qui a une certaine relation avec l'excès de la température sur 80°.

De la mesure absolue de la force expansive du gas aqueux.

1324. Mais quelle est la mesure absolue de la force expansive du gas aqueux correspondante aux différents degrés de température depuis la glace jusqu'aux plus hautes températures qu'on peut observer? Tel est le problême que M. le chevalier de Bettancourt vient de résoudre tout récemment avec l'appareil dont nous avons donné une idée, et au moyen duquel il a évalué la force expansive du gas aqueux pour chaque degré du thermometre, depuis la glace jusqu'à une température telle que la force expansive correspondante de la vapeur équivale à trois ou quatre fois le poids de l'atmosphere. Les nouvelles connoissances dont de pareilles expériences ont enrichi la physique, sont, comme nous le verrons, de la plus grande utilité dans la pratique des machines à feu, tant pour évaluer leur action et leur produit, que pour se rendre compte des déchets qu'éprouvent ces produits, sur la cause desquels on n'avoit pas encore eu d'idée bien précise.

M. le chevalier de Bettancourt a pu, au moyen de ses expériences, former une table de différentes forces expansives de la vapeur de l'eau, correspondantes à différents degrés de température. En appliquant aux résultats consignés dans cette table une méthode de notre invention, pour trouver la loi des phénomenes d'après l'expérience, on trouve que la relation entre le nombre des degrés du thermometre de Réaumur, indiquant la température, et le nombre de pouces de hauteur d'une

colonne de mercure, représentant la force expansive de la vapeur de l'eau, peut être exprimée par l'équation suivante,

1325. $y = e^{\mu} \overset{+}{-} {}^{\lambda x} e^{\mu'} \overset{+}{-} {}^{\lambda' x} e^{\sigma x - \rho} \overset{+}{-} e^{\sigma' x - \rho'}$,

dans laquelle

y = La hauteur de la colonne de mercure qui mesure la force expansive.

x = Le nombre de degrés correspondant du thermometre.

$e = 10.$

$\mu = 0{,}068831.$

$\lambda = 0{,}019438.$

$\lambda' = 0{,}01349.$

$\sigma = 0{,}058576$ $\quad \rho = 4{,}68608.$

$\sigma' = 0{,}049157$ $\quad \rho' = 3{,}93256.$

Un des avantages de cette formule est de pouvoir se calculer avec la plus grande facilité; car e étant la base du systême logarithmique vulgaire, les termes qui composent la valeur d'y sont les nombres dont les exposants de ces termes sont les logarithmes; et rien, comme on voit, n'est plus prompt et plus facile que le calcul de ces exposants. Il y a plus; les deux derniers termes de la formule peuvent être négligés depuis $x = 0$; jusqu'à $x = 80$ car leur exposant étant négatif dans tout cet intervalle, ces termes sont de petites fractions dont la différence n'influe pas sensiblement sur la valeur d'y. On n'a donc, depuis la glace jusqu'à l'eau bouillante, que deux termes à calculer, ce qui suffira à presque tous les besoins de la pratique.

Un autre avantage de cette formule est de présenter les observations avec une précision qu'on n'auroit pas osé espérer dans des expériences d'une aussi grande étendue: on en poura juger par la table 10 placée à la fin de ce Traité, où l'on verra que les légeres différences entre les résultats de l'expérience et ceux du calcul doivent être attribuées à de petites erreurs et irrégularités inévitables dans les observations et dans la manipulation des instruments. Par exemple, M. de Bettancourt, en vérifiant, postérieurement à ses expériences, les divisions de l'échelle du thermometre, s'est apperçu que, dans quelques endroits, elles n'avoient pas une grande exactitude, et entre autres

itized by Google

tres aux environs de 65 degrés; voilà pourquoi, en cet endroit, les différences sont plus considérables qu'ailleurs.

Nous allons présenter ici un tableau abrégé des résultats du calcul, et de ceux de l'expérience : la table 10 ci-dessus citée contient ces résultats de degré en degré.

Table de la force expansive de l'eau réduite en vapeur dans le vide à différentes températures (1).

Degrés du thermometre.	Force expansive calculée.	Force expansive éprouvée.	Différence entre les deux résultats ci-à-côté.
0	0,0000	0,00	0,00
10	0,2304	0,15	+ 0,08
20	0,6872	0,65	+ 0,03
30	1,5019	1,52	— 0,02
40	2,9711	2,92	+ 0,05
50	5,4453	5,35	+ 0,09
60	9,6280	9,95	— 0,32
67	14,1161	14,50	— 0,38
70	16,577	16,90	— 0,32
80	28,006	28,00	0,00
90	45,870	46,40	— 0,53
95	57,801	57,80	0,00
100	71,552	71,80	— 0,25
104	83,259	84,00	— 0,74
110	98,356	98,00	+ 0,35

On voit que la variation de la force expansive due à un degré de changement dans l'échelle qui indique la chaleur, est

(1) M. le chevalier de Bettancourt a fait des expériences sur la force expansive de la vapeur de l'esprit-de-vin, avec le même appareil décrit dans le texte. Ces expériences ont été faites de degré en degré du thermometre de Réaumur, depuis la température de la glace jusqu'à 90 degrés. La formule déduite de notre méthode pour trouver la loi des phénomenes, d'après l'observation, représente très exactement tous ces résultats :

$$y = e^{\mu+\lambda x} + e^{\mu'+\lambda' x} - e^{\nu x - \rho} + e^{\nu' x - \rho'} - A.$$

e, y et x représentent les mêmes que dans la formule de l'art. (1325); on a de plus,

$\mu = -0,04853$; $\mu' = -0,63414$; $\nu = 0,0467$; $A = 1,126447$. $\rho = 2,60249$
$\lambda = 0,02393$; $\lambda' = -0,09653$; $\nu' = 0,02945$; $\rho' = 1,64909$

Cette formule a les mêmes propriétés et les mêmes avantages que celle de l'art. cité, son usage est même plus expeditif; car le deuxieme terme peut n'être employé que depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 10$, après quoi il devient si petit, qu'on peut la négliger. Les troisieme et quatrieme termes ne doivent être employés qu'à compter de $x = 57$, ou même de

Digitized by Google

très petite dans les basses températures, et qu'elle augmente avec d'autant plus de rapidité, que la température est plus haute. La table 10 calculée de degré en degré, ne donne que quelques centiemes de pouces de variations dans les premiers degrés, et donne près de trois pouces dans les derniers. Aussi la force expansive qui est égale au demi-poids de l'atmosphere, aux environs de 67 degrés devient égale aux poids entiers à 80 degrés, c'est-à-dire, après une augmentation de 13 degrés, elle devient double de ce poids à 95 degrés environ, triple à 104 degrés, en sorte qu'à partir du demi-poids de l'atmosphere, le nombre des degrés du thermometre étant

à-peu-près comme. . . . 1 . . 1,2 . . 1,4 . . 1,6 . . 1,7

La force expansive correspondante est dans le rapport de. . . . . 1 . . 2 . . 4 . . 6 . . 7

Nous ne nous étendrons pas davantage dans ce moment sur les expériences de M. le chevalier de Bettancourt, que nous reprendrons très en détail quand il en sera temps; nous allons seulement ajouter quelques réflexions sur la relation entre la température et la force expansive de la vapeur.

1326. Dès l'instant que le gas aqueux commence à se répandre dans l'espace A, supposé vide d'air, il presse sur la surface *ef* avec un effort qu'on évalue par le lieu du mercure dans le barometre *ogr*. Cette pression doit, d'après les principes exposés précédemment, contenir jusqu'à un certain point le calorique

---

$x = 60$; car en-deçà, leur différence est trop petite pour qu'on doive y avoir égard. Voici les résultats du calcul, et ceux de l'expérience de 10 en 10 degrés du thermometre.

Table de la force expansive de l'esprit de vin réduit en vapeur dans le vide à différentes températures.

Degrés du thermometre.	Force expansive calculée.	Force expansive éprouvée.	Différence des résultats ci-à-côté.
0	0,0000	0.00	0,00
10	0,4502	0,45	0,00
20	1,5655	1,52	+ 0,04
30	3,5441	3.40	+ 0,14
40	6,9771	6,90	+ 0,08
50	12.934	12,85	+ 0,08
60	23,054	23.70	— 0,70
70	39,307	39.40	— 0,10
80	64.352	63,80	+ 0,55
90	98,27	98,00	0,27

Digitized by Google

renfermé et accumulé dans l'eau par une action semblable à celle de la pression de l'atmosphere, lorsque l'eau est échauffée à l'air libre. On voit donc que, dès les premiers instants, l'ébullition et l'expansion du calorique doit être très prompte, qu'ensuite à mesure que le gas aqueux se répand dans l'espace A, il doit modérer progressivement la rapidité de l'ébullition et de l'expansion du calorique. C'est ce que l'expérience prouve; car, 1°. la percussion de la paroi intérieure du vase ne se fait entendre que dans les premiers instants de l'échauffement de l'eau; 2°. si l'espace A étant rempli de vapeur, et le thermometre plus haut que 80 degrés, on ouvre tout-à-coup le robinet *b*, la vapeur dont l'expansion surmontera la pression de l'atmosphere, s'échappera par le tuyau oo″, et le thermometre baissera; phénomene qui résulte de ce que la pression sur *ef* venant à diminuer, le calorique contenu dans l'eau, s'échappe en plus grande quantité dans l'espace A, et s'accumule moins dans la boule *h* du thermometre. Si le robinet *b* reste ouvert, le thermometre descendra à 80°, et ne remontera pas plus haut, quelque feu qu'on fasse sur le réchaud B; si au contraire on ferme le robinet et que le feu du réchaud reste le même, le thermometre remonte bientôt à la même hauteur où il étoit avant l'ouverture de ce robinet.

1327. On voit donc tant par le fait que par les principes posés ci-dessus, qu'il y a une relation et une dépendance mutuelle entre la température et la pression de la vapeur renfermée dans l'espace A. Il résulte de là, que tant que l'eau restera à la même température, la pression due à la vapeur renfermée dans l'espace A sera la même, quelle que soit l'étendue de cet espace: ainsi, en supposant qu'à l'instant où une température de l'eau a lieu, on pût tout-à-coup augmenter la capacité de l'espace A, la pression diminueroit à la vérité, mais la température de l'eau diminueroit aussi, et deviendroit telle que le comporteroit la pression nouvelle. M. le chevalier de Bettancourt s'est assuré que les résultats des expériences sont sensiblement les mêmes, quelle que soit la hauteur de la surface *ef* de l'eau dans le vase.

Passons à la maniere dont le gas aqueux est employé au mouvement des machines, ce qui exige que nous parlions de ceux qui ont les premiers effectué cette application, ou soupçonné sa possibilité.

1328. Le marquis de Worcester paroît être le premier qui ait parlé de l'usage qu'on peut faire de l'eau réduite en vapeur. Il fit paroître en 1663, à la fin du regne de Charles II, roi d'An-

gleterre, un ouvrage anglois intitulé, *Century of inventions*, c'est-à dire *Centurie d'inventions*, dans lequel il s'explique d'une maniere positive sur l'effort dont est capable la vapeur. Voici la traduction du N°. 68 de son ouvrage : « Une maniere admi-« rable, et la plus propre à élever l'eau par le feu, n'est pas « de la tirer ou faire évaporer par le haut; parceque, comme « dit le philosophe, cela ne peut être que *intra sphæram acti-« vitatis*, c'est-à-dire à une distance fixe. Celle que je propose « n'a pas de borne, si les vaisseaux sont assez forts; car j'ai pris « une piece d'un canon entier, dont le bout avoit éclaté, et j'en « ai rempli les trois quarts d'eau, fermant à vis le bout rompu, « aussi bien que la lumiere. Ayant fait sous ce canon un feu con-« stant, dans 24 heures il éclata et fit un grand bruit: d'après cela « ayant trouvé le moyen de faire des vaisseaux fortifiés intérieu-« rement d'une maniere convenable, et de les remplir l'un après « l'autre, j'en ai vu l'eau jaillir comme une fontaine constante « à quarante pieds de hauteur; un vaisseau d'eau raréfiée par le « feu, en tira 40 d'eau froide. Un homme qui veut réussir dans « cette opération, n'a qu'à tourner deux robinets, afin qu'un vais-« seau d'eau étant consumé, l'autre commence à forcer et à se « remplir d'eau froide, et ainsi successivement, le feu étant « poussé et entretenu constamment. La même personne peut « entretenir le feu fort aisément dans l'espace de temps où il n'est « pas occupé à tourner les robinets. »

Travaux de Savery sur les machines à feu.

1329. Le moyen indiqué par le marquis de Worcester ne fixa décidément l'attention de quelques savants et de quelques artistes, que vers la fin du dix-septieme siecle, et c'est à cette époque qu'il faut fixer le commencement de son usage. Le capitaine anglois *Savery* prétendit avoir découvert, par l'effet du hasard, le parti qu'on peut tirer de l'eau réduite en vapeur; ce fut un des premiers qui construisit plusieurs machines à feu en Angleterre, où il publia son traité intitulé : *The Miner's Friend*, c'est-à-dire *l'Ami des Mineurs*, et un autre petit traité contenant la description d'une de ses machines, mis au jour vers l'année 1699.

Il est soupçonné d'avoir puisé ses idées dans l'ouvrage du marquis de Worcester.

1330. Le docteur Désagulliers prétend (*Cours de Physique*, *édition* françoise de 1751, tome II, page 545 et suiv.) que Savery avoit connoissance de l'ouvrage de Worcester, et qu'il n'a point fait l'expérience par laquelle il dit que l'idée de la pompe à feu lui a été suggérée. Voyez la discussion de cette question de fait dans l'ouvrage cité. Quoi qu'il en soit, voici som-

mairement la maniere dont Savery employoit la vapeur de l'eau pour faire monter l'eau.

Description d'une machine à feu, de Savery; sa ressemblance avec celle décrite par le marquis de Worcester.

1331. Les deux vases P', P^2 (*fig.* 191) sont disposés de maniere qu'ils peuvent alternativement recevoir de la vapeur et de l'eau froide, qui leur vient par le moyen que nous allons décrire, du réservoir V, avec lequel ils communiquent par le moyen des tuyaux QR^3T et $Q'R^4T$. Supposons que P' soit rempli de vapeur, les robinets R' et R^3 étant fermés. Si on ferme le robinet r pour intercepter la communication entre le vase P' et la chaudiere, la vapeur commencera à se condenser dans le vase par la seule fraîcheur de l'air extérieur : si alors on ouvre le robinet R^3, l'eau du réservoir V montera dans le vase P' à cause du commencement de vide qui s'y est formé, achevera la condensation de la vapeur, et remplira le vase P'. Qu'on ferme alors le robinet R^3, et qu'on ouvre les robinets R' et r, la communication étant rétablie entre la chaudiere et le vase P', la vapeur viendra presser l'eau qui y est contenue; cette eau ne pourra plus redescendre par R^3; mais trouvant R' ouvert, elle montera par le tuyau $R'SS'$ à une hauteur proportionnelle à l'effort de la vapeur. Lorsque le vase P' sera ainsi vidé d'eau, et rempli de vapeur, on fermera les robinets R' et r, et les choses deviendront au même état qu'au commencement de cette description. Le vase P^2, les tuyaux $Q'R^4T$, R^2SS', et les robinets R^4, R^2 et r' font de leur côté les mêmes fonctions, de maniere que, quand la condensation a lieu dans l'un des deux vases, l'ascension de l'eau en S' a lieu dans l'autre, et réciproquement.

On voit que cette machine a beaucoup d'analogie avec la description qui termine le fragment du marquis de Worcester, rapporté plus haut. Il faut cependant observer que cette description est énoncée d'une maniere vague, et même obscure, qui ne peut pas donner une idée bien nette de la machine décrite.

Autre machine de Savery, plus simple que la précédente.

1332. Voici une autre maniere plus simple, imaginée par Savery, pour élever l'eau, et rapportée dans l'ouvrage de Bradley, intitulé : *New Improvements of Planting and Gardening*. Le vase composé EF (*fig.* 192) se remplit de vapeur qui lui vient de la chaudiere B, par le tuyau D. Alors, par le moyen du robinet C, on intercepte la communication entre la chaudiere et le vase; on tourne ensuite le robinet M, et on introduit de l'eau froide en EF qui y condense la vapeur et y fait le vide. Le robinet I étant

alors ouvert, l'eau, au moyen du vide opéré, monte du réservoir par le tuyau G et vient en F. On ferme le robinet I, on rétablit la communication entre la chaudiere et le vase E, et on ouvre le robinet K; alors l'eau vient presser sur le fluide qui est E, et ce fluide ne pouvant redescendre en G, monte par le tuyau I. Le tuyau N sert pour établir, quand il en est besoin, la communication entre l'air extérieur et l'intérieur de la chaudiere.

1333. Il seroit inutile à notre objet de détailler davantage les moyens employés par Savery : ceux qui desireront en avoir une description plus circonstanciée, pourront consulter un ouvrage anglois en 2 vol. *in-4°.*, publié à Londres en 1729, par *Switzer*, qui a pour titre, *An Introduction to a general system of Hydrotsaticks and Hydraulicks*, etc.

Moyens employés postérieurement pour perfectionner les machines précédentes.

1334. Nous verrons, quand il sera temps, les inconvénients qui résultent de la pression immédiate de la vapeur sur l'eau à élever. On a essayé postérieurement de remédier à cet inconvénient en établissant un flotteur entre la vapeur et l'eau; ce flotteur, en montant, fait lever une soupape qui ferme la communication entre la chaudiere et le vase P'; cette soupape se referme lorsque le flotteur descend : il y a également des soupapes à la place des robinets R' et R^3, qui s'ouvrent et se ferment par la pression de l'eau, en sorte que la machine va d'elle-même, en entretenant seulement le feu. On la voit exécutée de cette sorte au jardin de Monceau, appartenant à monseigneur le duc d'Orléans : nous entrerons, lorsqu'il en sera temps, dans de plus grands détails sur son mécanisme.

Travaux de M. Papin sur les machines à feu : ce savant est principalement redevable de sa célébrité à son digesteur.

1335. A-peu-près dans le même temps où l'Angleterre jouissoit des inventions dont nous venons de parler, M. Papin, docteur en médecine, professeur de mathématiques à Marboug, et membre de la faculté royale de Londres, avoit fait, dès l'année 1698, par ordre de S. A. S. *Charles, landgrave de Hesse,* plusieurs expériences sur la maniere d'élever l'eau par la force du feu. Ce savant a donné un ouvrage imprimé à Cassel en 1707, et intitulé : *Nouvelle maniere d'élever l'eau par la force du feu,* dans lequel il accorde à Savery, ou aux Anglois, le mérite d'avoir trouvé de leur côté, le même effet avec le même agent.

Nous ne parlerons pas de la machine de Papin, qui est plus imparfaite que celle de Savery; la grande célébrité de ses expériences sur la vapeur, est principalement fondée sur l'usage qu'il en a fait pour dissoudre les os au moyen de son *digesteur*,

Digitized by Google

très connu sous le nom de *marmite de Papin*, dont il a publié la description à Paris en 1682, sous la dénomination de *machine propre à amollir les os pour en faire du bouillon.*

Inventions de MM. Amontons et Dalesme sur les machines à feu.

1336. D'un autre côté, M. Amontons a publié, en 1699, dans les Mémoires de l'Académie, la description d'un moulin destiné à être mu par le ressort de l'air dilaté par l'action du feu, et condensé ensuite par le contact de cet air avec l'eau froide. On voit encore dans l'Histoire de l'Académie pour l'année 1705, qu'un M. Dalesme a proposé d'employer la vapeur de l'eau, comme moteur propre à être appliqué à une machine qui faisoit jaillir l'eau à une grande hauteur.

Perfection ajoutée à la machine à feu, pour rendre indéfini son usage qui, auparavant, se bornoit à l'élévation de l'eau.

1337. Le gas aqueux, employé au moyen des machines décrites art. (1330 *et suiv.*), ne peut élever un fluide qu'en le pressant immédiatement, ou par le moyen du flotteur, ce qui ne change rien au mécanisme fondamental. La *fig.* (193) donne l'apperçu du profil d'une machine dans laquelle l'action du moteur est transmise à la résistance par le moyen d'un balancier. Cette idée ingénieuse est la source de toutes les additions postérieures faites aux machines à feu, qui ont généralisé leur usage autant qu'il est possible, et les ont rendues propres, non seulement à élever de l'eau, mais à procurer à des résistances quelconques, des mouvements tans rectilignes que circulaires. Par là, on a pu appliquer la machine à feu à tous les besoins de la vie; aux arts, aux manufactures, etc. : et quoique l'auteur du mécanisme que nous allons décrire n'ait pas fait ces applications, on ne doit pas moins lui accorder la gloire d'avoir donné le moyen de rendre indéfini l'usage de la vapeur qui, avant lui, n'étoit employée qu'à élever de l'eau.

Cette perfection, faussement attribuée à *Savery*, est due à Newcomen et Jean Cawley.

On attribue communément à Savery l'invention de la machine (*fig.* 193); mais c'est une erreur, et ses véritables inventeurs sont *Newcomen*, ferronnier, et *Jean Cawley*, vitrier, demeurants à Darmouth, petite ville avec port de mer, située dans le comté de Devonshire en Angleterre. Switzer, dont on a cité l'ouvrage plus haut, et qui a connu personnellement Savery et Newcomen, atteste que la machine de ce dernier est entièrement le fruit de son génie. Mais Savery, plus près de la cour, obtint ses patentes ou privilege avant Newcomen, et celui-ci, homme simple et modeste, se trouva assez heureux d'être son associé. Voici le jeu de la machine représentée par la *fig.* 193.

Description de la machine à feu de Newcomen, et ses avantages sur celle de Savery.

1338. Le feu étant allumé en F sous la chaudiere A, et le clapet ou soupape *bd* étant ouvert, la vapeur entre par le tuyau *a* dans la partie inférieure B du cylindre BB′ ouvert à sa partie su-

Digitized by Google

périeure; cette vapeur fait monter le piston x, qui tient au balancier PQ par la tige de métal xk et la chaîne tangente kk; l'axe ou centre de rotation de balancier étant en C, à mesure que le piston x monte, l'équipage Z'Z y attaché à l'autre extrémité du balancier descend; lorsque x est parvenu au point le plus haut de sa course, l'ouverture bd se ferme, et la communication entre la vapeur renfermée dans le cylindre B et celle renfermée dans la chaudiere A, se trouve ainsi interceptée. Alors le robinet r s'ouvre et laisse passer par le tuyau jrt de l'eau froide dans l'espace B rempli de vapeur. Cette vapeur se condense; le vide se fait en B (1), et l'atmosphere pressant sur la partie supérieure du piston, le fait redescendre ainsi que tout l'équipage xkk' et fait remonter tout l'équipage y ZZ': lorsque x est parvenu au point le plus bas de sa course, le robinet r se ferme, l'issue bd s'ouvre de nouveau, la vapeur s'introduit en B, fait remonter le piston x, redescendre le piston y et ainsi de suite : le piston y peut donc, par ses mouvements alternatifs, ainsi produits et correspondants à ceux que la vapeur et le poids de l'atmosphere donnent successivement au piston x, être employé à pomper l'eau et à l'élever, soit dans le tuyau fgh, soit dans un tuyau quelconque.

1339. On voit aisément qu'on peut à l'équipage Z'Zy substituer une scie qui agiroit dans un plan vertical, ou une résistance quelconque, destinée à avoir un mouvement vertical alternatif.

1340. Il y a plus; l'orifice bd ainsi que le robinet d'injection r sont ouverts ou fermés par le jeu même de la machine, au moyen de certains mécanismes particuliers, dont nous donnerons la description dans la suite : ainsi on n'a besoin d'employer des hommes que pour l'entretien du feu F, avantage que n'ont pas les machines représentées par les (*fig.* 191 et 192), dans lesquelles l'introduction, l'isolement et la condensation de la vapeur exigent des agents étrangers au mécanisme de la machine.

Inconvénients de la machine de Newcomen; description de la machine à feu de M. Wats, qui remédie à une partie de ces inconvénients.

1341. La machine de *Newcomen*, malgré son grand avantage sur celle de *Savery*, a cependant plusieurs inconvénients, dont il n'est pas encore temps de faire le détail, et dont un des principaux consiste à introduire l'eau d'injection dans le cylindre. Un Anglois appellé M. Wats, a imaginé, vers l'année 1770, la machine

(1) Il faut toujours entendre par le vide, ainsi formé, non pas un vide absolu, mais un espace rempli d'un gas dont le ressort est beaucoup moins considérable que celui de l'air extérieur : ceci sera plus amplement développé dans la suite.

dont

Digitized by Google

dont la *fig.* 194, n°. 1, représente le profil, qui est exempte d'une grande partie des défauts de celle de Savery, et a entre autres avantages, celui d'opérer la condensation hors du cylindre : voici le jeu de cette machine.

Le vide étant supposé fait, par les moyens que nous verrons plus bas, dans la partie inférieure B′ du cylindre BB′, la vapeur qui se forme dans la chaudiere A, s'introduit par le tuyau *b* dans la partie supérieure B du cylindre bien fermé par une plaque *oo′* de métal, qui n'a d'autre ouverture que le trou circulaire *o″*, très exactement rempli par la tige XK du piston : la vapeur, avant d'entrer en B, traverse un espace fermé par deux soupapes, qu'on voit plus clairement dans la *fig.* 194, n°. 2, la soupape supérieure *t* étant ouverte, et l'inférieure *t′* étant fermée. Dans cet état, l'effet de vapeur doit être de faire baisser le piston X et de faire élever, au moyen du balancier PCQ, tous les équipages *k′* X′, *k″*X″, Z*y*. Ce dernier qui produit l'effet utile de la machine, peut être, comme dans la figure 193, destiné à élever l'eau dans une pompe, ou avoir tel autre objet d'utilité qu'on jugera convenable, comme on le verra bientôt. Nous verrons quel est l'usage des pistons X′ et X″. Lorsque le piston X est descendu au point le plus bas de sa course, la soupape *t* se ferme et la soupape *t′* s'ouvre; alors la vapeur contenue dans la partie supérieure B, a un libre passage par le canal vertical *v*, et par le canal horizontal *v′* qui aboutit à la partie inférieure B′ du cylindre, dans laquelle cette vapeur vient s'introduire. Le piston X se trouve donc alors également pressé par la vapeur dans ses parties supérieure et inférieure, et cette vapeur n'influe plus sur son mouvement. Dans ce cas, l'excès de pesanteur des équipages qui sont du côté Q du balancier à laquelle pesanteur s'ajoute celle du contre-poids *p;* cet excès, disons-nous, fait remonter le piston X et redescendre tous les équipages qui sont du côté Q du balancier : à mesure que le piston X remonte, il chasse le gas aqueux contenu dans la partie supérieure B du cylindre; mais ce fluide reflue par les canaux *v* et *v′* et vient se loger dans la partie inférieure B′ où le vide commence à s'effectuer.

Laissons un moment le piston X au point le plus haut de sa course, et observons que le canal vertical *v* descend jusqu'en *v″*, et que le tuyau *jj′ j″*, ouvert en *j″* et fermé en *j* par une soupape, a, comme on voit par la figure, une partie *j″ j′* de sa longueur dans le canal *vv″* et l'autre partie *jj′* dans un réservoir E toujours plein d'eau : ce réservoir ne peut avoir de communication avec le canal *vv″* que par le moyen du tuyau *j′j″ j″* et dans le cas où

Digitized by Google

la soupape *j* est ouverte. Maintenant, lorsque le piston X est parvenu, comme on a vu, au point le plus haut de sa course, la soupape *j* s'ouvre, l'eau jaillit par l'orifice *j*″, et la vapeur contenue dans l'espace $m v'' v v'$ B′ se condense. On sait que la soupape *t* qui doit intercepter la communication entre la chaudiere et le cylindre est fermée; la soupape figurée en *m*, dont nous allons voir l'usage, l'est également; car pour qu'elle s'ouvrît pendant la montée du piston, il faudroit que la vapeur surmontât le poids d'une colonne d'eau $v''' k''$, dont nous parlerons bientôt, et qui est toujours de plus de 32 pieds.

La vapeur étant ainsi condensée, les soupapes *t*′ et *j* se ferment, et la soupape *t* s'ouvre; alors le gas aqueux qui vient de la chaudiere agit dans l'espace B sur la partie supérieure du piston X, et les choses reviennent au même état où elles étoient au commencement de cette description.

Pompe à air adaptée à cette machine.

Mais lorsque la condensation s'est faite dans l'espace $B' v' v v'' m$, l'eau d'injection qui a jailli par l'orifice *j*″, est restée dans le canal $v v'' m$; cette eau s'est échauffée par son mêlange avec la vapeur, et se trouve ordinairement à une température de plus de 30 à 45 degrés; de plus il y a une certaine quantité d'air dégagé de cette eau qui se trouve à la même température, et déploie un ressort relatif à sa chaleur et à l'espace dans lequel il peut s'étendre. Il s'agit donc d'ôter l'eau et l'air que l'injection a introduits dans le canal $v v'' m$; c'est à cet usage que sont destinées les pompes $v''' v^{iv}$ et $f k''$. On conçoit aisément que, dans l'espace $B' v' v v'' m$, le gas aqueux dû à une température d'environ 40° occupe la partie supérieure, l'air est au-dessous, et l'eau d'injection occupe la partie inférieure; lorsque le piston X descend, le piston X′ monte et tend à faire le vide au-dessous de lui; mais la vapeur contenue en $B' v' v$, tant par la force expansive, qui est toujours équivalente à une colonne de mercure d'environ 4 pouces, que par la compression du piston X qui, en descendant, diminue l'espace B′, cette vapeur, disons-nous, agit sur l'eau et l'air inférieurs, ainsi que sur la soupape *m*; cette soupape, lors de l'ascension du piston X′, n'est comprimée dans le sens $v''' m$ que par une colonne d'eau, dont la surface supérieure est au niveau du point le plus bas de la descente du piston X′, et qui n'équivaut qu'à une colonne de mercure de quelques lignes de hauteur, le piston X′ soutenant toute l'eau supérieure. La soupape *m* doit donc s'ouvrir, et l'air et l'eau introduits du côté de *v*″ par la précédente in-

Digitized by Google

jection, doivent passer du côté de v'''. Le piston X', par son ascension, fait passer l'eau des injections antérieures au-dessus de la soupape *f*, de là elle est conduite par le piston X'' en K'', où elle peut rentrer dans la chaudiere par le tuyau *gg'*.

Moyens de modérer à volonté la vitesse de cette machine.

1342. On a des moyens pour diminuer à volonté l'ouverture de la soupape *j*, et modérer par là la rapidité de la condensation de la vapeur : on diminue ainsi la vîtesse de la machine: tous ces objets seront détaillés à leur place.

1343. Cette machine, ainsi que celle de la *fig.* 192, n'exige, pour son mouvement, que l'entretien du feu qui est sous la chaudiere, tout le reste s'opérant par le mécanisme même de la machine, ainsi qu'on le verra dans la suite.

Différence remarquable entre les machines de Newcomen, et de Watt.

1344. Le lecteur observera dès à présent une différence très remarquable entre la machine de Newcomen et celle qu'on vient de décrire, qui consiste en ce que, dans la premiere, la descente du piston du cylindre est opérée par le poids de l'atmosphere, et que, dans celle-ci, c'est l'action de la vapeur qui produit cette descente. Le piston remontant ensuite par l'excès de pesanteur de la partie CQ du balancier, l'atmosphere n'entre pour rien dans son mouvement alternatif.

Comment M. le chevalier de Bettancourt a deviné le principe d'une machine à feu, postérieurement construite par MM. Watt et Bolton.

1345. La machine qu'on vient de décrire a été apportée d'Angleterre en France, par MM. Perrier, qui l'ont fait exécuter à Chaillot depuis quelques années; et c'étoit ce que nous connoissions de mieux jusqu'en 1788. A cette époque, M. le chevalier de Bettancourt, dont nous avons déja cité les belles expériences sur la force expansive de la vapeur, et qui est chargé par la cour d'Espagne de faire une collection de recherches et de modeles pour la perfection de l'Hydraulique, étant allé à Londres, eut occasion de visiter les machines à feu de MM. Watts et Bolton. Il vit le jeu extérieur de ces machines; mais on lui en cacha le mécanisme intérieur ainsi qu'on avoit fait à ceux qui avoient eu la même curiosité avant lui, et on se contenta de lui dire que ce mécanisme avoit plus de perfection que celui des autres machines. M. le chevalier de Bettancourt observa qu'on avoit supprimé les chaînes qu'on est dans l'usage de mettre aux extrémités du balancier, et qui tiennent suspendues tant la tige du piston du cylindre que celle du piston de la pompe qui monte l'eau, ainsi le piston du cylindre et la barre destinée à produire le mouvement de rotation étoient tirés et poussés avec la même force, étant d'ailleurs assujettis à se mouvoir verticalement par des moyens que nous décrirons

Digitized by Google

dans la suite. Il fit plusieurs autres observations dont nous ne pouvons pas nous occuper à présent, mais dont les artistes doivent lui savoir d'autant plus de gré que ces observations sont difficiles à faire, lorsqu'on n'a que peu d'instants pour examiner une machine masquée par les distributions d'un bâtiment qui en isolent les différentes parties, même extérieures, et empêchent qu'on ne puisse en saisir la correspondance, l'ensemble et l'effet général. M. le chevalier de Bettancourt conclut néanmoins de ses observations que le piston du cylindre devoit être poussé avec le même effort, soit dans sa descente, soit dans sa montée; et ce résultat lui fit découvrir le double effet qui constitue essentiellement la nouvelle perfection ajoutée aux machines à feu par MM. Wats et Bolton.

Modele fait par M. le chevalier de Bettancourt, d'après ce principe, adopté et exécuté en grand par MM. Perrier.

M. le chevalier de Bettancourt, de retour à Paris, fit exécuter un modele de machine à feu à double effet, sur l'échelle d'un pouce pour pied. Les expériences faites avec ce modele ont tout le succès qu'on peut desirer, et ont été vues avec le plus grand intérêt par les artistes et les savants de la capitale. Le mécanisme intérieur, au moyen duquel la double injection s'opere, est entièrement de l'invention de M. le chevalier de Bettancourt; et quoiqu'il ignore si ses procédés sont les mêmes que ceux de MM. Wats et Bolton, vu le secret que lui en ont fait ces derniers, il a tout lieu de croire que les artistes anglois n'ont pas atteint un plus grand degré de précision et de simplicité. C'est dans cette confiance que MM. Perrier, excellents juges en pareille matiere, se sont déterminés à faire construire une machine à feu à double effet, et conforme au modele de M. le chevalier de Bettancourt: cette machine, destinée à faire mouvoir des moulins, doit être en activité au commencement de l'année 1790.

Description d'une machine à feu à double effet, de l'invention de M. le chevalier de Bettancourt.

1346. Nous ne donnerons point encore la description de la machine à feu à double effet, que nous décrirons dans la deuxieme partie de cet ouvrage, avec tous les détails nécessaires. Il est cependant utile que nous donnions à nos lecteurs une idée de la maniere dont la double injection peut être appliquée à une machine à feu. Pour cela nous avons choisi le mécanisme représenté par la *fig.* 195, n° 1. Ce mécanisme, de l'invention de M. le chevalier de Bettancourt, n'est pas celui de son modele; mais il n'en est pas moins susceptible d'être appliqué à une machine à feu, et, vu sa simplicité, il est plus propre que l'autre à remplir l'objet d'instruction que nous avons ici en vue.

La vapeur vient à l'ordinaire de la chaudiere, qu'on a supprimée

Digitized by Google

pour rendre le dessin plus simple, passe par le tuyau *b*, et s'introduit par l'ouverture V dans l'espace dont le cercle *ee'* représente le profil. Cette chambre *ee'* a, outre l'ouverture V, deux autres ouvertures, l'une pratiquée vis-à-vis le canal *d*, pour communiquer, par le moyen de ce canal, avec la partie supérieure B du cylindre BB'; l'autre, pratiquée en V' et communiquant, par le moyen du tuyau ou canal V'*d'*, avec la partie inférieure B' du cylindre, dont le piston est représenté en X. L'espace ou chambre circulaire *e'' e'''* communique d'une maniere semblable avec les parties supérieures et inférieures du cylindre, par le moyen du canal *v'' d* et du canal *d'*. De plus, cette chambre *e'' e'''* communique, par le moyen de l'ouverture *v'''*, avec l'espace ou chambre *ff'*, où se trouve la soupape *j* adaptée à l'orifice par lequel sort l'eau d'injection destinée à condenser la vapeur : cette soupape est toujours ouverte, à moins qu'on ne veuille arrêter la machine; mais elle peut s'approcher plus ou moins de l'orifice, suivant la vîtesse qu'on veut donner au piston. Les issues V et V''' sont également toujours ouvertes.

Les ouvertures V', V'' et celles qui établissent la communication avec le cylindre par le moyen des canaux *d* et *d'* sont alternativement fermées par des robinets *gh*, *g'h'* d'une espece particuliere. La *fig.* 195, n° 2, représente le profil de l'un ou l'autre de ces robinets. La partie *gh*, courbée en arc de cercle, de même rayon que celui des profils *ee'*, *e'' e'''*, et tournant autour d'un axe placé au centre *o*, peut, dans sa révolution, fermer une ouverture quelconque, placée sur la circonférence des profils *ee'* et *e'' e'''*.

Tout cela bien entendu, supposons les choses dans l'état représenté par la *fig.* 195, n° 1, et le vide établi dans la partie supérieure du piston. La vapeur entre par l'ouverture V, trouve le canal *d* fermé, passe par le canal V'*d'*, ne peut point s'introduire dans l'espace *e'' e'''* à cause du robinet *g'h'*, mais s'introduit en entier dans la partie inférieure B' du cylindre. Elle agit donc surle piston X avec tout l'effort dont elle est capable: ce piston pousse le balancier avec sa tige XK, et la partie opposée de ce balancier agit également avec effort sur la verge ou barre destinée à donner le mouvement de rotation au volant. Le piston X étant parvenu au point le plus haut de sa course, le robinet *g'h'* fait une partie de révolution pour aller fermer l'ouverture V'' et cesser de fermer le canal *d'*; en même temps le robinet *gh* fait aussi une révolution pour aller fermer l'ouverture V' et cesse de fermer

Digitized by Google

le canal *d*. Le gas aqueux continuant d'entrer en V, qui ne cesse point d'être ouvert, trouve l'ouverture V' fermée, pénetre dans le canal *d*, et n'ayant aucune issue par l'ouverture V'', passe en entier dans la partie supérieure du cylindre : pendant ce temps, la vapeur qui étoit en B' sortant par *d'*, pénetre en V''', qui est toujours ouvert, et va se condenser vers la soupape *j*. Par ce moyen, la vapeur qui entre en B, agit avec tout son effort sur le piston X, qu'elle fait descendre, et qui reproduit en descendant, des effets égaux à ceux qu'il avoit opérés en montant. Le piston étant parvenu au point le plus bas de sa course, le robinet *g h* qui ferme l'ouverture V' et le robinet *g' h'* qui ferme l'ouverture V'' reviennent chacun à leur premiere situation, et ainsi de suite.

1347. L'étendue de la marche du piston doit être telle que les ouvertures des canaux *d* et *d'*, placés du côté du cylindre, ne soient jamais fermées par le piston.

1348. L'eau de condensation abandonne de l'air, et produit un gas aqueux, comme on a vu art. (1342), pour le cas de la *fig.* 194 : l'air et l'eau sont enlevés par des moyens semblables à ceux que représente cette figure, et que nous décrirons quand il en sera temps. On voit que, dans la machine que nous venons de décrire, l'injection et la condensation ont continuellement lieu, la soupape d'injection ne cessant pas d'être ouverte.

1349. Il est presque inutile de dire que le mécanisme intérieur est mu par des moyens analogues à ceux de la *fig.* 194, en sorte qu'on n'a besoin d'agents étrangers au mécanisme de la machine, que pour entretenir le feu.

Description sommaire et provisoire du mécanisme au moyen duquel la machine à double effet, produit le mouvement de rotation.

1350. La *figure* 196 donne une idée du mécanisme au moyen duquel la machine à feu à double effet, produit le mouvement de rotation. Q est l'extrémité du balancier, et C le centre du mouvement de rotation qu'on veut produire : l'extrémité R de la verge RQ est assujettie dans un point de la circonférence *tu*, de maniere que le mouvement alternatif de l'extrémité Q qui fait hausser et baisser le point R, détermine la rotation de tout l'équipage auquel le mouvement de ce point R est assujetti. Lorsque la direction de l'impulsion ou de la traction passe par le centre C, l'énergie pour faire tourner est nulle; mais le volant VO, qui, par la rotation antérieure, a acquis une quantité de mouvement qu'il conserve, détermine le mouvement en cet instant, et fait dépasser au point R le petit espace dans lequel le moment de l'impulsion est nul.

Le volant VO a été imaginé par un Anglois, fabriquant de

biere, qui en a le premier fait usage en 1780. On voit qu'une révolution de ce volant répond à une montée et à une descente de la verge RQ : mais on peut, en employant des engrenages, faire varier à volonté le rapport entre la marche du volant et celle de la verge, comme nous le verrons dans la suite : la description que nous donnons n'est que provisoire.

Fin de la cinquieme et derniere section de la premiere partie de la nouvelle Architecture Hydraulique.

Digitized by Google

Digitized by Google

TABLE
DES MATIERES
CONTENUES
DANS LA PREMIERE PARTIE.

DISCOURS PRÉLIMINAIRE.

PRINCIPES DE LA MÉCANIQUE.

Notions préliminaires (1).

(1). Origine commune des connoissances humaines.
(2). Comment les sciences mathématiques en sont dérivées.
Idem. Les notions de mouvement et d'impénétrabilité particulieres à la mécanique.
Idem. L'idée du mouvemement n'est qu'accessoire en géométrie.
(3). La mesure du mouvement, indépendante de sa nature et de sa cause, est la premiere chose qu'on doive se proposer, vu que les phénomenes qui l'accompagnent nous en fournissent immédiatement les moyens.
Idem. Division générale du mouvement en *uniforme* et en *varié.*
Idem. Mesure du mouvent uniforme, d'où résulte la notion de la *vîtesse.*
(4). Comment on doit traduire l'expression $V = \frac{E}{T}$, dont l'énonciation ordinaire est absurde.
(5). Dans le mouvement uniforme, les espaces et les temps peuvent être représentés par les co-ordonnées d'une ligne droite.
(10). Dans les mouvements *variés*, les espaces et les temps peuvent être représentés par les co-ordonnées d'une ligne courbe.
(11). Forme générale de la courbe, suivant que le mouvement est *accéléré* ou *retardé.*
(12). Ce que deviendroit la courbe si le mouvement devenoit tout-à-coup uniforme.
(13). Deux questions fondamentales sur la théorie des mouvements variés.
(14). Solution de la premiere question.
(16). Application aux mouvements uniformément accélérés.
(17). Leurs propriétés peuvent être représentées par celles d'une parabole.
(20). Observation importante sur la comparaison des mouvements uniformément accélérés entre eux.

(1) Les chiffres de renvoi indiquent les articles et non les pages.

Digitized by Google

(21). Application de la théorie précédente au mouvement des graves mus près la surface de la terre.

(22). Du mouvement uniformément accéléré lorsqu'il y a une vitesse initiale.

(23) Deuxieme question fondamentale sur la théorie des mouvements variés. Solution de cette question.

(24). Transformation des équations finies du mouvement varié en équations différentielles.

(25). Ce qu'on doit entendre par la quantité φ dans ces équations.

Idem. Le mouvement uniformément varié peut servir à comparer entre eux les mouvements variés en général.

(26). φ est constant dans les mouvements uniformément variés. Sa valeur absolue dans le cas de la gravité.

(27). Quelle est la cause du mouvement?

La solution de cette question est impossible et inutile : la connoissance et la mesure des effets est la seule chose qui nous intéresse.

(28). Un corps en repos ou en mouvement peut-il, par lui-même, et indépendamment de toute cause étrangere, changer son état?

(29). Premiere loi. Lorsque le corps est en repos.

(31). Deuxieme loi. Lorsque le corps est en mouvement.

Démonstration de cette loi.

(38). Ce qu'on doit entendre par les mots *équilibre* et *quantité de mouvement.*

Idem. Circonstance du choc, lorsqu'il n'y a pas équilibre.

1°. Lorsqu'un des corps est en repos.

Vîtesse commune, après le choc, lorsque le corps choqué est en repos.

2°. Lorsque les deux corps sont en mouvement, et allant en sens contraire.

Vîtesse commune après le choc, lorsque les deux corps vont en sens contraire.

3°. Lorsque les deux corps sont en mouvement, et vont dans le même sens.

Vîtesse commune après le choc, lorsque les deux corps vont dans le même sens.

Démonstration immédiate du troisieme cas.

Idem. La théorie du choc des corps peut servir à donner un sens raisonnable à cette expression, *l'inertie est proportionnelle à la masse.*

(40). Ce qui a lieu, lorsque, dans la théorie du choc des corps, on considere des vîtesses infiniment petites.

Idem. Détermination du sens qu'on doit attribuer, dans le cours de ce Traité, aux mots *force, puissance, force motrice* et *force accélératrice.*

Idem. Comparaison des effets d'une *force* et de ceux d'une *puissance* dans le premier instant de son action.

Idem. Ce qu'on doit entendre par le mot *pression.*

Idem. Effet d'une force opposée à une puissance dont l'action se continue.

Exemple des effets de cette opposition pris dans la nature.

(41) Force des corps en mouvement, considérée relativement à la somme des obstacles qu'ils peuvent vaincre, laquelle est égale à la quantité de mouvement.

Idem. La même force considérée relativement au nombre des obstacles, qui est proportionnel au quarré de la vîtesse quand les obstacles sont égaux.

Idem. Disputes des mathématiciens sur la mesure de la *force* pour laquelle on peut adopter l'une ou l'autre des considérations précédentes.

Cette dispute n'est qu'une dispute de mots; la perfection des sciences tient à celle des signes.

Digitized by Google

(42). Mouvement d'un corps produit par plusieurs *forces* ou *puissances*, toutes dirigées dans la même ligne droite.

Idem. Ce qui a lieu lorsque deux *forces* qui font un angle entre elles agissent sur un corps.

(43). Principe fondamental sur le mouvement d'un corps mu par l'action simultanée de deux forces.

(44). Ce que c'est que *forces composantes* et *forces résultantes.*

Idem. Conditions pour qu'un point sollicité par trois forces reste immobile.

(45). Ce qui arrivera si, à l'action combinée de deux forces, on substitue celle de deux puissances.

Idem. Origine et principe du mouvement en ligne courbe.

La considération de ce mouvement complete les recherches à faire sur les premiers phénomenes sensibles du mouvement.

Idem. Mouvement d'un corps modifié par la rencontre d'obstacles inébranlables obliques à sa direction.

Vîtesse perdue à la rencontre de ces obstacles.

(48). Vîtesse du corps après cette rencontre.

(49). Mouvement le long d'une courbe.

Ce mouvement ne diminue rien de la vîtesse.

(50). Communication directe du mouvement par le moyen de cordes, verges, etc.

Ces moyens n'ajoutent rien à la force du moteur.

Idem. Autre moyen de communiquer le mouvement, qui ajoute à la force.

Idem. Origine du levier.

(51). Sa théorie n'est que celle du parallélogramme des forces, présentée sous un certain aspect.

Idem. Principe du parallélogramme des forces appliqué au levier.

(52). Propriété fondamentale du levier.

Axe servant de point d'appui.

(53). Egalité entre le rapport de trois forces en équilibre qui concourent à un point, et celui des perpendiculaires menées sur leurs directions.

(54). Application au levier.

Idem. Avantage du levier en mécanique.

(55). Propriété du levier droit.

(56). Ce qui arrive, lorsque les forces ou puissances appliquées au levier se trouvent d'un même côté par rapport au point d'appui.

(57). Conditions de l'équilibre dans ce cas.

Idem. Considérations générales sur l'équilibre du levier; ce qu'on doit entendre par le mot *résultante* pris dans le sens le plus général.

(58). Equilibre dans le levier droit lorsque le point d'appui est à une des extrémités.

(60). Ce qu'on doit entendre par les mots *moteur*, *résistance*; ce que c'est que levier du premier, du second ou du troisieme genre.

(61). Tous les effets, en mécanique, qui ne se rapportent pas immédiatement au levier, peuvent être rapportés au *plan incliné.*

(62). Ce que c'est que le *plan incliné* en mécanique.

Idem. Théorie du plan incliné.

(64). Corps animé d'une puissance dont la force accélératrice est constante, se mouvant sur un plan incliné.

(66). Relation entre la vîtesse qu'il acquiert le long du plan, et celle qu'il eût acquise librement.

(68). Relation entre les espaces qu'il parcourt, et ceux qu'il eût parcourus librement.

(70). Relation entre le temps employé à parcourir la corde d'un cercle, et celui employé à parcourir le diametre.

Digitized by Google

(72). Conditions de l'équilibre lorsqu'un corps placé sur un plan incliné est livré à l'action des deux moteurs.

(73). Recherches sur l'action mutuelle de deux corps placés sur deux plans inclinés adossés, et liés ensemble par une corde.

(75). Conditions de l'équilibre entre ces deux corps.

(76). Ce que c'est que le coin.

Sa théorie se rapporte à celle du plan incliné.

Récapitulation des principes généraux de la mécanique.

(77). La doctrine qu'on vient d'exposer renferme le germe de la solution de toutes les questions de mécanique. Nécessité de bien fixer dans l'esprit l'ensemble de tous les principes qui la composent.

(78). L'ordre naturel exige qu'on s'occupe d'abord des premiers phénomenes sensibles du mouvement; quels ils sont.

Idem. De l'espace et du temps considérés comme phénomenes simultanées.

Usage qu'on fait de cette considération pour la mesure des espaces.

(79). Origine des différents genres de mouvements.

(80). Maniere de distinguer les différentes especes de mouvements uniformes; d'où dérive la notion de la *vitesse*.

(81). Les notions de *mouvement uniforme*, *mouvement varié*, *vitesse*, dérivent de la simultanéité de l'espace parcouru, et du temps.

(82). Maniere de distinguer les différentes especes de mouvements variés; cette maniere n'est qu'une imitation de ce qu'on a fait pour les mouvements uniformes qui servent d'échelle ou de terme de comparaison dans tous les calculs relatifs aux mouvements variés.

(85). *Inertie* des corps; en quoi elle consiste.

(86). Différentes dénominations données à la cause qui peut surmonter l'inertie des corps suivant les circonstances où on la considere.

(87). De la communication du mouvement.

(93). Deux manieres de mesurer la force suivant les points de vue sous lesquels on considere son effet.

(94). Origine du mouvement en ligne courbe; principe qui sert à résoudre les questions qui y ont rapport.

(98). Du levier et du plan incliné; ces machines servent de base à toutes celles qu'on peut imaginer.

(99). La théorie de ces deux machines n'exige aucun principe différent des trois principes généraux établis précédemment.

(100). Résumé.

(101). Motifs de la méthode suivie dans l'exposition des notions préliminaires de la mécanique.

(102). Division de la mécanique.

SECTION PREMIERE.

DE LA STATIQUE.

Composition et décomposition d'un nombre quelconque de forces ou de puissances dirigées soit dans un même plan, soit dans des plans quelconques.

(103). Le théorême qui établit les propriétés de l'équilibre entre trois moteurs fournit le moyen de trouver la résultante d'un nombre quelconque de moteurs.

(104). Application à quatre moteurs agissant dans le même plan.

(105). Le même procédé peut s'étendre à un nombre quelconque de moteurs.

(106). Opération inverse par laquelle on substitue un nombre quelconque de moteurs à un moteur unique.

(107). Lorsqu'on substitue deux moteurs *composante* à un moteur unique, la valeur et la direction de l'un d'eux est arbitraire.

Idem. On peut, à des moteurs qui sont dans un même plan, substituer des moteurs qui n'y sont pas.

(108). La résultante de plusieurs moteurs paralleles est égale à leur somme, et parallele à leur direction.

Démonstration de cette propriété lorsque les moteurs sont dans le même plan.

(109). Elle a encore lieu lorsqu'ils sont dans des plans différents.

(110). Méthode pour réduire un nombre quelconque de moteurs agissant dans des plans quelconques à deux moteurs, dont l'un soit dirigé dans un plan donné et l'autre perpendiculaire à ce plan.

(111). Autre méthode pour les réduire à trois moteurs paralleles à trois axes perpendiculaires entr'eux, et passant par un même point.

Premiere propriété générale de l'équilibre.

(112). Propriété générale de l'équilibre relativement au mouvement de translation.

Démonstration de cette propriété.

(113). Ce qu'elle devient lorsque tous les moteurs sont dans le même plan.

(114). Lorsqu'il y a un point fixe dans le systême.

(115). L'inverse de la proposition qui énonce la propriété générale ci-dessus n'est pas toujours vraie.

(116). Cas où il y auroit un équilibre absolu.

Des moments.

(117). Equation entre les produits de trois moteurs en équilibre par les perpendiculaires menées sur leurs directions d'un point pris dans leur plan.

Démonstration de cette égalité.

(118). Cas particuliers de cette égalité; équation qui les réunit tous.

(119). Ce que c'est que le moment d'un moteur.

(120). Egalité entre les moments des deux composantes et celui de leur résultante.

Digitized by Google

(121). Egalité entre la somme des moments d'un nombre quelconque de moteurs dans le même plan, et celui de leur résultante.
(123). Cas où le moment de la résultante est égal à zéro.
(124). Application des moments au mouvement de rotation.
(125). Propriété générale déduite de cette application.
(126). Ce que devient cette propriété pour trois moteurs en équilibre, le moment de la résultante étant égal à zéro.
(127). Propriété qui résulte du cas précédent pour l'équilibre de rotation, entre les deux moteurs agissant dans le même plan.
Application de cette propriété à un nombre quelconque de moteurs agissant dans le même plan.
(130). Elle a encore lieu lorsque les moteurs agissent dans des plans paralleles.

Seconde propriété de l'équilibre.

(132). Application de la théorie des moments à l'équilibre de rotation.
(133). Equations qui établissent cet équilibre.
Récapitulation des conditions de l'équilibre entre un nombre quelconque des moteurs dirigés dans des plans quelconques.

Des vîtesses virtuelles.

(136). Ce que c'est que les vîtesses virtuelles considérées quant au mouvement de rotation.
(137). Ce que c'est que les vîtesses virtuelles considérées quant au mouvement de translation.
(138). Considérations sur la maniere dont on doit envisager les vîtesses virtuelles.
(139). Principe général des vîtesses virtuelles.
(140). Il n'en existe pas de démonstration directe; généralité de ce principe.
(141). Différentes applications de ce principe.
Au choc des corps durs.
(143). Au levier.
(144). Au plan incliné.

Formules générales d'équilibre déduites du principe des vîtesses virtuelles.

(145). Un corps peut toujours, pendant un instant, être supposé se mouvant ou tendant à se mouvoir autour d'un centre.
(147). Application du principe des vîtesses virtuelles à la recherche des conditions de l'équilibre pour le mouvement de translation.
(150). Equations qui expriment ces conditions.
(151). Application du principe des vîtesses virtuelles à la recherche des conditions de l'équilibre pour le mouvement de rotation.
(152). Equations qui expriment ces conditions.
(153). L'équilibre de translation, par rapport à trois axes perpendiculaires entre eux, a lieu par rapport à un axe quelconque.
(154). Il en est de même de l'équilibre de rotation par rapport à un axe quelconque, passant par le point de rencontre des trois premiers; mais cette propriété n'est point une conséquence immédiate de la premiere.
Démonstration de cette propriété qui fournit une méthode pour décom-

Digitized by Google

poser les mouvements de rotation d'une maniere analogue à celle employée pour les mouvements de translation.

(155). Ce que c'est que l'*axe instantané de rotation.*

(156). Avantage des dernieres formules d'équilibre sur celles données précédemment. Conformité des unes et des autres.

(159). Ce que deviennent les dernieres formules d'équilibre dans le cas du parallélisme des moteurs.

(160). Point autour duquel les moteurs paralleles sont en équilibre, quelle que soit leur direction ou la position du corps.

(161). Ce qu'on entend par *centre de gravité.*

(163). Méthode et formules pour déterminer le centre de gravité.

(165). Méthode analogue à la précédente pour déterminer le point par où passe la résultante de plusieurs moteurs paralleles.

(164). Énonciation de cette méthode par la théorie des moments.

De la pesanteur.

(166). Ce que c'est que *pesanteur*, *ligne verticale* et *horisontale.*

(167) Gravitation, loi générale de la nature, d'où dérive la pesanteur.

(168). Formule qui exprime la force accélératrice qui résulte de la gravitation.

(169). Cas où cette force accélératrice peut être regardée comme constante; ce cas a lieu près la surface de la terre.

(171). La pesanteur n'est pas tout-à-fait la même à différentes distances de l'équateur.

(172). Elle communique la même vitesse, quelle que soit la masse et nature du corps sur lequel elle agit.

(173). Sa direction est sensiblement parallele dans un espace de peu d'étendue.

(174). Ce que c'est que le poids d'un corps; il est proportionnel à la masse.

(175). De la pesanteur spécifique.

(176). Ce que c'est que la densité.

Idem. Usage à faire des équations dans lesquelles entrent le poids, la pesanteur spécifique et la densité.

Idem. Cas où l'on veut avoir égard aux variations de la pesanteur.

(178). Ce que c'est que la hauteur due à une vitesse; tables qui y sont relatives.

Idem. Pourquoi le centre de gravité est ainsi nommé.

Des centres de gravité.

(179). Application des formules des centres de gravité au cas de la pesanteur.

(180). Introduction de la densité dans ces formules.

(181). Cas où la densité est constante.

(182). Position du centre de gravité dans les différentes hypotheses de densité.

(183). Différentes dénominations de ce centre d'après ces hypotheses.

(184). Centre de gravité des figures ou corps symmétriques.

(185). Cas où les centres de gravité de plusieurs corps sont dans la même ligne droite.

(186). Centre de gravité commun de plusieurs corps, dont les centres de gravité particuliers sont connus.

(188). Formule pour trouver le centre de gravité d'un arc de courbe.

(191). Formule pour trouver le centre de gravité des surfaces planes.

(193). Formules pour trouver le centre de gravité des solides dont les éléments ont leur centre de gravité dans la même ligne droite.

Digitized by Google

(194). Cas où le solide est de révolution, et formules pour le centre de gravité, tant de sa surface que de son volume.
(195). Cas où l'on cherche la distance du centre de gravité à un point quelconque pris sur l'axe.

Applications des formules précédentes à quelques cas particuliers.

(196). Centre de gravité du cercle et des polygones réguliers.
(197). Centre de gravité d'un arc du cercle.
(199). Centre de gravité d'un trapeze.
(200). Centre de gravité d'un triangle.
(201). Centre de gravité d'un segment de cercle.
(202). Centre de gravité d'un secteur.
(203). Centre de gravité de la surface d'un cône tronqué ou non tronqué.
(204). Centre de gravité de la surface d'une portion de sphere comprise entre deux plans paralleles, contenant le cas du segment sphérique.
(205). Centre de gravité des cônes, pyramides, etc.
(208). Centre de gravité d'un segment et d'un secteur sphérique.
(210). Centre de gravité d'un solide engendré par la révolution d'une parabole.
(211). Centre de gravité d'un segment ellipsoïdal.
Idem. Centre de gravité du solide engendré par la révolution d'une hyperbole.
(212). Lorsque les surfaces et les corps sont soumis à des loix, la recherche de leur centre de gravité n'a en général d'autre difficulté que celle du calcul.

Propriété des centres de gravité pour la mesure des surfaces et des solidités.

(213). Egalité entre les surfaces de révolutions et le produit des courbes génératrices par la circonférence que décrit leur centre de gravité.
(215). Application du théorème précédent au cas où l'on a plusieurs surfaces de révolution rapportées au même axe.
(217). Egalité entre un solide de révolution, et le produit de la surface génératrice par la circonférence que décrit son centre de gravité.
(219). Cas où l'on a plusieurs solides de révolution rapportés au même axe.
(221). Développement et exposition d'un théorême très général pour mesurer un solide engendré par le mouvement d'un plan.

Méthode pour déterminer les centres de gravité des surfaces et des solides quelconques soumis ou non à une loi susceptible d'être exprimée par une équation.

(223). Avantage de la méthode qu'on va exposer. Auteurs qui en ont traité.
(224). Recherche d'une formule pour mesurer une surface plane quelconque.
Regle déduite de la formule précédente, pour mesurer une surface plane quelconque.
(225). Observations sur quelques cas particuliers de cette formule.
(226). Recherche d'une formule pour mesurer un solide engendré par la révolution d'une surface plane quelconque.
(227). Application de cette formule à quelques cas particuliers.
(228). Recherche d'une formule pour trouver le centre de gravité d'une surface plane quelconque.

Digitized by Google

(229). Regle déduite de la formule précédente, pour trouver le centre de gravité d'une surface plane quelconque.
(230). Formule pour trouver le centre de gravité d'un solide de révolution engendré par une surface plane quelconque.
(231). Application de cette formule à quelques cas particuliers.
(232). Formule pour mesurer le volume d'un solide quelconque, régulier ou irrégulier.
(233). Formule et méthode pour déterminer le centre de gravité d'un solide quelconque régulier ou irrégulier.
Idem. Remarque sur les sections ou *profils* des corps.
(235). Méthode pour déterminer le centre de gravité des corps irréguliers lorsqu'on peut les soulever, les suspendre, etc.

De l'équilibre dans les machines.

(236). Notions générales sur ce qu'on doit entendre par machines en mécanique.
(237). La machine funiculaire renferme toutes celles où l'action des moteurs et des résistances se transmet sans altération à un point ou à un corps.
(238). Les moteurs qui exercent leur action au moyen et dans la direction de verges inflexibles, rentrent dans le cas funiculaire.
(239). Ordre à suivre dans l'exposition de la théorie des machines.
(240). Division générale des machines.
(241). On n'aura point égard dans cette premiere section, au frottement, à la roideur des cordes, etc. et à d'autres circonstances physiques qui formeront l'objet de la cinquieme. Motifs et utilité de cette méthode.

De la machine funiculaire.

(242). La tension et la direction d'une corde représentent l'effort et la direction du moteur qui y est appliqué.
(243). Développement des propriétés fondamentales d'un système de cordes tendues et en équilibre.
(247). Exposition de ces propriétés.
(248). Cas où il y a des points fixes dans le système.
(249). Conséquence de ce qui précede pour le cas où un corps est sollicité par plusieurs moteurs au moyen d'une machine funiculaire.
(251). Conformité de la théorie qu'on vient d'exposer avec l'idée qu'on avoit donnée de la machine funiculaire.
(252) Quelles formules doivent donner les conditions de l'équilibre dans la machine funiculaire.
(253). Usage de ces formules pour vérifier les conditions de l'équilibre par des projections.
(256). Exposition d'une méthode pour faire cette vérification.
(257). Elle peut servir à combiner graphiquement l'équilibre d'une machine funiculaire.
Idem. Application du calcul à déterminer l'équilibre d'un système de corde.
(258). Formules pour cet objet.
(259). Réduction de ces formules au moindre nombre possible d'indéterminées.
Elles peuvent servir à déterminer la tension et la direction inconnue d'une des cordes d'une machine funiculaire, ces choses étant connues pour les autres cordes.
(261). Et en général à déterminer la résultante de plusieurs moteurs dirigés dans des plans quelconques et agissant sur un corps.

Idem. La résultante de tous les moteurs appliqués à une machine funiculaire est plus petite que la somme de ces moteurs.

(262). Cas où les moteurs et les cordes sont dans le même plan.

(263). Méthode pour trouver dans ce cas la tension et la direction inconnues d'une des cordes, ou la résultante d'un nombre quelconque de moteurs agissant dans le même plan.

(264). Cas où toutes les cordes dirigées dans un même plan, aboutissent de plus à un point unique.

(265). Cas où le nombre des moteurs est réduit à trois.

(267). Ce qui a lieu lorsque le point de réunion n'est pas un nœud fixe. Circonstances où la machine funiculaire donne de l'avantage au moteur, qui néanmoins ne contredisent pas les notions données précédemment de cette machine.

(268). Du polygone funiculaire.

(269). Recherches des formules pour trouver les tensions et les directions des côtés du polygone funiculaire, supposés dans des plans quelconques, lorsque les quantités et les directions des moteurs sont données.

(271). Cas où les extrémités du polygone funiculaire tiennent à des points fixes.

(272). Cas où tous les côtés du polygone funiculaire sont dans le même plan.

(273). Formules pour trouver les rapports entre les moteurs appliqués au polygone funiculaire, connoissant les directions respectives des côtés du polygone entre eux et celles des moteurs.

(274). Usage des formules précédentes pour trouver l'équation de la courbe funiculaire.

(275). Equation générale de la courbe funiculaire plane.

(276). Cas où les moteurs sont perpendiculaires à la courbe qui renferme celui où cette courbe est un cercle.

(277). Cas où la corde est pesante et uniformément grosse.

(278). Equation finie de la chaînette.

(279). Rectification de la chaînette.

(280). Construction de cette courbe.

(281). Recherche des équations de la courbe funiculaire à double courbure.

Du levier.

(282). Recherche des équations au moyen desquelles trois des six choses à connoître dans un levier simple, de dimensions données; savoir la pression du point d'appui, sa direction, le moteur, la résistance, et leurs directions étant connues, on peut déterminer les trois autres.

(286). Cas où le problême est indéterminé, et par quelle raison il le devient.

(287). Théorie du levier mobile dans tous les sens autour de son point d'appui, et sollicité par un nombre quelconque de moteurs et de résistances dirigés dans des plans quelconques.

(289). Conditions générales de l'équilibre dans le cas où le levier est mobile dans tous les sens autour de son point d'appui, et sollicité par un nombre quelconque de moteurs et de résistances dirigés dans des plans quelconques.

(291). Disposition la plus commode des formules pour trouver les conditions de l'équilibre du levier dans les hypotheses précédentes.

(293). Maniere de calculer la charge du point d'appui toujours dans les même hypotheses.

(294). On peut toujours déterminer deux résistances appliquées à deux points donnés qui fassent équilibre au mouvement de translation et de rotation d'un corps, nombre d'équations et d'indéterminées du problême.

Digitized by Google

(295). Cas où les moteurs et les résistances appliqués au levier sont dirigés dans le même plan.

Déterminations arbitraires dans ce cas.

(296). Méthode pour trouver la distance à un point donné dans un plan donné de la résultante d'un nombre quelconque de moteurs agissant dans ce plan.

(297). Cas où les moteurs se trouvent dirigés dans des plans paralleles.

(298). Du levier pesant.

Idem. Conditions de l'équilibre du levier pesant dans différentes hypotheses.

Idem. Cas où la pesanteur seule d'une des branches du levier fait équilibre au moteur.

Idem. Dimensions du levier pesant du second genre, qui donne le plus grand avantage au moteur.

(299). Observations sur les différentes especes de moteurs et de résistances en équilibre dans le levier.

De la poulie.

(300). Division générale de la poulie en fixe et mobile.

(301). De la poulie fixe.

(302). Conditions de l'équilibre dans la poulie fixe.

(303). De la poulie mobile.

(304). Conditions de l'équilibre dans les poulies fixe et mobile.

(305). La poulie fixe ne fait rien gagner au moteur, et le plus grand avantage que lui donne la poulie mobile a lieu quand les cordes sont paralleles.

(306). Conditions de l'équilibre dans différentes combinaisons d'un nombre quelconque de poulies fixes et mobiles, et maniere la plus avantageuse de faire ces combinaisons.

(308). Des moufles.

(309). Conditions de l'équilibre dans les moufles.

(311). Cas où les cordes sont paralleles dans les moufles.

Idem. Variations du rapport entre le moteur et la résistance, selon que la corde est attachée à la moufle fixe et à la moufle mobile.

(312). Des moufles verticales. Proportions des poulies pour rendre dans l'une d'elles les cordes paralleles.

(314). Maniere de rapporter à la ligne horizontale les angles rapportés précédemment à la verticale.

Du tour, treuil, cabestan, etc.

(315). Description et usage du tour.

(316). Maniere d'envisager le tour pour en donner la théorie.

(317). Théorie du tour contenant les conditions de l'équilibre, la direction et la quantité de la charge ou pression de chaque point d'appui.

(318). Différentes propriétés déduites de la théorie précédente.

(319). Méthode pour trouver les conditions de l'équilibre, la direction et la quantité de la charge des points d'appui, quelles que soient les directions et les quantités des moteurs et résistances appliqués au tour.

Idem. Cas où on a égard à la pesanteur du tour.

(320). Comment on doit avoir égard au diametre de la corde et à la quantité de son *enroulage* autour du cylindre.

(321). Des roues dentées, pignons, engrenages de différentes sortes, etc.

(322). Analogie entre le tour et les roues dentées.

(323). Recherche des conditions de l'équilibre dans les roues dentées.

Digitized by Google

(324). Exposition de ces conditions.
(325). Rapport entre les nombres des tours des roues dentées qui s'engrainent au moyen de pignons.
(326). Expression générale du rapport entre le nombre de tour du premier pignon et le nombre de tours de la derniere roue.
(327). Trouver le nombre de roues et de pignons intermédiaires lorsque le rapport précédent est donné. Indétermination du problême.
(328). Description et théorie du cric.

Du plan incliné.

(330). Détermination des conditions de l'équilibre d'un corps posé sur un plan, quelles que soient la direction, la quantité et le nombre des moteurs qui agissent sur lui.
(333). Récapitulation des conditions précédentes d'équilibre, et des circonstances qui rendent applicables les équations qui les renferment.
(334). Valeur de la pression totale qu'éprouve le plan de la part du corps qui y est posé.
(335). On ne connoît encore aucun moyen de déterminer la pression particuliere de chaque point de contact d'un corps posé sur un plan.
(337). Deux corps pesants étant liés ensemble par une corde qui passe sur une poulie, et l'un d'eux assujetti à se mouvoir sur une courbe donnée, trouver une autre courbe telle que le second corps y étant placé à un point quelconque, les deux corps soient toujours en équilibre.
Solution aisée de ce problême par le principe des vîtesses virtuelles.
La distance du centre de gravité des deux corps à une horizontale placée au-dessus, est toujours un *maximum*.
Usage de cette propriété pour construire avec facilité la courbe cherchée.
(338). Solution du problême précédent par le principe d'Huyghens : ce principe dérive de celui des vîtesses virtuelles.

De la vis.

(339). Description de la vis à filets triangulaires et quarrés.
Ce que c'est que l'écrou d'une vis.
(340). Usage de la vis : l'avantage du moteur est le même, soit que la vis ou l'écrou soient mobiles.
(341). Recherche des conditions de l'équilibre dans la vis.
(342). Enonciation de ces conditions.
(343). De la vis sans fin, ou vis d'Archimede.
Idem. Conditions de l'équilibre dans la vis sans fin, 1°. dans le cas d'une seule roue.
(344). 2°. Dans le cas d'un nombre quelconque de roues et de pignons.

Du coin.

(346). Du coin, de ses usages et de son utilité ; instruments, procédés dans les arts, et objets observés dans la nature, qui se rapportent à cette machine.
(347). Difficultés dans la théorie du coin, venant de notre ignorance de la nature des corps ; marche à suivre pour exposer cette théorie.
(348). Conditions de l'équilibre dans le coin lorsqu'on a à contre-balancer deux résistances perpendiculaires à ses côtés.
(349). Valeur de l'effort que fait, perpendiculairement à chacun de ses côtés, un coin qui tend à séparer deux corps.

Digitized by Google

Conditions de l'équilibre lorsqu'un coin tend à séparer deux corps qui ne peuvent avoir qu'un mouvement de rotation.

(351). Conditions de l'équilibre lorsqu'un coin tend à séparer deux corps qui peuvent glisser sur leur base.

(352) Recherche des conditions de l'équilibre entre deux portions de coin animées par des moteurs quelconques et s'appuyant l'une contre l'autre.

(353). Equation qui exprime ces conditions.

(354). Réflexion sur cette équation.

(355). Application de cette équation au cas où les portions de coin sont soumises à la pesanteur.

Idem. Propriété générale de l'équilibre d'un nombre quelconque de portions de coin soumises à la pesanteur et s'appuyant les unes contre les autres.

De l'équilibre des voûtes.

(358). Importance et difficultés de l'art de la construction des voûtes, sa perfection chez les modernes.

Principe qui doit servir de base à la comparaison entre les anciens et nous, en matiere de construction.

L'art de la construction des ponts formera une section particuliere de cet ouvrage; questions intéressantes qui y seront traitées.

(359). Description sommaire des parties dont une voûte en berceau est composée.

Divisions de ce chapitre.

(361). De la poussée des voûtes contre les pieds-droits ou culées.

Formule dans l'hypothese que le pied droit peut être renversé.

Formule dans l'hypothese que le pied-droit peut être repoussé.

(362) La premiere de ces formules renferme toutes celles données jusqu'à présent; néanmoins la seconde hypothese est celle qui a lieu le plus souvent dans les grandes voûtes.

(363). De l'équilibre des voussoirs entre eux.

(364). Equations qui renferment les conditions de cet équilibre.

Recherche d'une équation qui donne l'épaisseur de la voûte ou la longueur du joint de lit à chaque point d'une voûte en équilibre.

(365) Les équations précédentes renferment tout ce qui est nécessaire pour l'*épure*, l'*appareil* et le *toisé* d'une voûte dont les voussoirs sont en équilibre.

(366). Différentes applications de ces équations.

(368). Examen de la loi que suivent les épaisseurs des voûtes en équilibre, et qui sont assujetties à une courbure donnée.

(369). Des effets du frottement, et de l'adhésion relativement à l'équilibre des voûtes.

(371). Les voûtes en équilibre, dans l'hypothese du frottement, ne doivent pas avoir autant d'épaisseur aux reins, que si les voussoirs n'avoient pas de frottement. Effets qui ont lieu lors du décintrement des grands ponts; cas où il est utile d'employer les équations d'équilibre données ci-devant.

(372). Combien il est important que la pierre dont les voussoirs sont composés ait la dureté nécessaire.

(373). Evaluation de la pression de la clef d'une voûte.

(374). Réponse à une difficulté qu'on peut faire contre cette évaluation.

(375). Recherche d'une formule pour déterminer les plus grandes ouvertures des arches, et les plus petites longueurs de coupe des clefs relativement à la dureté de la pierre qu'on emploie.

Maniere de faire usage de cette formule.

Réflexion sur cette formule, et sur la hardiesse de dimensions qui en résul-

Digitized by Google

tent; usages à en faire lorsqu'on aura rapporté les expériences faites sur la dureté des pierres.

(377). Complément de la théorie de l'équilibre des voûtes en berceau; recherches de l'équation la plus générale qui en exprime les conditions.

Cette équation est la même que celle de la courbe funiculaire plane.

(378). Conditions qui manquent dans cette équation; il seroit impossible et inutile de les y faire entrer.

Ouvrage de M. l'abbé Bossut sur l'équilibre des voûtes.

(379). Différentes questions d'équilibre renvoyées aux sections suivantes et à la partie descriptive de cet ouvrage.

SECTION II.

DE LA DYNAMIQUE.

Introduction à cette section.

(380). La solution des problèmes sur le mouvement tient à celle des questions d'équilibre.

La dynamique est une science moderne; ouvrages à consulter sur son histoire.

(381). Division de la dynamique.

Principe général du mouvement.

(382). Principe général du mouvement des corps.

Ce principe est clair, simple et facile à concevoir.

(383). Application de ce principe au choc des corps durs.

(384). On trouve dans ce principe et celui des vîtesses virtuelles la confirmation de ce qui a été dit au commencement de cet ouvrage sur les principes fondamentaux de la mécanique.

Du mouvement des centres de gravité.

(385). Conséquences tirées des propriétés du centre de gravité pour le mouvement de ce centre; sa direction et sa vîtesse quand il se trouve sur la direction de la résultante des quantités de mouvement imprimées.

(386). Recherches sur la direction et la vîtesse du centre de gravité de plusieurs corps qui se meuvent parallèlement.

(387). Résultat de ces recherches.

(388). Recherche de la vîtesse du centre de gravité d'un corps, ou système de corps liés entre eux, livrés à l'action de moteurs parallèles, la résultante des quantités de mouvement imprimées passant hors du centre de gravité.

(389). Résultat de ces recherches.

(390). Cas où les moteurs ont des directions quelconques, et vîtesses du centre de gravité parallèlement à trois axes co-ordonnés.

(391). Direction et vîtesse du centre de gravité dans l'espace, les moteurs ayant des directions quelconques.

Indépendance réciproque des mouvements de translation et de rotation.

(393). Relation entre la somme des quantités de mouvement qui ont lieu entre

Digitized by Google

la vîtesse du centre de gravité et la masse du corps, lorsqu'il y a rotation autour d'un axe fixe qui ne passe pas par le centre de gravité.

Formules générales du mouvement d'un point ou d'un corps sollicité par des moteurs quelconques.

(394). Tout mouvement peut se décomposer en trois autres perpendiculaires entre eux.

(395) Recherches des formules pour le mouvement dans l'espace d'un corps sollicité par des moteurs quelconques.

(396). Exposition de ces formules.

(397). Propriétés qui résultent de ces formules.

(398). Analyse du cas où le corps est assujetti à se mouvoir sur une courbe donnée.

Formule du mouvement dans ce cas.

(399). Recherche de la pression qu'exerce sur une courbe un corps forcé de se mouvoir le long de cette courbe.

Formule qui donne cette pression.

Loi simple que suit cette pression quand il n'y a pas de force accélératrice.

Proportionnelle dans le cercle au quarré de la vîtesse.

(400). Recherche d'une formule pour le mouvement de rotation autour d'un axe fixe, les moteurs étant dirigés dans des plans perpendiculaires à cet axe.

(401). Exposition de cette formule.

Propriété qui en résulte.

(403). Cas où les moteurs ont des directions quelconques.

(404). Formule pour ce cas.

(405). Enonciation plus simple de cette formule.

(406). Formule pour le mouvement de rotation lorsque la vîtesse angulaire a des variations constantes ou proportionnelles à celles du temps.

Formule pour déterminer la vîtesse angulaire finie imprimée au commencement du mouvement.

(407). Ce que c'est que le moment d'inertie d'un corps.

(408). Du mouvement de rotation lorsque le corps est libre.

Axe instantané de rotation.

Axes principaux d'un corps.

Recherches à faire sur le mouvement de rotation, leur principale utilité.

Application de la théorie du mouvement de translation à quelques exemples.

(409). Application des formules du mouvement de translation au mouvement d'un corps lancé avec une vîtesse constante, et abandonné à l'action d'une puissance constante.

Equation de la courbe décrite par le corps.

Cette courbe est une parabole; cas où la gravité agit sur le corps, points où la courbe coupe l'horizon, et angle qu'elle forme avec lui.

Amplitude du jet, ce que c'est; son *maximum*, sa valeur générale; quelle est la plus grande hauteur à laquelle le mobile puisse s'élever.

Expression du parametre de la parabole.

Méthode pour déterminer par expérience la vîtesse de projection.

Une vîtesse de projection, et une amplitude données, répondent toujours à deux angles de projection.

Digitized by Google

(410). Un corps pesant descendant le long d'une courbe, acquiert la même vîtesse que s'il tomboit verticalement de la même hauteur.

(411). Valeur du temps qu'un corps pesant emploie à descendre le long d'une courbe.

(412). Dans la cycloïde, dont le grand axe est horizontal, le temps employé à descendre au point le plus bas est toujours le même, de quel point que parte le corps.

(413). Temps employé par un corps à descendre le long d'un arc de cercle; formule qui en donne la valeur.

(414). Simplification de cette formule lorsque l'arc est petit.

(415). Analogie entre les oscillations dans la cycloïde et dans les petits arcs de courbe quelconque.

(417). Méthode aisée pour trouver par expérience la longueur du pendule à secondes.

(416). Rapport entre la durée des oscillations et la longueur du pendule.

Rapport entre les longueurs et le nombre de vibrations de plusieurs pendules.

(418). Méthode aisée pour connoître par le moyen du pendule la force accélératrice de la pesanteur dans un lieu donné.

(419). Un corps grave emploie moins de temps à descendre le long d'un arc de cercle qu'à descendre le long de sa corde, quoique le chemin soit plus long.

Idem. Recherche de la courbe de la plus vîte descente.

La courbe de la plus vîte descente est une cycloïde.

Construction de cette courbe.

(420). Recherche de la courbe d'égale pression.

Equation de cette courbe.

Cas où la pression varieroit suivant une loi donnée.

Application de la théorie du mouvement de rotation.

(421). Transformation de la formule du mouvement de rotation en fonction de la vîtesse angulaire.

(422). Formule pour cette vîtesse dans le cas d'une communication de mouvement instantanée et finie.

(423). Propriétés qui résultent de cette formule.

(424). Méthode générale pour évaluer le moment d'inertie.

(425). Application de cette méthode aux surfaces ou solides irréguliers.

(426). Méthode pour déterminer le moment d'inertie par rapport à un axe quelconque parallele à un axe passant par le centre de gravité, pour lequel axe le moment d'inertie seroit connu.

(427). Détermination du pendule simple qui feroit ses oscillations dans le même temps qu'un pendule composé.

(428). Ce que c'est que le centre d'oscillation.

(429). Cas où la position du centre d'oscillation change sans que la distance du centre de gravité à l'axe de rotation varie.

(430). Considérations générales sur le problême du centre d'oscillation dans différentes hypotheses de forces accélératrices.

(431). Recherche de la distance à l'axe de rotation, de la résultante des quantités de mouvement qui ont lieu.

(432). Ce que c'est que le centre de percussion.

(433). En quoi different les problêmes des centres d'oscillation et de percussion.

(434). Ces centres se confondent avec celui de gravité quand ce dernier est infiniment éloigné de l'axe.

(435). Ce que c'est que le centre spontané de rotation; recherche de la position de ce centre.

(436). Propriété intéressante de ce centre.

Digitized by Google

(437). Conformité de la théorie précédente avec celle exposée dans un autre endroit de cet ouvrage.

Théorie physico-mathématique de la percussion.

(438). Ce qu'on entend par l'élasticité d'un corps.

(439). Insuffisance des théories ordinaires de la percussion; pourquoi elles ne sont pas applicables à la pratique.

(440). Expériences qui prouvent que, physiquement, une percussion peut faire équilibre à une pression.

(441). Ce phénomene s'explique par la loi de continuité.

(442). Comment la loi de continuité a lieu dans le choc physique des corps.

(443). Explication de la grande disproportion entre les effets d'un choc et ceux d'une pression.

(444). La théorie qu'on va exposer rapporte aux mêmes loix le choc des corps durs, mous, et de ceux qui ont une portion quelconque d'élasticité.

(445). Dénominations des quantités qui entrent dans le calcul du choc des corps.

(446). Notions pour l'intelligence de la théorie suivante.

(447). Comme on mesure la dureté d'un corps.

L'expression de cette mesure tient uniquement à la nature du corps.

(448). L'amplitude d'impression peut représenter la surface de contact.

(449). Valeur du mouvement perdu par le corps, quelle que soit l'amplitude d'impression, un des corps étant supposé parfaitement dur.

(450). Egalité entre le mouvement perdu et le mouvement gagné.

(451). Valeur du mouvement perdu par les corps, ou de la force de percussion, aucun des deux n'ayant une dureté parfaite.

(452). Les différentielles des impressions sont à chaque instant réciproquement proportionnelles aux duretés.

(453). L'espace parcouru par le corps choquant est égal à la somme des profondeurs d'impression, plus l'espace parcouru par le corps choqué.

(454). Les deux espaces parcourus sont égaux à la fin du choc des corps élastiques.

(455). Valeur de l'élément du temps.

(456). A l'instant de la plus grande impression, les vîtesses des corps sont égales.

(457). Equation qui exprime le rapport des vîtesses dans un instant quelconque du choc.

(458). Ce que devient cette équation, à la fin du choc, lorsque les corps n'ont point d'élasticité.

(459). Recherche des valeurs particulieres des vitesses de chaque corps dans un instant quelconque du choc.

Equations qui donnent ces vîtesses.

Regles pour les signes dans l'usage de ces équations.

(460). Application de ces équations aux corps mous.

(461). Application aux corps parfaitement élastiques.

Idem. Conservation des forces vives dans le choc des corps élastiques.

(462). Application aux corps parfaitement élastiques.

(463). Valeur de la vîtesse des corps à la fin du choc.

(464). Valeur, pour un instant quelconque du choc, de l'impression qui se fait dans le corps choqué, en supposant la dureté constante.

Ce que devient cette valeur à la fin du choc.

(465). Ce qu'elle devient quand le corps choqué est immobile.

(466). L'impression qui se fait dans le corps choqué est sensiblement proportionnelle aux quarrés des vîtesses.

Digitized by Google

Idem. Valeur que peut avoir l'impression lorsqu'il y a une vitesse initiale, ou qu'il n'y en a pas.

(467) Expériences qui confirment la théorie précédente.

Idem. Valeur de l'impression dans le cas où les masses qui se choquent sont égales et animées de vîtesses constantes.

(468). La dureté peut être supposée sensiblement constante, et le sera dans la suite des calculs.

(470). Equations qui donnent la valeur de la dureté pendant que l'impression se forme, et à l'instant de la plus grande impression.

Cette valeur seroit la même étant déduite de l'une ou l'autre équation.

(471). Formule qui donne le rapport de la dureté à la pesanteur, dans le cas où le corps choqué est immobile.

(473). Usage de cette formule pour faire une table des duretés.

(474). Application de cette formule à une expérience de s' Gravesande.

(475). La plus grande force de percussion a lieu à l'instant où s'acheve l'impression totale.

(476). Transformation de la valeur précédemment donnée pour la force de percussion.

(477). Ce que devient cette valeur quand le corps choqué est immobile.

(478). Formule qui donne le rapport de la force de percussion à la gravité.

(479). Application de cette formule à une expérience de s' Gravesande.

(480). Percussion lorsque le corps choquant est susceptible d'impression.

(481). Le même cas, en supposant de plus que le corps choqué est immobile.

(482). Application des formules de percussion au choc d'un marteau sur une enclume.

(483). Détermination de la durée du choc.

(484). Considérations sur les différentes formes que peut prendre l'impression suivant la nature des corps.

(485). Conclusion de ce chapitre.

Du choc des corps dans des directions qui ne passent pas leurs centres de gravité.

(486). Exemple de la solution d'une question sur les chocs qui s'exercent dans des directions qui ne passent pas par le centre de gravité des corps.

Du mouvement considéré dans les machines.

(487). Nécessité d'entrer dans quelques détails particuliers sur la théorie des machines.

(488). Deux sortes de mouvement dans les machines; savoir, le mouvement uniforme, et le mouvement alternativement accéléré et retardé.

La premiere espece de mouvement peut servir à mesurer la seconde.

Exemple de la seconde espece de mouvement.

(489). La théorie des machines à mouvement uniforme conduit à celle des machines à mouvement alternativement accéléré et retardé.

(490). De l'accélération qui a lieu avant que les machines soient parvenues à l'uniformité.

Cas où l'on peut observer cette accélération.

On supposera dans la théorie suivante que les machines sont parvenues à l'uniformité.

(491). Développement de la signification des mots *moteur* et *résistance.*

Digitized by Google

Différentes especes de moteurs qu'on applique aux machines.
Ce qu'on entend par *vîtesse* et *effort* du moteur.
Exemple.
(492). Ce qu'on entend par *vîtesse* et *effort* de la résistance.
(493) Principes fondamentaux de la théorie des machines.
Démonstrations de ces principes.
(494). L'effet d'une machine se mesure par le produit de la vîtesse du moteur, de son effort et du temps.
Le produit de l'effort par la vîtesse étant constant, l'effet est proportionnel au temps.
(495). Relation entre la vîtesse et l'effort du moteur.
Application aux fluides.
Application aux hommes et aux animaux.
Effet de la fatigue dans ces dernieres especes de moteur.
(496). Expression analytique de la relation entre l'effort du moteur et sa vîtesse.
(497). Différentes équations qui donnent la valeur des vîtesses de la résistance, du moteur et celle de l'effet d'une machine.
(498). Le rapport des vîtesses du moteur et de la résistance étant supposé variable, trouver une équation entre ce rapport et l'effort de la résistance, laquelle équation convienne au plus grand effet de la machine.
On peut s'éloigner un peu de ce rapport, sans que la valeur de cet effet soit changée sensiblement.
(499). Au moyen de cette équation, et de trois autres posées précédemment, la vîtesse et l'effort du moteur sont déterminés.
(500). En supposant le rapport des vîtesses constant, et l'effort de la résistance variable, on trouve, pour le plus grand effet de la machine, les mêmes valeurs que ci-dessus.
(501). Résultats des calculs précédents pour la production du plus grand effet dans une machine.
(502). Du plus grand effet quand le moteur est supposé variable.
Idem. Le moteur peut être infini sans que l'effet le soit.
(503). Conséquence de la théorie précédente. Limite de l'effet des machines quand le produit de l'effort du moteur par sa vîtesse est constant.
Dans les machines considérées physiquement, on est toujours en-deçà de cette limite.
Idem. Causes principales des erreurs commises dans l'invention et la contruction des machines.
(504). Sous quel point de vue on doit considérer les machines pour travailler fructueusement à leur perfection.
Idem. Premier objet d'utilité des machines.
Second objet d'utilité des machines.
Développement de ce second objet d'utilité.
Autre maniere de l'énoncer.
Exemple de ce second objet d'utilité.
(505). Ce qui résulte du cas où le produit de l'effort du moteur par sa vîtesse est constant.
Cas où ce produit est variable, et par conséquent susceptible de donner un *maximum* d'effet.
(506). Conséquences générales de l'analyse des deux cas précédents.
(507). Le mouvement uniforme est le plus favorable à l'effet des machines.
Idem. Conclusion de ce chapitre, où l'on a fait un usage aussi utile qu'intéressant du principe des vîtesses virtuelles.

Digitized by Google

SECTION III.

DE L'HYDROSTATIQUE.

Introduction, et caracteres qui distinguent les fluides des corps solides.

(508). La théorie des fluides se déduit des mêmes principes que celle des corps solides : avantages de la méthode suivie dans ce traité.

(509). Point de vue sous lequel il faut considérer les fluides en mécanique.

Il est nécessaire de leur assigner une propriété qui les distingue des corps solides, et qui puisse donner prise au calcul.

(510). Quelle est la propriété qu'Euler a choisie pour cet effet.

Développement de cette propriété.

(511). Euler la regarde comme caractérisant spécialement les fluides.

(512). Détail dans lequel il est entré à son sujet.

(513). La portion plus ou moins grande qu'ont de cette propriété tous les corps de la nature, peut servir à les classer; et sous cet aspect, la chaîne qu'ils forment a les corps parfaitement durs à une de ses extrémités, et les fluides parfaits à l'autre extrémité.

(514). Les substances qui forment les points extrêmes de la chaîne précédente n'existent pas, rigoureusement parlant, dans la nature; cas où cette considération doit engager à modifier, d'après l'expérience, la théorie des fluides.

Division des fluides en compressibles et incompressibles; mesure de leur densité.

(515). L'eau et l'air ont chacun une propriété principale qui les distingue.

Idem. Les plus grandes percussions ou pressions qu'on a pu employer n'ont pas été suffisantes pour diminuer le volume d'une portion d'eau donnée.

(516). L'air est au contraire susceptible de condensation et de dilatation d'une maniere sensiblement indéfinie.

(517). Machines avec lesquelles on condense et on dilate l'air.

(518). Ce qu'on entend par fluides incompressibles.

(519). L'incompressibilité absolue des fluides n'est pas démontrée.

La chaleur et le froid changent sensiblement leur volume; instrument avec lequel on mesure ce changement.

(520). Ce qu'on entend par fluides élastiques. L'élasticité de l'air ne doit être regardée que comme sensiblemsnt indéfinie.

(521). La chaleur et le froid changent aussi sensiblement le volume des fluides élastiques, et ont une influence très active sur l'élasticité de l'air.

(522). La masse de l'air, sous un volume donné, depend de sa pression et de sa température.

(523). Relation entre la variation de la densité de l'air et celle de sa température.

Idem. L'état hygrométrique de l'air modifie cette relation; la densité de l'air, fonction de trois variables.

Digitized by Google

Idem. Instrument avec lequel on mesure la pression de l'air; poids moyen d'un pied cube d'air à une pression et à une température donnée.

(525). Cause qui peut faire varier la densité de l'eau; loi de cette variation.

(526). Poids du pied cube d'eau douce et d'eau de mer.

(527). De l'eau réduite en vapeur.

(528). Rapports du poids de l'eau à celui de l'air sous un même volume.

La pesanteur spécifique de l'eau distillée, prise pour unité ou terme de comparaison.

De l'équilibre des fluides, abstraction faite de la pesanteur et de toute autre puissance analogue.

(529). Etat où on considérera les fluides dans ce chapitre.

(530). Double mouvement que tend à produire une puissance poussant un piston adapté à un vase.

La considération du premier de ces mouvements, celui de translation du vase, inutile à notre objet; moyen de l'éluder.

Lorsque tous les éléments de la surface d'un corps sont pressés normalement par des puissances proportionnelles à ces élements, ce corps demeure en équilibre.

Démonstration de cette proposition, de laquelle il résulte qu'un corps plongé dans un fluide en équilibre est aussi en équilibre, quelle que soit la pression du fluide.

(532). Evaluation de la pression absolue qu'éprouve une portion de la surface d'un corps plongé dans un fluide.

(533). Cas où la portion de surface pressée est plane.

(534). La théorie précédente s'applique également aux fluides incompressibles et aux fluides élastiques; effets qui distinguent les derniers des premiers lors de la compression.

(535). L'élasticité de l'air est proportionnelle à la puissance comprimante, la réaction résultante de cette élasticité est égale à la même puissance comprimante; comme on peut mesurer l'élasticité.

(536). Des cas où les fluides sont renfermés dans des vases flexibles et extensibles.

De l'équilibre des fluides dont les parties sont soumises à l'action de puissances quelconques.

(537). Chaque particule d'un fluide soumis à l'action de puissances variables, est sollicitée par deux especes d'impulsion, l'une provenant des puissances, l'autre de la pression du fluide, qui doivent se détruire dans le cas d'équilibre.

(538). Recherche d'une équation qui exprime la condition précédente.

(539). Equation générale de l'équilibre des fluides.

(540). Il y a une infinité de cas où l'équilibre des fluides ne peut exister.

Idem. Intégrabilité qui a lieu lorsque les puissances tendent à un ou plusieurs centres, et sont fonctions des distances à ces centres.

(541). La densité, fonction des trois co-ordonnées de l'équation générale.

(542). Cas où le fluide en équilibre est renfermé dans un vase; ce qu'on doit entendre généralement par surface *de niveau.*

(543). Equation de l'équilibre des fluides animés par des puissances dirigées à un centre fixe, et fonctions des distances à ce centre.

Digitized by Google

(544. Dans le cas précédent les points également éloignés du centre fixe sont également pressés, et la surface de *niveau* est une surface sphérique.

(545. La même chose a lieu pour les fluides élastiques; application des loix précédentes à la pesanteur.

Application de la théorie précédente aux niveaux à bulle d'air et à la pratique du nivellement.

(546). Théorie du tube du niveau à bulle d'air, et évaluation de sa sensibilité.

(547). Application de la formule à un exemple.

(548). Quelques détails sur le niveau à bulle d'air; travail intérieur du tube pour rendre sa section longitudinale circulaire.

(549). Du niveau apparent et du niveau vrai.

Idem. Formule pour trouver l'élévation du niveau apparent au-dessus du vrai.

(550). Recherche d'une autre formule pour le même objet, où l'on a égard à la réfraction; ce que c'est que la réfraction.

(*Idem.*) Détails sur l'effet de la réfraction.

Courbe que décrit dans l'atmosphere le rayon réfracté.

Exposition de la formule cherchée.

L'angle de réfraction est proportionnel à la distance des objets observés.

Idem. Maniere de déterminer par expérience le rayon de courbure de la courbe de réfraction.

(551. Ce rayon de courbure peut être considéré, valeur moyenne, comme égal à sept fois le rayon terrestre.

De l'équilibre des fluides incompressibles et pesants.

(552). Les fluides pesants, considérés dans un petit espace, peuvent être considérés comme soumis à des puissances paralleles, et leur surface de niveau, peut être regardée comme plane.

(553). Les puissances paralleles dont on vient de parler peuvent de plus être regardées comme constantes.

(554). Application de l'équation générale de l'équilibre des fluides au cas de la pesanteur.

(555). Toutes les couches de niveau sont également pressées dans tous leurs points.

(556). Le fluide se met de niveau dans les branches de plusieurs siphons qui se communiquent.

(556. Recherche de la pression exercée par un fluide incompressible pesant sur une portion differencio-différentielle de surface.

(558.) Evaluation de cette pression.

Cas où la surface n'est infiniment petite que dans une dimension.

(557). Recherche de la pression sur une portion finie de surface.

(560). Evaluation de cette pression.

(561). Application de la théorie précédente à la pression d'une surface courbe dans le sens vertical seulement.

(262). Détermination de l'angle qui fait, avec la verticale, la résultante des pressions de tous les éléments de la surface précédente.

(563). En quoi cette résultante differe de ce qu'on doit appeller la *pression totale.*

Digitized by Google

(564). Observations à faire sur cette résultante; recherche du cas où elle est unique, et du cas contraire.

(566). Cas particulier où cette résultante est unique.

(567). Application de la théorie de la pression des fluides à une surface, courbe dans le sens horizontal.

(569). Expression générale qui donne la hauteur à laquelle passe la résultante des pressions d'une surface dont les sections horizontales sont par-tout les mêmes.

(570). Perte de poids que fait un corps plongé dans un fluide.

(572). Des corps qui flottent au-dessus des fluides; loix dérivées de cette propriété.

(574). Usage de cette propriété pour soulever de grands fardeaux au dessous de la surface de l'eau.

(575). Conditions de l'équilibre des corps flottants.

Applications de la théorie précédente à quelques exemples; de la stabilité des digues qui soutiennent des eaux stagnantes, et de la poussée des terres.

(576). De la pression d'une ligne verticale plongée dans un fluide.

(577). De la pression d'un parallélogramme, et des efforts de cette pression pour le faire tourner autour de ses côtés.

(579). Pression d'un triangle, et examen des différents cas qui y sont relatifs.

(587). Ce qu'on entend généralement par une *digue*.

(588). Recherche des conditions de l'équilibre d'une digue dans l'hypothese qu'elle peut être renversée par la pression d'une eau stagnante.

(589). Equation qui exprime ces conditions.

Idem. Equation qui donne les conditions de l'équilibre dans l'hypothese que la digue peut être repoussée en glissant sur sa base.

(590). Applications des formules précédentes aux digues à talus rectilignes.

(593). Examen des cas où les digues peuvent être rompues dans un point de leur hauteur, et recherche des conditions de l'équilibre pour ces cas.

Idem. Formule pour les cas où une portion de la digue peut être renversée.

(594). Formule pour les cas où une portion supérieure de la digue peut glisser sur l'inférieure.

(595). Différences entre les dimensions adoptées dans la pratique et les dimensions calculées; nécessité de donner une épaisseur au sommet des digues.

(596). Liaisons des recherches sur la poussée des terres à celles sur la poussée de l'eau.

(597). De la cohésion et du frottement.

(598). Définition de la cohésion.

(599). Définition du frottement.

(600). Notion exacte des effets de la cohésion et du frottement relativement à l'équilibre.

(601). Ce qui résulte de ces effets relativement aux variations qu'on peût faire subir aux puissances en équilibre, sans que l'équilibre soit rompu.

Idem. Exemple propre à donner une idée de ces variations et des *maxima* et *minima* que comportent les questions de mécanique où entrent la cohésion et le frottement.

(604). Application d'une formule déduite de l'exemple précédent à la poussée des terres contre les murs de revêtement.

Digitized by Google

(606). Valeur de l'effort qui tend à faire glisser le mur sur sa base.
La poussée horizontale des fluides n'est qu'un cas particulier de cette valeur.
(607). Détermination du profil à donner à un mur de revêtement pour le mettre en équilibre avec la poussée des terres, dans l'hypothese qu'il peut glisser sur sa base.
(608). Formule qui donne ce profil.
(609). Recherche des conditions de l'équilibre dans l'hypothese que le mur de revêtement peut être renversé.
Equation qui renferme ces conditions.
(611). La poussée des fluides n'est encore qu'un cas particulier de cette équation.
(612). Détermination de la position de la résultante dans le cas où la cohésion est nulle ; conformité de cette détermination avec l'expérience.
(613). Différentes considérations particulieres relatives à la poussée des terres ; avantages de la théorie qu'on vient d'exposer.

De l'aréometre ou pese-liqueur.

(614). Définition de l'aréometre en général ; utilité de celui inventé par M. de Parcieux, relativement à l'objet de cet ouvrage.
(615). Description et usage de l'aréometre de M. de Parcieux.
(616). Equations fondamentales de sa théorie.
(617). Grande sensibilité de cet instrument ; expériences par lesquelles on s'en assure.
Evaluation de la sensibilité relative à la variation de densité.
(619). Moyens d'augmenter cette sensibilité.
(620). Evaluation de l'enfoncement produit par l'addition d'un petit poids, la densité restant la même.
(621). Différence entre la sensibilité de l'instrument, relative à la variation de densité et celle relative à l'addition d'un petit poids, la densité étant la même ; quels sont les meilleurs aréometres.
(622). Usage de l'aréometre pour trouver le rapport des pesanteurs spécifiques de deux eaux.
(623). Son usage pour trouver la différence de pesanteur spécifique de deux eaux, sans connoître avec précision la valeur absolue de la pesanteur spécifique d'une de ces eaux.
(624). Tables à construire pour faciliter l'usage de l'aréometre.
(625). Expériences faites avec l'aréometre par M. de Parcieux.
(626). La recherche de la plus ou moins grande légèreté n'est pas la seule à faire pour juger de la qualité des eaux.

De l'équilibre des fluides élastiques, et principalement de l'air ; mesure de sa densité à différentes hauteurs.

(627). Equation générale de l'équilibre des fluides élastiques pesants.
(228). Les couches de niveau sont également pressées et également denses, lorsque la densité est fonction de la pression, la chaleur étant constante.
(629). Application à l'air atmosphérique ; maniere dont on mesure sa pression ; valeur moyenne de cette pression au niveau de la mer.
(631). Recherche d'une équation qui exprime la relation entre la hauteur du mercure dans le barometre et la différence de niveau entre deux stations.
Equation qui exprime cette relation.

Digitized by Google

(632). Considérations sur les logarithmes hyperboliques qui entrent dans cette équation, et nouvelle formule qui n'exige que l'usage des logarithmes ordinaires.

(633). La même formule, dans laquelle le coëfficient constant est déterminé par une expérience faite une fois pour toutes; conditions que suppose l'usage de cette formule.

(634). Détermination numérique du coëfficient constant dans une hypothese particuliere de pression et de température de l'air.

Comparaison de la derniere formule avec celle de M. Bouguer.

(636). Difficulté de déterminer la valeur du coëfficient constant; obstacles qui s'opposent à cette détermination.

(637). La température inégale de l'air, à différentes hauteurs, est la source d'irrégularité dans les mesures prises avec le barometre; qui a le plus occupé les physiciens; loi que suit cette inégalité de température à différentes hauteurs; auteurs qui ont travaillé à rectifier les erreurs provenantes de l'inégale température de l'air.

(638). Formule corrigée, de M. du Luc.

(639). Formule corrigée, de M. Trembley.

(640). Application des deux formules précédentes à des observations faites par MM. de Saussure et Lévesque.

La formule de M. Trembley plus exacte que celle de M. du Luc; exactitude de ses expériences sur la dilatation de l'air par la chaleur.

(641). La formule, sans correction, approche plus de la mesure géométrique de M. de Saussure que les deux formules précédentes.

(642). Les densités de l'air peuvent être supposées décroître en progression géométrique; causes dont le concours établit cette progression.

Idem. Ce qui résulte de la propriété précédente; du module barométrique et de son utilité; application d'une valeur particuliere de ce module à l'expérience de M. de Saussure.

(643). Influence de la température sur le barometre lui-même; expériences pour connoître les erreurs qui peuvent en résulter.

(644). Le barometre ne peut pas remplacer les niveaux ordinaires; mais son usage est utile quand on n'a pas besoin de la plus grande précision.

Des machines à élever l'eau en général, et de la statique des pompes en particulier.

(645). Liaison de la théorie avec les matieres précédemment traitées; étendue de cette théorie; nécessité de la faire précéder par des considérations sur les machines à élever l'eau, en général.

(647.) L'élévation de l'eau constitue l'objet principal ou accessoire de presque tous les travaux d'architecture hydraulique.

(648). Des machines les plus simples qu'on puisse employer pour élever l'eau, et dans lesquelles les efforts du moteur et de la résistance sont égaux.

(649). Premiere circonstance où l'on emploie ces machines simples en rendant l'effort du moteur moindre que celui de la résistance.

(650). Méthode pour ajouter encore une perfection de plus à ces machines, et rendre leur produit continu.

(651). Machines exécutées d'après cette méthode.

(652). La théorie de toutes les machines précédentes dépend presque en entier de la mécanique des corps solides.

(653). Perfection et modification de ces machines; chapelets verticaux.

(654). De la pompe foulante; son analogie avec la pompe à chapelet.

Digitized by Google

Idem. Explication de la maniere dont la pompe foulante éleve l'eau.
(656). Ce qu'on appelle *corps de pompe.*
(657). Autre espece de pompe foulante; explication de la maniere dont elle éleve l'eau.
(658). Différents avantages des pompes foulantes sur les pompes à chapelet; application d'un de ces avantages à la pompe à incendie.
(659). De la pompe foulante, et de son analogie avec la pompe aspirante.
(660). Ce que c'est que le tuyau d'aspiration dans la pompe foulante.
(661). Explication de la maniere dont la pompe aspirante éleve l'eau.
(662). Cas où la pompe ne pourroit point élever l'eau.
(663). De la pompe aspirante et foulante; explication de la maniere dont elle éleve l'eau.
(664). Valeur de l'effort du moteur, dans le chapelet vertical et dans la pompe foulante, de bas en haut.
(665). Valeur de l'effort du moteur dans la pompe foulante, de haut en bas.
(666). Valeur de l'effort du moteur dans la pompe aspirante.
(667). Cas où il y a aspiration dans le chapelet vertical et dans la pompe foulante, de bas en haut; effort du moteur dans ces cas.
(669). Valeurs de l'effort du moteur, dans la pompe aspirante et foulante, lorsque le piston monte et lorsqu'il descend.
(670). Observation sur chacune de ces valeurs en particulier, et sur leur somme.
(671). On doit chercher à rendre ces valeurs égales autant qu'il est possible.
(672). Effort du moteur dans la pompe foulante de haut en bas, lorsqu'il y a aspiration pendant la levée du piston.
(673). Ce qu'on entend par *pompes noyées.*

De la dilatation successive de l'air dans les pompes, et des élévations correspondantes de l'eau; examen des causes qui peuvent empêcher l'ascension de l'eau; détails préliminaires sur les pistons et les soupapes; conclusion de cette section.

(674). Cas où l'ascension de l'eau par aspiration est toujours possible, et premier cas où elle peut s'arrêter, l'eau étant au-dessous de la soupape dormante.
(675). Analyse de ce premier cas.
(676). Equation qui donne le ressort de l'air à chaque coup de piston.
(677). Autre équation qui donne la même chose dans un autre cas.
(678). Equation qui donne la hauteur de l'eau à chaque coup de piston.
(679). Usage des équations précédentes.
(680). Détermination du cas où l'ascension de l'eau cesse d'avoir lieu.
(681). Réflexions et explications relatives à la détermination précédente.
(682). Cas où l'eau s'élevera jusqu'à la soupape dormante, et cas où elle s'élevera au-dessus.
(683). Second cas où l'on examine les arrêts que peut éprouver l'ascension de l'eau, supposée parvenue au-dessus de la soupape dormante.
(684). Equations qui donnent le ressort de l'air et la hauteur de l'eau à chaque coup de piston; usage de ces équations.
(688). Cas où l'ascension de l'eau doit cesser d'avoir lieu; équation qui les fait connoître.
(689). Réflexions sur les valeurs données par cette équation, et sur l'étendue de l'espace où l'ascension de l'eau ne peut pas avoir lieu.
(690). Equation d'une courbe qui fait connoître toute l'étendue de l'espace dans lequel l'aspiration ne peut pas faire monter l'eau.

Digitized by Google

(691). Détermination du cas où l'ascension de l'eau peut cesser d'avoir lieu dans la pompe foulante de bas en haut.
(694). Réflexions sur la théorie exposée dans ce chapitre.
(695). Quelques détails sur les pistons et les soupapes.
(696). Conclusion de cette section.

SECTION IV.

DE L'HYDRODYNAMIQUE.

Réflexions préliminaires.

(697). La théorie de l'hydrodynamique est due aux modernes; auteurs anciens qui ont traité de la mécanique des fluides.
Idem. Réflexions sur la méthode employée dans les sections précédentes.
(698). Difficultés d'appliquer cette méthode aux matieres contenues dans la présente section.
(699). Plan qu'on se propose de suivre dans cette section.
(701). Problême général sur l'écoulement des fluides incompressibles et pesants, en admettant le parallélisme des tranches.
(703). Solution de ce problême.
(709). Valeur de la pression pour un instant et un point déterminés.
Détermination de la constante arbitraire qui entre dans l'équation précédente.
(710). Valeur de la pression résultante de cette détermination.
(712). Ce que devient l'équation précédente à la surface supérieure du fluide.
(714). Equation qui contient la relation entre la vîtesse à l'orifice et l'abaissement instantanée de la surface supérieure.

Du mouvement de l'eau qui s'échappe d'un vase par un petit orifice.

(715). La vîtesse intérieure de l'eau peut être censée infiniment petite dans un vase percé d'un petit orifice.
(716). Comment l'écoulement par un petit orifice horizontal rentre dans le cas du problême général résolu dans le chapitre précédent.
(717). Formule générale pour l'écoulement par un petit orifice horizontal.
(718). Ce que devient cette formule quand la pression est nulle à l'orifice et à la surface du fluide.
(720). La vîtesse du fluide, jaillissant par un petit orifice horizontal, est due à la seule pression, et il suit de là que cette vîtesse sera la même, quelle que soit l'inclinaison de l'orifice.
(721). Formule pour la vîtesse de l'eau jaillissant par un petit orifice d'inclinaison quelconque.
(722). Cette vîtesse est celle due à la hauteur de la surface du fluide au-dessus de l'orifice.
(723). Le fluide peut, en vertu de cette vîtesse, remonter jusqu'au niveau de la surface supérieure.
(724). Valeur du volume d'eau qui s'écoule dans un instant.
(725). Volume d'eau qui s'écoule pendant un temps quelconque, le vase étant entretenu constamment plein.
(726). Formule générale qui donne le temps de l'écoulement.

(727). Formule particulière pour le cas où le vase est un prisme vertical.
(728). Cas où l'orifice est un cercle.
(729). Les résultats de l'expérience diffèrent de ceux du calcul.
(730). Cas où le vase n'est pas entretenu constamment plein.
(731). Equation qui renferme la relation entre la variation de la hauteur de l'eau, la section horizontale du vase et le temps, dans le cas précédent.
(732). Valeur du temps, tirée de cette équation.
(733). Application au cas où le vase est un cylindre vertical.
(734). Temps de l'écoulement total dans le cas précédent.
(735). Application au cas où le vase est un solide engendré par la révolution d'une parabole.
(736). Théorie et construction des horloges d'eau ou *clepsydres*, et 1°. des clepsydres cylindriques.
2°. Clepsydres où des abaissements égaux de l'eau mesurent des temps égaux ; comment on trouve la courbe de leurs sections verticales, quelle que soit la forme de leur section horizontale.
(737). Analyse du cas où un vase, se vuidant par un petit orifice, reçoit par un autre petit orifice l'eau d'un autre vase entretenu constamment plein.
Application à un vase prismatique.
(738). Equation qui donne le temps de l'écoulement.
(739). Equation qui donne l'eau écoulée pendant un temps donné.

Du mouvement des fluides dans des vases composés, dont les différentes parties sont séparées par des cloisons verticales, et communiquent entre elles par de petites ouvertures.

(740). Analyse du problème précédent, en supposant que l'orifice du vase, entretenu constamment plein, est plongé dans le fluide que contient l'autre vase.
(741). Cas où le second vase ne perd point d'eau.
Temps employé par l'eau, dans le cas précédent, à se mettre de niveau dans les deux vases.
Propriété qui résulte du cas qu'on vient d'analyser.
(743). Cas où un vase, entretenu constamment plein, fournit de l'eau à une suite d'autres vases communiquant entre eux par de petits orifices.
(744). Observation sur les premiers instants où l'eau afflue dans les différents vases.
(745). Examen du cas où les hauteurs de l'eau deviennent constantes dans les différents vases.
(746). Equations qui donnent ces hauteurs.
(747). Analyse du cas où deux vases, communiquant entre eux par un petit orifice, ne sont ni l'un ni l'autre entretenus constamment pleins.
(748). Solution du problème lorsque les deux vases sont prismatiques.
(749). L'équation, dans ce cas, peut toujours être rapportée aux quadratures.
(750). Cas où l'un des deux vases ne perd point d'eau.
Valeur du temps dans ce cas.
(751). Détermination de l'instant auquel le fluide se met de niveau dans les deux vases.
(753). Du mouvement de l'eau dans les vases divisés par des diaphragmes horizontaux, et dans les pompes.

Digitized

De la courbe décrite par les molécules fluides qui jaillissent par un petit orifice.

(755). La courbe que décrit l'eau jaillissant par un petit orifice est une parabole.
(757). Détermination de différentes quantités relatives à cette courbe.

De l'écoulement des fluides par des orifices horizontaux de figure quelconque, et qui ne peuvent point être supposés infiniment petits.

(763). Rapport entre un orifice horizontal et la plus petite section du vase, au-delà duquel il faut avoir égard à la grandeur de l'orifice.
(764). Application de la formule générale de l'article (714) aux orifices horizontaux.
(767). Introduction de la hauteur due à la vîtesse de l'eau, à l'orifice, dans l'équation qui résulte de cette application.
(768). Détermination de la relation entre la vîtesse de l'eau à l'orifice et la quantité de fluide écoulé lorsque le vase est entretenu constamment plein.
(769). Equation qui donne cette relation.
Réflexions sur les logarithmes hyperboliques.
(770). Equation exponentielle qui donne la même relation.
(771). La vîtesse peut être censée constante après un petit espace de temps ; équation qui donne la hauteur due à la vîtesse, eu égard à cette considération.
(772). Cas de l'orifice infiniment petit.
Recherche de la relation entre la vîtesse du fluide à l'orifice et le temps de l'écoulement.
(774). Equation qui donne cette relation.
Idem. Recherche de la relation entre le temps de l'écoulement et la quantité d'eau écoulée.
Equation qui donne cette relation.
(776). Du cas où le vase se vuide sans recevoir de nouvelle eau.
(777). Ce que devient dans ce cas la formule de l'art. (767).
(778). Equation qui donne la relation entre la vîtesse à l'orifice et la hauteur du fluide au-dessus de cet orifice.
(779). Application à un vase prismatique.
(780). Equation pour ce cas.
(781). Cas où le vase prismatique n'a point de fond.
(782). Cas où la section horizontale du prisme est égale au double de l'orifice.
(783). Détermination de l'instant où la vîtesse est la plus grande.
(784). Au commencement du mouvement, la tranche supérieure du fluide descend comme si elle étoit abandonnée à l'action libre de la pesanteur.
(785). Explication de l'espece de paradoxe que présente la proposition précédente.
(786). Cas où le fluide auroit reçu une impulsion primitive, une fois pour toutes, et cas où il éprouveroit une pression constante.
(787). Solution du premier cas.
(788). Solution du second cas.

Digitized by Google

De l'écoulement des fluides par des orifices verticaux de grandeur finie et de figure quelconque.

(790). Moyen de ramener les recherches relatives à un orifice, à chaque point duquel la vîtesse varie, aux recherches relatives à un orifice, à tous les points duquel la vîtesse est la même.

(791). On peut, par ce moyen, réduire l'écoulement, par des orifices verticaux, à l'écoulement par des orifices infiniment petits.

(792). Réflexions sur cette maniere de considérer le mouvement des fluides.

(793). Recherche de la relation entre le temps et la quantité d'eau écoulée par un orifice vertical, le vase étant entretenu constamment plein.

(794). Equation qui donne cette relation.

(795). Le temps peut toujours être exprimé en fonction d'une seule variable.

(796). Ce que c'est que la hauteur *moyenne* de l'eau au-dessus d'un orifice vertical; comment on détermine cette hauteur.

(798). Recherche de la relation entre le temps et la quantité d'eau écoulée lorsque le vase se vuide sans recevoir de nouvelle eau.

(800). Equation qui donne cette relation.

(801). La valeur du temps peut toujours y être exprimée en fonction d'une seule variable.

(802). Réflexions sur les intégrales qui se rapportent aux quadratures, et sur la maniere de les trouver par la méthode donnée dans la premiere section de cet ouvrage.

(804). Détermination de la quantité d'eau écoulée dans un temps donné, et réciproquement, par un orifice rectangulaire, le vase étant entretenu constamment plein, ainsi que de la hauteur moyenne du fluide dans le cas précédent.

(807). Les mêmes déterminations, dans le cas où l'orifice est un triangle dont le sommet est le point le plus élevé et dont la base est horizontale.

(812). Cas où le sommet du triangle seroit en bas, et où la base horizontale formeroit la partie supérieure de l'orifice.

(814). Les mêmes déterminations lorsque l'orifice est circulaire.

(816). Cas où l'orifice circulaire est infiniment petit.

(817). Cas où cet orifice est une portion de cercle.

(819). Valeur de la dépense d'un orifice circulaire, et de la hauteur moyenne de l'eau, exprimée par une suite infinie.

(821). Réflexions sur les hauteurs moyennes de l'eau, trouvées précédemment.

(822). Application à un vase prismatique, de la formule qui donne la relation entre le temps et la quantité d'eau écoulée, lorsque le vase se vuide sans recevoir de nouvelle eau.

Expériences faites sur l'écoulement de l'eau qui sort par des orifices ou par des tuyaux, de vases, soit entretenus constamment pleins, soit se vuidant librement.

(824). Pourquoi, près de l'orifice, la vîtesse des molécules fluides n'est pas la même dans toute l'étendue d'une section horizontale.

(825). Expériences qui prouvent la convergence des molécules fluides vers l'orifice.

(826). Diminution qui doit résulter de cette convergence dans le diametre du jet.

(827). Expériences qui prouvent que cette diminution a lieu.

(828). Ce qu'on appelle *contraction* de la veine fluide.

Digitized by Google

(829). Cette contraction a lieu, quelle que soit l'inclinaison de l'orifice.
(830). Distance de l'orifice à la plus grande contraction de la veine.
(831). Influence qu'ont sur la contraction la paroi du vase et la position de l'orifice par rapport aux côtés du vase.
(833). Il faut, dans les différents cas, substituer à la surface réelle de l'orifice la surface de la plus petite section de la veine fluide.
(834). Expériences propres à donner le rapport entre ces deux surfaces, pour les orifices percés dans des minces parois.
Ces expériences prouvent que, pour les petits orifices, les rapports des dépenses observées sont sensiblement les mêmes que ceux des dépenses calculées.
(835). Nombre par lequel il faut multiplier la surface de l'orifice pour avoir la section de plus grande contraction.
(836). Formules corrigées pour l'écoulement de l'eau par un petit orifice.
(838). Moyen de donner à ces formules une plus grande précision encore que celle nécessaire pour la pratique.
(839). Des corrections relatives à la différente grandeur des orifices.
(840). Expériences relatives à l'écoulement par un petit orifice auquel est adapté un petit tuyau.
(841). Valeur de la plus grande contraction, déduite de ces expériences, qui prouvent de plus que les dépenses observées sont entre elles dans le même rapport que les dépenses calculées.
(842). Formules corrigées pour l'écoulement par un petit tuyau additionnel.
(844). Moyen de donner à ces formules une plus grande précision encore que celle nécessaire pour la pratique.
(845). Cas où l'eau ne sort pas à plein tuyau.
(847). Diminution de vîtesse dans les tuyaux additionnels dont l'eau sort à gueule-bée.
(848). Pourquoi, avec plus de vîtesse, les minces parois donnent un moindre produit.
(849). Expériences propres à faire connoître la relation entre la dépense des tuyaux coniques et celle des tuyaux cylindriques.
La forme conique des tuyaux favorise l'écoulement tant que l'évasement ne passe pas certaines bornes; cet écoulement est cependant toujours moindre que la dépense théorique.
(851). Obstacles à l'exactitude des expériences sur le temps de l'écoulement total des vases qui se vuident librement.
(852). Formule corrigée qui donne le temps de l'écoulement d'un vase qui se vuide librement.
(853). Cas où l'orifice est circulaire.
(854). Expériences qui prouvent l'exactitude de cette formule.
(855). Comment les recherches précédentes s'appliquent aux orifices latéraux.
(856). Conclusion de ce chapitre.

De la pression que l'eau exerce contre les parois des tuyaux dans lesquels elle se meut.

(857). Difficultés d'appliquer la théorie à la détermination de l'épaisseur des tuyaux.
(858). Application de la formule générale de l'article (710) à la détermination de la pression d'un tuyau vertical.
(861). Vîtesse de l'eau qui sortiroit par un trou fait à ce tuyau.

Digitized by Google

(862). Cas où la pression devient nulle.
(863). Cas où l'orifice et le tuyau sont circulaires.
(864). Détermination de la pression lorsque le tuyau est horizontal.
(865). Expériences de M. l'abbé Bossut sur la pression des tuyaux.
(866). Comment ce problème peut se résoudre d'une maniere très générale.

Du choc et de la résistance des fluides.

(867). De la loi de continuité dans la communication du mouvement en général ; l'action des fluides est toujours une pression.
(868). Réflexion sur l'application de la théorie physico-mathématique de la percussion au choc des fluides ; pourquoi cette théorie n'y est pas applicable.
Recherche d'une équation entre la pression d'une différencio différentielle de surface et la vîtesse avec laquelle le fluide jailliroit par cette différencio-différentielle.
(873). Valeur de la pression lorsque la différencio-différentielle se meut perpendiculairement à son plan.
(874). Ce que devient cette équation lorsqu'on substitue à la pression une masse d'un poids équivalent.
(875). Ce que devient cette équation lorsque la différencio-différentielle est un parallélogramme rectangle dont la base est horizontale.
(877). Valeur de la pression perpendiculaire à la différencio-différentielle, dans le cas où elle se meut obliquement à son plan.
(879). Valeur, dans le cas précédent, de la pression décomposée suivant une direction qui fait un angle quelconque avec le plan de la différencio-différentielle.
(881). Valeur de la même pression, dans laquelle on introduit la projection de la direction précédente sur un plan horizontal passant par la base inférieure horizontale de la différencio-différentielle et l'angle formé par cette projection, et par une perpendiculaire à la base inférieure prolongée de la différencio-différentielle.
(882). Equation résultante de cette substitution.
(883). Ce que devient cette équation quand on substitue à la base horizontale de la différencio-différentielle la projection de cette base sur un plan vertical perpendiculaire à un autre plan vertical qui passe par la direction suivant laquelle s'évalue la pression.
(885). Equation qui donne la pression dans le second plan mentionné précédemment, décomposée horizontalement.
(887). Equation de la pression dans laquelle on introduit la projection, sur un plan horizontal, de la hauteur du parallélogramme différencio-différentiel.
(889). Pressions horizontales et verticales dans lesquelles entre la même projection.
(890). Comment on obtient la pression dans le sens du mouvement de la différencio-différentielle.
(891). Cas où cette différencio-différentielle se meut horizontalement ou verticalement.
(893). Comment il faut disposer les équations données jusqu'à présent, pour pouvoir désigner si la surface à laquelle appartient la différencio-différentielle est entièrement, ou en partie, plongée dans le fluide.
(894). Equations disposées pour parvenir à ce but.
(900). Analyse du cas où le fluide se meut, et où la différencio-différentielle est immobile ; pourquoi ce cas diffère de celui où le fluide en repos est choqué par la différencio-différentielle.

Digitized by Google

(902). Cas où le fluide et la différencio-différentielle sont tous les deux en mouvement.

(903). De la pression d'un rectangle à base horizontale et d'une hauteur infiniment petite.

Explication de la maniere dont les dénivellations sont produites, et détermination de leur hauteur.

L'existence de ces dénivellations est constatée par des expériences journalieres; modifications qu'il faut apporter à la détermination précédente de leur étendue.

Détermination des pressions horizontales antérieure et postérieure, qu'éprouve, dans une direction quelconque, un parallélogramme rectangle, dont deux côtés sont horizontaux, et qui se meut dans un fluide.

(909). Cas où le côté supérieur du parallélogramme est à la surface supérieure du fluide.

(910). Cas où le parallélogramme est entièrement plongé dans le fluide.

(912). Observation sur la solution du cas précédent.

(913). Cas où le fluide et le plan sont tous deux en mouvement.

(914). Maniere de déterminer la pression horizontale qu'éprouve une surface quelconque qui se meut dans un fluide.

Valeur de cette pression.

Cette même valeur réduite en série.

(918). Cas où l'on peut négliger les termes de la série, à partir du second inclusivement.

(919). Comment on fait entrer la dénivellation dans les valeurs précédentes.

(920). Comment on détermine la résultante des pressions qui agissent sur les différentes parties de la surface d'un corps.

(921). Application à un parallélipipede rectangle.

(922). Cas où les faces antérieure et postérieure ont une inclinaison.

(924). Cas où le solide est entièrement submergé.

(926). Formules de pression dans lesquelles on fait entrer la distance des faces antérieure et postérieure.

(927). Ce que devient cette formule dans le cas où les deux faces antérieure et postérieure coïncidant ensemble, le solide devient un plan.

Expériences qui confirment la théorie précédente.

(928). Expériences de don George Juan sur la pression d'une planche verticale exposée à l'action d'un courant.

Application des formules de pression à ces expériences.

(929). A quoi il faut attribuer l'excès des pressions calculées sur les pressions observées.

(930). L'expérience et la théorie s'accordent sur le rapport des pressions.

(931). La pression observée est à-peu-près moindre d'un tiers que la pression théorique.

(932). Expériences de M. J. Smeaton sur la force des fluides pour faire tourner les roues à aubes; machine dont il s'est servi.

(933) Détermination théorique du plus grand effet de la machine de M. Smeaton, et accord de cette détermination avec l'expérience.

Autre conformité de la théorie de don George Juan avec les expériences de M. J. Smeaton.

Exposition de la théorie ordinaire du choc et de la résistance.

(934). Recherche des formules ordinaires de pression par une méthode analogue à celle employée dans la théorie précédente du choc des fluides.

Digitized by Google

(936). Autre maniere de déterminer les formules ordinaires de pression.
(937). Ce qu'on entend par angle d'incidence, choc perpendiculaire et choc oblique.
(938). Volume d'eau dont le poids équivaut à la pression donnée par la théorie ordinaire ; différents sentiments sur la mesure absolue de ce volume.
(940). Difficultés auxquelles est sujette la théorie ordinaire du choc des fluides.

Résultats des expériences relatives à la théorie ordinaire de la résistance des fluides.

(941). Expériences défavorables à la théorie ordinaire du choc des fluides.
(944). Expériences sur la résistance des fluides faites par MM. d'Alembert, le marquis de Condorcet et l'abbé Bossut.
(945). Comment ces expériences ont été faites.
Idem. Il résulte de ces expériences, que le rapport des pressions observées est, relativement aux vîtesses, sensiblement le même que celui des pressions calculées par la théorie ordinaire.
(946). Observations de M. l'abbé Bossut sur les variations dont ce rapport est susceptible.
(947). Ces observations favorisent la théorie de don George Juan.
(948). Expériences sur les pressions de différentes surfaces sous une même vîtesse.
(949). Valeur assignée par M. l'abbé Bossut à la résistance directe et perpendiculaire d'une surface plane.
(950). Conclusion générale de ses expériences sur la résistance des fluides indéfinis.
(951) Conclusion particuliere des expériences sur la résistance des fluides dans les canaux étroits, relative à la percussion de l'eau qui coule dans un coursier.
(952). Expériences faites par MM. le marquis de Condorcet et l'abbé Bossut sur la résistance oblique des fluides.
(953). Tableau contenant les résultats de 69 de ces expériences.
(954). Formule déduite de ces expériences pour évaluer la résistance oblique des fluides.
Idem. Cette formule cesse d'être exacte lorsque les angles d'incidence sont petits.
(955). Expériences de M. le chevalier du Buat sur la résistance des fluides.

Théorie générale et rigoureuse du mouvement des fluides.

(956). Utilité qu'on peut retirer de la connoissance de la théorie rigoureuse du mouvement des fluides.
(957). Insuffisance du calcul intégral ordinaire pour résoudre le problême qu'elle comporte ; quelle est l'espece de calcul nécessaire pour cela ; géometres qui ont trouvé et employé ce calcul.
Tous les problêmes du mouvement des fluides, et même tous ceux de la mécanique, sont actuellement mis en équation.
(958). Etat de la question ; quelles sont les données et les inconnues du problême.
(959). Nombre d'équations que comporte la solution du problême.

Digitized by Google

(960). Équation qui doit résulter de la condition que le fluide est ou élastique ou incompressible.

Equations relatives aux différentes pressions et puissances qui agissent sur chaque molécule fluide.

Equation fournie par la relation entre la densité, la pression et la chaleur.

(961). Les inconnues du problême doivent être exprimées en fonctions des co-ordonnées et du temps.

(962). Notation pour la différentielle d'une variable fonction de plusieurs autres.

(963). Observation sur la maniere de considérer ce que devient la différentielle d'une variable fonction de plusieurs autres, lorsqu'on suppose nulles quelques unes des différences partielles.

(964). Equation relative à la compressibilité ou à l'incompressibilité du fluide.

(966). Equation qui exprime que le fluide est élastique.

(968). Equation qui exprime que le fluide est incompressible.

(969). Recherche des équations relatives aux pressions et aux puissances qui sollicitent une molécule fluide.

(970). Equations relatives à l'action des puissances qui sollicitent une molécule fluide.

(971). Réduction des trois équations précédentes à une seule.

Simplification de la notation de l'équation précédente.

(973). Cette équation exprime tout ce qu'exprimoient les trois équations auxquelles elle est substituée.

(974). Toute la théorie du mouvement des fluides réduite à deux équations.

(975). Comment la formule générale de l'équilibre des fluides se déduit de ces équations.

(976). Application de la théorie précédente à la détermination du mouvement des fluides dans les tuyaux étroits.

(987). Comment la théorie du mouvement des fluides, dans l'hypothese du parallélisme des tranches, se déduit, par approximation, de la théorie générale et rigoureuse du mouvement des fluides.

SECTION V.

Des machines et des moteurs qu'on peut y appliquer, considérés avec les différentes circonstances physiques qui influent sur l'équilibre et le mouvement.

Explication de la maniere dont l'adhérence, le frottement, la roideur des cordes et celle des chaînes influent sur le mouvement et l'équilibre dans les machines.

(989). Distinction entre les résistances représentatives de l'effet utile d'une machine, et celles qui consomment en pure perte une partie de l'effort du moteur.

(990). Les recherches contenues dans cette section ne sont qu'une conséquence de la théorie exposée dans les deux premieres.

Digitized by Google

(991). Analogie entre l'adhérence et la cohésion; dans quels cas le frottement et l'adhérence favorisent l'effort du moteur.

(994). Cas où le frottement et l'adhérence nécessitent une augmentation dans l'effort du moteur.

(996). Observation sur l'hypothese du mouvement proportionnel à la pression.

(997). Des effets du frottement dans le levier.

(998). Récapitulation générale des effets du frottement dans les machines.

(999). Différents exemples de l'utilité du frottement dans les arts.

(1000). Explication de la maniere dont la roideur des cordes augmente l'effort du moteur, et équation générale qui donne cette augmentation.

(1001). Ce que devient cette équation quand on suppose que la corde n'oppose aucune résistance à son *déroulement*.

(1002). Ce qui arriveroit si la corde étoit élastique.

(1003). Détermination de l'augmentation de l'effort du moteur, produite par la résistance qu'opposent les chaînes à s'enrouler et à se dérouler.

Théorie de l'équilibre et du mouvement dans le plan incliné, en ayant égard au frottement.

(1007). Détermination générale des conditions de l'équilibre sur le plan incliné, ayant égard au frottement et à l'adhérence.

(1009). Cette équation peut s'appliquer au cas d'un mouvement uniforme et lent.

(1010). Quel est l'angle du plan incliné avec la direction du moteur qui exige le plus petit effort dans le moteur.

(1011.) Cas où le plan incliné devient horizontal ainsi que la direction du moteur.

(1012.) Mouvement d'un corps pesant qui glisse le long d'un plan incliné.

(1013). Condition qui doit avoir lieu pour que ce corps ne tourne point en descendant le long du plan incliné.

(1014). Equation du mouvement dans le cas où cette condition a lieu.

Frottement d'une corde qui s'enroule autour d'un cylindre.

(1015). Recherche de l'équation qui donne en un point quelconque la tension de la corde employée à vaincre le frottement et la résistance.

(1016). L'arc embrassé par la corde croissant en progression arithmétique, la tension croit en progression géométrique; équation qui donne la valeur de l'effort du moteur.

(1016). Cas où l'on voudroit avoir égard à la roideur de la corde.

(1019). Application numérique de l'équation de l'article (1017).

Théorie de l'équilibre dans les machines de rotation, en ayant égard au frottement et à la roideur des cordes.

(1020). Modification de la formule relative à la résistance provenant de la roideur des cordes.

(1021). Cette formule est composée d'une partie constante et d'une partie variable; sa détermination ultérieure.

(1023). Du frottement dans la poulie simple.

(1024). Equations de l'équilibre dans la poulie simple, eu égard au frotte-

Digitized by Google

ment et à la roideur des cordes, lorsque l'axe est fixé à la poulie et lorsque l'axe est fixé à la chappe.

(1026). Remarque sur la derniere espece de poulie.

(1027). Cas où les directions du moteur et de la résistance sont paralleles.

(1028). Du frottement dans la poulie moufflée.

(1029). Equation de l'équilibre dans la poulie moufflée, eu égard au frottement et à la roideur des cordes.

(1030). Ce que devient cette équation lorsque la partie constante de la roideur de la corde peut être supposée nulle.

(1033). Cas où l'on suppose le frottement et la roideur des cordes nuls.

(1034). Recherche des conditions de l'équilibre dans le treuil, eu égard au frottement et à la roideur des cordes.

(1035). Equation qui exprime ces conditions.

(1036). Cas où les directions du moteur et de la résistance sont paralleles.

(1037). Cas où le treuil est employé à modérer la vîtesse d'un poids qui descend.

(1038). Cas où le treuil est mu au moyen de barres ou leviers.

(1039). Equation de l'équilibre, dans ce cas, applicable principalement au cabestan.

(1040). Théorie du treuil en mouvement, eu égard au frottement et à la roideur des cordes.

(1041). Quantités qui doivent entrer dans le calcul.

(1043). Nombre d'inconnues à déterminer dans la solution du problême.

(1044). Recherche de l'équation relative au mouvement de rotation autour de l'axe.

Exposition de cette équation.

(1047). Recherche des équations relatives à l'immobilité de l'axe.

Exposition de ces équations.

(1050). Equations qui donnent la pression de l'axe et le frottement qui résulte de cette pression.

(1052). Différentes valeurs du frottement, et équations qui prouvent que la force accélératrice est constante.

(1058). Comment on peut faire entrer la roideur de la corde dans la solution du problême précédent.

(1059). Cas où l'on suppose que le mouvement est uniforme, ou qu'il y a équilibre.

(1061). La poulie est un cas particulier des questions qu'on vient de traiter.

(1062). Cas où le treuil est employé à faire glisser un corps sur un plan horizontal.

(1063). Comment on peut déterminer par expérience le rapport du frottement à la pression, en faisant, au moyen d'un poids, glisser un traîneau sur un plan horizontal.

(1070). Du mouvement dans le treuil, lorsque la direction de l'effort du moteur n'est pas parallele à la direction de l'effort de la résistance.

(1071). L'équation relative au mouvement de rotation est la même dans ce deuxieme cas que dans le premier.

(1072). Recherche et exposition des autres équations.

Du frottement dans la vis.

(1077). Recherche de l'équation qui donne la valeur du moteur dans la vis à filet triangulaire, l'équilibre ayant lieu.

Exposition de cette équation.

(1080). Considérations propres à faciliter l'application de cette équation.

Digitized by Google

Expériences sur le frottement et sur la roideur des cordes.

(1089). Prix proposé par l'académie sur la théorie des machines simples, et remporté par M. Coulomb.
(1090). Appareil dont s'est servi cet auteur pour les expériences sur le frottement des surfaces planes.
(1093). Appareil pour les expériences sur le frottement des axes.
(1095). Deux sortes d'appareils pour les expériences sur la roideur des cordes, l'un de M. Amontons, l'autre de M. Coulomb : ce dernier sert en même temps à déterminer le frottement du second genre.
(1100). Remarques sur les résultats obtenus par l'un ou l'autre des appareils précédents.
(1101). Expériences sur les surfaces glissant l'une sur l'autre après un certain temps de repos.
(1104). Résultat moyen de ces expériences.
(1105). Cas où les surfaces de contact sont réduites aux moindres dimensions possibles.
(1107). Résultat moyen des expériences faites dans ce dernier cas.
(1108). Irrégularités introduites par la cohésion dans les expériences lorsque les pressions sont petites.
(1109). Frottement moyen de différentes especes de bois glissant à sec l'un sur l'autre dans le sens du fil du bois.
(1110). Expériences faites sur le frottement lorsque le fil de bois se recroise.
(1112). Le rapport du frottement à la pression est sensiblement constant dans ces expériences.
(1114). Expériences sur le frottement entre les bois et les métaux après un certain temps de repos.
(1115). Rapport moyen du frottement à la pression déduit de ces expériences.
(1116). Frottement à sec du cuivre sur le chêne.
(1118). Expériences sur le frottement d'un métal contre un autre métal.
(1119). Rapport moyen du frottement à la pression déduit de ces expériences.
(1120). Frottement du fer contre cuivre, en réduisant les surfaces de contact aux plus petites dimensions.
(1121). Expériences sur le frottement des surfaces garnies d'un enduit.
(1122). Observation sur l'enduit de vieux oing.
(1125). Longue durée du temps nécessaire pour que le frottement parvienne à sa limite lorsque les surfaces sont enduites de suif.
(1127). Expériences sur le frottement des lames de cuivre sur les lames de fer enduites de suif neuf.
(1128). Cas où l'on substitue à l'enduit précédent un enduit d'huile d'olives.
(1129). Cas où l'on emploie un enduit de vieux oing.
(1130). Expériences sur le frottement lorsque les corps se meuvent avec vitesse quelconque.
(1132). Formule pour déduire de ces expériences la valeur du frottement.
(1133). Observations sur les valeurs données par cette formule d'après les expériences.
(1134). Le frottement est sensiblement égal à 0, 1 depuis 188 jusqu'à 1788 livres de pression par pied quarré.
(1135). Expériences sur le frottement lorsque le fil de bois se recoupe à angle droit.

(1136). Les expériences donnent sensiblement le même résultat que les précédentes.
(1137). Remarque générale sur la différence du frottement lorsque le bois est de droit fil ou lorsque le fil de bois se recroise.
(1138). Expériences sur le frottement de différentes especes de bois.
(1139). Remarque particuliere sur le frottement du bois d'orme.
(1140). Remarques générales sur le frottement des bois et des métaux dans le cas du mouvement, et expérience sur cette espece de frottement.
(1141). Observations sur ces expériences.
(1144). Du rapport entre l'augmentation de traction et l'augmentation de vîtesse.
(1145). Observations sur les enduits et sur les surfaces de contact auxquelles on les applique.
(1147). Expériences sur le frottement du bois contre bois avec enduit.
(1148). Observations sur ces expériences.
(1154). Expériences sur le frottement des bois contre les métaux avec enduit.
(1156). Observervations sur ces expériences.
(1162). Expérience sur le frottement des métaux contre les métaux, soit à sec, soit avec enduit.
(1163). Observations sur ces expériences.
(1173). Théorie du frottement donnée par M. Coulomb, et principaux résultats des expériences sur lesquelles cette théorie est fondée.
(1174). Expérience sur la roideur des cordes, avec l'appareil de M. Amontons.
(1177). Application de la théorie à ces expériences.
La résistance d'une corde qu'on veut plier est à-peu-près proportionnelle au quarré de son diametre.
(1179). Suite de la comparaison des formules avec les résultats donnés par l'expérience.
(1181). Expériences sur la roideur d'un cable de 112 fils de carret.
(1182). Application des formules à ces expériences.
(1183). Expériences sur la roideur des cordes mouillées.
(1184). Observations sur ces expériences.
(1185). Expériences sur la roideur des cordes goudronnées.
(1186). Table pour évaluer la roideur de différentes especes de cordes.
(1187). Diminution de la roideur des cordes dans certaines circonstances.
(1188). Expériences faites, avec l'appareil de M. Coulomb, sur le frottement de la deuxieme espece.
(1190). Expériences faites avec le même appareil sur la roideur des cordes.
Conformité de ces expériences avec celles faites au moyen de l'appareil de M. Amontons.
(1191). Expériences sur le frottement des axes.
(1193). Observations sur ces expériences.
(1197). Remarques sur le frottement des axes, comparé à celui des traîneaux, et fin des observations sur les expériences.
(1200). Expériences sur le frottement des axes faits avec différentes especes de bois.
(1202). Peu d'influence de la vîtesse des axes.
(1203). Irrégularité du frottement des axes dans les premiers instants où il est surmonté; explication de cette irrégularité.
(1204). Expériences sur la roideur des cordes dans le cas du mouvement.
(1205). Observations sur ces expériences, qui prouvent que, dans les cas ordinaires, la vîtesse n'influe pas sensiblement sur la roideur des cordes.

Digitized by Google

(1207). Cas particulier où la vîtesse paroît influer sur la roideur des cordes.
(1208). Conclusion générale des expériences rapportées depuis l'article (1174).

Application de la théorie et des expériences exposées dans les chapitres précédents au calcul d'un cabestan.

Exemple de l'application de la théorie et de l'expérience à la pratique du calcul des machines.

Des forces de l'homme, ou de l'effort dont il est capable sous différentes vîtesses, lorsqu'il est employé à porter, pousser, traîner, lancer, et en général à mouvoir des machines.

(1211). Motifs qui engagent à donner une théorie détaillée de la force de l'homme.
(1212). Travail de M. Lambert sur cette matiere.
(1213). Différentes manieres dont l'homme emploie ses forces.
(1214). Maniere de considérer le mouvement d'un homme qui marche chargé d'un fardeau.
(1215). Recherche d'une équation fondamentale applicable au cas où un homme chargé d'un fardeau s'élance verticalement.
(1217). Exposition de cette équation.
(1218). Réflexion sur l'application de cette équation.
(1219). Considérations au moyen desquelles on obtient une intégrale approchée de cette équation.
(1221). Equation finie, déduite de ces considérations.
(1222). Mouvement d'un homme chargé d'un fardeau, qui s'élance dans une direction inclinée à l'horizon. Ce cas peut toujours se rapporter à celui où un homme marche sur un plan incliné.
(1224). Observations sur le pas de l'homme.
(1225). Recherche et exposition d'une équation qui donne la vîtesse moyenne d'un homme qui marche sur un plan incliné.
(1228). Comment on introduit, dans cette équation, le poids de l'homme et celui du fardeau dont il est chargé.
(1230). Equation qui donne le rapport entre la vîtesse de l'homme qui marche, le poids de son corps et de son fardeau et la pente du chemin sur lequel il marche.
(1232). Table pour faciliter l'usage de cette équation.
(1233). De la force centrifuge qui a lieu quand on marche.
(1234). Vîtesse nécessaire pour que la force centrifuge soit égale à la pesanteur, et que l'homme qui court avec cette vîtesse, ne pese point sur le sol.
(1236). Equation qui donne la vîtesse moyenne de la marche, lorsqu'on ne fait qu'un effort égal à celui nécessaire pour se tenir debout sans marcher.
Table pour faciliter cette équation.
(1238). Détermination du coëfficient constant de la valeur de la vîtesse moyenne.
(1241). Recherche des pentes qui comportent les plus grandes vîtesses, soit en descendant, soit en montant, lorsque l'homme ne fait qu'un effort égal à celui nécessaire pour se tenir debout.
(1245). Position la plus avantageuse d'un homme dans la roue à tympan.
(1247). Recherche et exposition des formules au moyen desquelles le fardeau et l'inclinaison du chemin étant donnés, on puisse déterminer l'effort nécessaire

Digitized

nécessaire pour que cet homme fasse plus de chemin possible avant d'épuiser ses forces, la vîtesse qui en résulte, et le temps pendant lequel l'homme sera capable de supporter cet effort.

Ce que deviennent ces équations lorsqu'on suppose que le plus grand effort dont l'homme est capable est égal au poids de son corps.

(1251). Quantité indéterminée qui reste dans ces équations.

(1252). Du cas où le produit de la vîtesse par le fardeau est un *maximum*.

(1253). Du cas où un homme, marchant sur un chemin horizontal, pousse ou tire dans une direction horizontale.

(1254). Recherche et exposition d'une équation qui donne la valeur de l'effort horizontal du bras.

(1257). Temps pendant lequel cet effort peut subsister.

(1258). Effort de l'homme pour se tenir droit sur ses pieds en poussant ou tirant.

(1259). Recherche et exposition d'une équation qui donne la vîtesse moyenne de l'homme.

(1261). De la relation entre le temps nécessaire pour épuiser les efforts dont les pieds ou les bras sont susceptibles.

(1263) Recherche d'une équation qui donne l'inclinaison du corps de l'homme nécessaire pour que cet homme, marchant horizontalement, pousse ou tire horizontalement avec le plus de force et de vîtesse et fasse le plus de chemin possible avant d'être las.

(1268). Ce qu'on entend par moment statique de l'homme.

(1269). Table pour faciliter l'usage de l'équation précédente, en supposant une valeur quelconque au plus grand effort dont l'homme est capable.

(1270). *Maximum* déduit de cette table, et réflexion sur les variations dont le moment statique de l'homme est susceptible.

(1273). De l'homme qui marche sur un chemin incliné à l'horizon, et qui pousse ou tire dans une direction quelconque.

Equation qui donne sa vîtesse moyenne.

Ce que devient cette équation lorsqu'on suppose le chemin horizontal.

(1278). Recherche et exposition des équations applicables au cas où le chemin étant horizontal, l'homme tire avec le plus de vîtesse et de force, et fait le plus de chemin possible avant d'être las.

(1280). Application de ces équations.

(1281). Réflexions sur ces applications, et sur les pentes du chemin correspondantes aux directions dans lesquelles on pousse ou tire.

(1282). Cas où l'homme est employé à lancer une masse; recherche de la valeur de la force accélératrice qu'il communique à cette masse.

Equation qui donne la hauteur due à la vîtesse finale.

(1288). Ce que devient cette équation en supposant le bras également éloigné de la verticale au commencement et à la fin de l'action de l'homme sur le corps.

(1290). Application de l'équation qui résulte de cette hypothese.

(1291). Cas où l'on introduit dans la question le frottement ou d'autres obstacles semblables.

De la force des chevaux.

(1292). Analogie des recherches sur la force de l'homme et de celles sur la force des animaux.

(1293). Défaut de connoissances expérimentales sur cette matiere.

(1294). Détails sur la marche du cheval.

(1296). Du cheval employé à porter des fardeaux.

Digitized by Google

(1297). De la vîtesse comparative des hommes et des chevaux employés les uns et les autres à porter des fardeaux.

(1298). Du cheval employé à tirer.

(1299). Utilité de la charge à dos pour faciliter le tirage.

(1300). De la meilleure disposition des traits pour le tirage.

(1301). De l'effort qui tend à abattre les chevaux aux changements de pente, et de l'influence de la longueur des traits dans ce cas.

(1304). Application des équations résultantes des recherches précédentes.

(1305). Du cheval qui tire en parcourant la circonférence d'un cercle ; avantage qu'on obtient en donnant au cercle le plus grand rayon possible.

(1307). De l'effort qu'un cheval peut faire journellement pendant un certain nombre d'heures. Il seroit à desirer qu'on fît de nouvelles expériences sur cet objet.

(1308). De l'emploi du poids du cheval pour mouvoir les machines.

Du fluide élastique produit par l'eau réduite en vapeur, et de l'application de ce fluide au mouvement des machines.

(1309). Raisons qui ont engagé à renvoyer à ce chapitre les recherches sur l'action de l'eau réduite en vapeur.

(1310). Détails qu'il contient sur le mécanisme des machines à feu.

(1311). Des découvertes modernes sur la physique du feu ; de la *lumiere*, du *calorique* et de leurs différences.

(1312). Le calorique est un fluide éminemment élastique. Comment ses combinaisons avec différents corps expliquent des phénomenes qu'on n'avoit point encore expliqués.

(1314). Comment le calorique réduit les différents corps en *gas* ou fluides aériformes.

(1315). L'élasticité du calorique produit en plus grande partie celle des gas.

(1316). Opposition continuelle entre l'effort expansif du calorique et l'effort aggrégatif de la cohésion ; effets de cette opposition.

(1317). Le calorique n'a à surmonter dans les substances liquides que la pression de l'atmosphere ou d'un fluide élastique quelconque.

(1318). Conséquence de la proposition précédente ; expériences de MM. Lavoisier et de Luc à l'appui de cette conséquence.

(1319). Autres conséquences de la même proposition.

(1321). Comment la théorie du calorique s'applique à l'expansion de l'eau réduite en vapeur.

(1322). Conformité de la théorie et des expériences faites avec l'appareil précédent.

(1324). De la mesure absolue de la force expansive du gas aqueux.

(1329). Travaux de Savery sur les machines à feu.

(1330). Il est soupçonné d'avoir puisé ses idées dans l'ouvrage du marquis de Worcester.

(1331). Description d'une machine à feu, de Savery ; sa ressemblance avec celle décrite par le marquis de Worcester.

(1332). Autre machine de Savery, plus simple que la précédente.

(1334). Moyens employés postérieurement pour perfectionner les machines précédentes.

(1335). Travaux de M. Papin sur les machines à feu : ce savant est principalement redevable de sa célébrité à son digesteur.

(1336). Inventions de MM. Amontons et Dalesme sur les machines à feu.

(1337). Perfection ajoutée à la machine à feu, pour rendre indéfini son usage qui, auparavant, se bornoit à l'élévation de l'eau.

Digitized by Google

Cette perfection, faussement attribuée à *Savery*, est due à Newcomen et Jean Cawley.

(1338). Description de la machine à feu de Newcomen, ses avantages sur celle de Savery.

(1341). Inconvénients de la machine de Newcomen; description de la machine à feu de M. Wats, qui remédie à une partie de ces inconvénients.

Pompe à air adaptée à cette machine.

(1342). Moyen de modérer à volonté la vîtesse de cette machine.

(1344). Différence remarquable entre les machines de Newcomen et de Wats.

(1345). Comment M. le chevalier de Bettancourt a deviné le principe d'une machine à feu postérieurement construite par MM. Wats et Bolton.

Modele fait par M. le chevalier de Bettancourt d'après ce principe, adopté et exécuté en grand par MM. Perrier.

(1346). Description d'une machine à feu à double effet, de l'invention de M. le chevalier de Bettancourt.

(1350). Description sommaire et provisoire du mécanisme au moyen duquel la machine à double effet produit le mouvement de rotation.

Digitized by Google

MATIERES

CONTENUES DANS LES NOTES.

N°. *Les chiffres de renvoi indiquent les articles auxquels les notes se rapportent.*

(26). Exposition de la maniere dont M. d'Alembert a démontré une des formules fondamentales des mouvements variés.

(31). Réflexions sur la démonstration des deux loix qui dérivent du principe de l'inertie des corps.

(37). De la communication du mouvement entre deux corps lorsque le rapport des masses est incommensurable.

(154). Méthode pour la composition et décomposition des mouvements de rotation.

(169). Valeur du rayon terrestre à l'équation et au pole et expériences sur la variation de la pesanteur à différentes hauteurs au-dessus du niveau de la mer.

(170). Histoire des premiers essais faits par Newton pour s'assurer de l'existence de la gravitation universelle.

(171). Valeur absolue de la force centrifuge à l'équateur et loix de sa variation.

(174). Expériences de Newton pour prouver que les poids sont proportionnels aux masses.

(220). Note historique sur le P. Guldin, auteur de la méthode *centrobarique*.

(267). Solutions de différents problêmes sur les machines funiculaires.

(288). Note sur la vraie acception du mot *moment* en mécanique.

(340). Description et usage du micrometre à vis.

(356). Note sur l'équilibre de plusieurs coins pesants.

(362). Ce qu'on entend par *assises* en maçonnerie.

(364). Ce qu'on entend par *épure* dans la coupe des pierres.

(368). Démonstration particuliere de la propriété des voûtes elliptiques en équilibre, d'augmenter d'épaisseur du sommet aux naissances.

(377). Expressions du rayon de courbure.

(400). Reflexions sur les différentes manieres d'obtenir les formules générales du mouvement.

(412). Note historique sur l'application de la cycloïde aux horloges à pendule.

(414). Evaluation numérique de l'erreur qu'on peut commettre en supposant l'isochronisme dans les petits arcs.

(417). Formule et méthode pour régler très exactement les pendules sur le temps moyen.

(418) Usages du pendule pour mesurer la force accélératrice de la pesanteur, le rapport des deux axes de la terre, et pour servir de mesure universelle.

(419). Ce que c'est que courbes *brachystocrones*, et *tautochrones*.

(429). Des pendules propres à compenser la dilatation.

(491). De la vîtesse du moteur dans les machines.

Digitized by Google

(524). Résultats des meilleures expériences faites sur le poids de l'air et sur sa dilatabilité par la chaleur.

(526). Résultats analogues sur le poids et la dilatabilité de l'eau.

Idem. Réflexions sur l'irrégularité apparente de la variation du volume de l'eau aux environs de la glace.

(545). Ce qu'on entend par courbe *gravicentrique* ou *barocentrique.*

(548). Recherches sur les avantages respectifs des niveaux à perpendicule et à bulle d'air.

Idem. M. de Chezy, inventeur de la méthode pour travailler les tubes des niveaux.

(551). Formules de la réfraction terrestre; applications de ces formules.

(593). Ouvrage de MM. l'abbé Bossut et Viallet sur la construction la plus avantageuse des digues.

(620). Méthode et formule pour mesurer exactement le diametre d'un fil de métal.

(627). Exposition des découvertes récentes faites sur l'air et l'eau, considérés sous l'aspect qui intéresse la physique et la chymie.

(634). Formule pour trouver le poids spécifique de l'air à différentes pressions et différentes températures, lorsqu'on connoît ce poids pour une pression et une température données.

(640). Accord entre les mesures géométriques et barométriques des hauteurs, lorsque, dans les premieres, on a égard à la rétraction terrestre; tables de M. Lambert sur cet objet.

(736). Note historique sur les clepsydres.

(784). De la différence de vitesse entre le filet central et ceux des bords d'un orifice par où l'eau s'écoule.

(943). Note sur le rapport trouvé par M. Parent pour le plus grand effet des machines.

(1235). Effet de la force centrifuge dans un homme qui court rapidement.

(1239). Rapport du pied-de-roi au pied du Rhin.

(1295). Reproche injuste fait par Desaguiller aux sculpteurs de chevaux, anciens et modernes.

(1309). Influence de la dilatation instantanée du gas aqueux sur différents phénomenes qui ont lieu dans l'intérieur et à la surface du globe terrestre.

(1312). Affinités chymiques de la lumiere, effets de ces affinités dans les plantes.

Idem. Note historique sur le *phlogistique.*

Idem. Propriétés caractéristiques et distinctives de la lumiere et du calorique; explication des phénomenes de la combustion.

Idem. La flamme n'est que la combustion isolée et particuliere des matieres volatiles que la chaleur dégage du corps en combustion; expériences qui le prouvent.

(1317). Comment un corps qui passe de l'état liquide à l'état gaseux produit du froid thermométrique.

(1320). Distinction à faire entre les gas proprement dits et les vapeurs ou émanations d'un liquide produites par la chaleur; limites de l'expansion des fluides aériformes dégagés du poids de l'atmosphere.

(1325). formule pour la force expansive de la vapeur de l'esprit-de-vin; table contenant les résultats de cette formule comparés à ceux de l'expérience.

Fin de la table des matieres.

ERRATA.

Page 5, ligne pénultieme *le temps ck*, lisez le temps C*k*.
Page 8, ligne 9, *on voit* (18), lisez *on voit* (19).
Page 12, note, ligne 19, $PM' = e'$, lisez $P'M' = e'$.
Page 22, ligne 17, $\bullet\, dt$, $\bullet\, dt$, lisez $M \bullet dt$, $m \bullet dt$.
Page 24, ligne 3, *l'un par l'autre*, lisez *l'une par l'autre*.
Page 26, ligne 9, *c'est-à-dire AB*, lisez *c'est-à-dire Ab*.
Page 32, ligne 6, *quelconque F*, lisez *quelconque F, G ou E*.
Idem. derniere ligne, (49) *sur*, lisez (50) *sur*.
Page 33, 2e indication marginale, *menu*, lisez *même*.
Page 34, ligne pénultieme *l'un et l'autre*, lisez *l'une et l'autre*.
Page 39, ligne 12, P', lisez P.
Page 40, ligne 4, *usages*, lisez *équilibre*.
Page 43, ligne 2, *dt ou* $\bullet\, dt$, lisez *Mdt ou* $M \bullet dt$.
Page 45, ligne 1, *de deux*, lisez *des deux*.
Page 58, ligne 27, *c'*, *d*, n°. 3, lisez *d*, *c'*, n°. 3.
Page 59, ligne 28, *translation*, lisez *rotation*.
Page 62, ligne 23, *force motrice*, lisez *force accélératrice*.
Page 73, ligne 25 (142), lisez (152).
Page 80, deuxieme indication marginale, *entre*, lisez *entrent*.
Page 88, ligne 17, *est en général*, lisez *et en général*.
Page 107, ligne 11, *que BR*, lisez *que AR*.
Idem. Accentuez tous les A de l'art. 262.
Page. 112, ligne 35, $(A' A'' A'' + A' A'' B'')$, lisez $(A' A'' A''' + A' A'' B''')$.
Idem. ligne derniere, *et ainsi de suite*, lisez $= 0$, *et ainsi de suite*.
Page 124, ligne 19, *forces motrices*, lisez *forces accélératrices*.
Page 126, note, *demi-angle et au*, lisez *demi-angle au*.
Page 129, ligne 19, *mouffle fixe*, lisez *mouffle mobile*.
Idem. deuxieme indication marginale, *et à la mouffle mobile*, lisez *ou à la mouffle mobile*.
Page 136, ligne derniere $k'' n'''$, lisez $k'' n''$.
Page 143, ligne 39, *le parois*, lisez *la paroi*.
Page 155, ligne 15, *par son centre de gravité*, lisez *par le centre de gravité du pied droit*.

Idem. ligne 22, $\frac{\frac{1}{2} A S}{\sin. A}$ lisez $\frac{\frac{1}{2} A S}{\sin. a}$.

Page 158, ligne 5, *f b c q*, lisez *f b c g*.
Page 159, ligne 15, *infiniment grosse*, lisez *infiniment flexible*.
Page 160, ligne 2, *aux naissances*, lisez *à l'extradós*.
Page 168, ligne 4, *et son joint*, lisez *à son joint*.
Page 183, ligne 27, *rotation*, lisez *relation*.
Page 189, ligne antépénult., *centre*, lisez *cercle*.
Page 191, ligne 7, $t =$ lisez $dt =$.
Page 194, note, ligne 11, *lance*, lisez *lame*.
Page 197, *dénominations* $\sqrt{x}$, $\sqrt{x'}$ *sont constantes*, lisez *dénominateurs*, $\overline{\sqrt{}}\, x$, $\overline{\sqrt{}}\, x'$ *sont constants*.
Page 201, ligne 1, *un parallele*, lisez *une parallele*.
Idem. ligne 18 $\overline{RR'}^2 = \overline{RP}^2$, lisez $\overline{RR'}^2 + \overline{RP}^2$.
Page 208, ligne 6, *passée*, lisez *passer*.
Page 237, ligne 22, se mouvent, lisez *se meuvent*.
Page 239, ligne 6, *être égal à*, lisez *être à*.
Idem. ligne 28, $f -$, lisez $f =$.
Page 241, ligne 14, *du moteur*, lisez *de la résistance*.
Page 259, ligne 26. *qui*, lisez *que*.
Page 264, ligne 5, YZ, lisez XZ.
Page 265, ligne 9, *en D*, lisez *en A*.
Page 268, ligne 19, MO, lisez N' O.

Page 270, ligne 6, *mais*, lisez *et*.
Page 292, ligne 5, *adrometre*, lisez *arèometre*.
Page 294, ligne 22, *poids de* z', lisez *poids et de* z''.
Page 298, note, ligne 25, *dépôt*, lisez *déchet*.
Idem. ligne 36, *verre*, lisez *fer*.
Page 308, ligne 26 (*fig*. 146), lisez (*fig*. 145).
Page 328, deuxieme note, *les discours préliminaires de l'hydrostatique*, lisez *le discours préliminaire de l'hydrodynamique*.
Page 348, ligne 15, *trop foible*, lisez *trop forte*.
Page 349, ligne 22, cos. $\zeta - 1$, lisez cos. $\zeta = 1$.
Page 409, note, *poids du moteur*, lisez *poids moteur*.
Page 420, ligne 2, $+\left[\left(\frac{da''}{dt}\right)$ + lisez $\left[\left(\frac{du''}{dt}\right)+$.
Idem. ligne 8, *nombre*, lisez *membre*.
Page 437, ligne 21 $Re^{\frac{fA}{r}} + K$ lisez $Re^{\frac{fA}{r}} + K$.
Page 448, ligne 28, $\frac{r}{R}$, S lisez $\frac{r}{R}$, S.
Page 452, ligne 13, $f = \frac{1}{2}S\left\{$ lisez $f = \frac{1}{2}S\right\{$
Page 457, ligne 25, *adrhd*, lisez *adrdh*.
Page 461, indication marginale, *premier genre*, lisez *second genre*.
Page 470, ligne 12, de l'art. 1126. $\frac{a+mT^{\mu}}{b+T\mu}$ lisez $\frac{a+mT^{\mu}}{b+T^{\mu}}$
Page 471, troisieme colonne de la table, 10″ lisez 0″.
Page 486, premiere ligne, *du contact*, lisez *de contact*.
Page 493, ligne 32, *mais la* 11ᵉ, lisez *mais par la* 11ᵉ.
Page 504, indication marginale, *Coulomb*, lisez *Amontons*.
Page 509, deuxieme indication marginale, *vîtesse des axes*, lisez *vîtesse sur le frottement des axes*.
Page 511, deuxieme ligne de l'article 1205, *caetrr*, lisez *carret*.
Page 540, ligne 34, *M. l'abbé de V....*, lisez *M. l'abbé Demandres*.
Page 583, ligne 24, *et nature*, lisez *et la nature*.
Page 587, ligne 31, *et à la mouffle*, lisez *ou à la mouffle*.
Page 590, derniere ligne, *qui ont lieu entre*, lisez *qui ont lieu*.

CATALOGUE

DE QUELQUES LIVRES D'ARCHITECTURE

HYDRAULIQUE ET CIVILE,

Qui se trouvent chez FIRMIN DIDOT, *libraire pour l'Artillerie, le Génie et l'Architecture.*

DESCRIPTION des projets et de la construction des ponts de Neuilly, de Mantes, d'Orléans et autres; des projets du canal de Bourgogne pour la communication des deux mers par Dijon; et celui de la conduite des eaux de l'Yvette et de Bievre à Paris; nouvelle édition corrigée, augmentée des ponts de Château-Thierry, de Brunoi, des Nonettes, de Bicheret, de la Newa à Saint-Pétersbourg, et de plusieurs mémoires intéressants sur les éboulements, les pilots et pieux, les cintrements et décintrements; par M. Perronet, in-4. grand papier, avec un volume de planches, forme d'Atlas, broché en carton, 90 liv.

Cet ouvrage, réuni à la *nouvelle Architecture Hydraulique* de M. de Prony, formera un cours complet d'instructions relatives à la science de l'hydraulique.

Les additions qui ont été faites dans cette nouvelle édition, ont été imprimées séparément pour les personnes qui voudroient completer la première édition in-folio.

Architecture hydraulique de BELIDOR, en deux parties : la premiere contient l'art de conduire, d'élever et de ménager les eaux pour les différents besoins de la vie; deux volumes in-4. grand papier, avec 100 planches. 48 liv.

La seconde comprend l'art de diriger les eaux de la mer et des rivieres à l'avantage de la défense des places, du commerce et de l'agriculture; 2 volumes in-4. grand pap. avec 120 planches, 52 liv.

Suite de l'architecture hydraulique : Essai sur la construction la plus avantageuse des machines hydrauliques, et particulièrement des moulins à bled; par M. Fabre, ingénieur hydraulique de Provence, correspondant de l'académie royale des sciences, in-4. grand pap. fig., 15 liv.

Nouveaux principes d'hydraulique, par M. Bernard, directeur-adjoint de l'observatoire royal de la marine de Marseille, in-4. fig. rel., 15 liv.

Dictionnaire d'architecture hydraulique et civile, où l'on explique les termes de l'art de bâtir et de ses différentes parties, comme la construction des écluses et des canaux, charpenterie, serrurerie, etc. in-4., par Daviler, grand papier, 16 liv.

Théorie des fleuves, avec l'art de bâtir dans leurs eaux et de prévenir leurs ravages, in-4. grand pap. avec 13 planc. broc. 6 liv.

Traité des digues, de Bourdet, in-8. broc. 2 liv. 10 s.

La théorie et la pratique du Jardinage, avec un traité d'hydraulique convenable aux jardins, nouvelle édit. augmentée avec 49 pl. in-4. 16 liv.

Théorie complete de la construction et de la manœuvre des vaisseaux, par Euler, in-8. rel. 5 liv.

Examen maritime, théorique et pratique, ou traité de mécanique appliquée à la construction des vaisseaux et autres bâtiments, traduit de l'espagnol de don Georges Juan d'Ulloa, par M. l'Evêque, correspondant de l'académie des sciences, avec notes et additions, 2 vol. in-4. 30 liv.

Traité du navire et de sa construction, par M. Bouguer, in-4. 15 liv.

Essai géométrique et pratique sur l'architecture navale, par M. Vial du Clairbois, 2 vol. in-8. fig. 10 l. 10 s.

Traité de stéréotomie, ou la théorie et la pratique de la coupe des pierres et des bois, par M. Frésier, 3 vol. in-4. 45 liv.

L'art du Trait de charpenterie, par Nicolas Fourneau, 4 parties in-fol., orné de 88 pl. 36 liv.

Digitized

TABLE pour réduire en fractions décimales les fractions ordinaires de la toise, du pied, etc.

Pouces cubes contenus dans une fraction décimale de pied cube.	Nombres décimaux.	Valeur des nombres décimaux, l'unité étant							Pouces cubes contenus dans une fraction décimale de pied cube.	Nombres décimaux.	Valeur des nombres décimaux, l'unité étant						
		Toise.				Pied.					Toise.				Pied.		
		pi.	po.	li.		po.	li.				pi.	po.	li.		po.	li.	
1	0,000579	0	0	0	6′	0	0	1′	48	0,027778	0	2	0	0′	0	4	0′
2	0,001157	0	0	1	0	0	0	2	49	0,028356	0	2	0	6	0	4	1
3	0,001736	0	0	1	6	0	0	3	50	0,028935	0	2	1	0	0	4	2
4	0,002315	0	0	2	0	0	0	4	51	0,029514	0	2	1	6	0	4	3
5	0,002894	0	0	2	6	0	0	5	52	0,030093	0	2	2	0	0	4	4
6	0,003472	0	0	3	0	0	0	6	53	0,030671	0	2	2	6	0	4	5
7	0,004051	0	0	3	6	0	0	7	54	0,031250	0	2	3	0	0	4	6
8	0,004630	0	0	4	0	0	0	8	55	0,031829	0	2	3	6	0	4	7
9	0,005208	0	0	4	6	0	0	9	56	0,032407	0	2	4	0	0	4	8
10	0,005787	0	0	5	0	0	0	10	57	0,032986	0	2	4	6	0	4	9
11	0,006366	0	0	5	6	0	0	11	58	0,033565	0	2	5	0	0	4	10
12	0,006944	0	0	6	0	0	1	0	59	0,034144	0	2	5	6	0	4	11
13	0,007523	0	0	6	6	0	1	1	60	0,034722	0	2	6	0	0	5	0
14	0,008102	0	0	7	0	0	1	2	61	0,035301	0	2	6	6	0	5	1
15	0,008681	0	0	7	6	0	1	3	62	0,035880	0	2	7	0	0	5	2
16	0,009259	0	0	8	0	0	1	4	63	0,036458	0	2	7	6	0	5	3
17	0,009838	0	0	8	6	0	1	5	64	0,037037	0	2	8	0	0	5	4
18	0,010417	0	0	9	0	0	1	6	65	0,037616	0	2	8	6	0	5	5
19	0,010995	0	0	9	6	0	1	7	66	0,038194	0	2	9	0	0	5	6
20	0,011574	0	0	10	0	0	1	8	67	0,038773	0	2	9	6	0	5	7
21	0,012153	0	0	10	6	0	1	9	68	0,039352	0	2	10	0	0	5	8
22	0,012731	0	0	11	0	0	1	10	69	0,039931	0	2	10	6	0	5	9
23	0,013310	0	0	11	6	0	1	11	70	0,040509	0	2	11	0	0	5	10
24	0,013889	0	1	0	0	0	2	0	71	0,041088	0	2	11	6	0	5	11
25	0,014468	0	1	0	6	0	2	1	72	0,041667	0	3	0	0	0	6	0
26	0,015046	0	1	1	0	0	2	2	73	0,042245	0	3	0	6	0	6	1
27	0,015625	0	1	1	6	0	2	3	74	0,042824	0	3	1	0	0	6	2
28	0,016204	0	1	2	0	0	2	4	75	0,043403	0	3	1	6	0	6	3
29	0,016782	0	1	2	6	0	2	5	76	0,043982	0	3	2	0	0	6	4
30	0,017361	0	1	3	0	0	2	6	77	0,044560	0	3	2	6	0	6	5
31	0,017940	0	1	3	6	0	2	7	78	0,045139	0	3	3	0	0	6	6
32	0,018519	0	1	4	0	0	2	8	79	0,045718	0	3	3	6	0	6	7
33	0,019097	0	1	4	6	0	2	9	80	0,046296	0	3	4	0	0	6	8
34	0,019676	0	1	5	0	0	2	10	81	0,046875	0	3	4	6	0	6	9
35	0,020255	0	1	5	6	0	2	11	82	0,047454	0	3	5	0	0	6	10
36	0,020833	0	1	6	0	0	3	0	83	0,048032	0	3	5	6	0	6	11
37	0,021412	0	1	6	6	0	3	1	84	0,048611	0	3	6	0	0	7	0
38	0,021991	0	1	7	0	0	3	2	85	0,049190	0	3	6	6	0	7	1
39	0,022569	0	1	7	6	0	3	3	86	0,049769	0	3	7	0	0	7	2
40	0,023148	0	1	8	0	0	3	4	87	0,050347	0	3	7	6	0	7	3
41	0,023727	0	1	8	6	0	3	5	88	0,050926	0	3	8	0	0	7	4
42	0,024306	0	1	9	0	0	3	6	89	0,051505	0	3	8	6	0	7	5
43	0,024884	0	1	9	6	0	3	7	90	0,052083	0	3	9	0	0	7	6
44	0,025463	0	1	10	0	0	3	8	91	0,052662	0	3	9	6	0	7	7
45	0,026042	0	1	10	6	0	3	9	92	0,053241	0	3	10	0	0	7	8
46	0,026620	0	1	11	0	0	3	10	93	0,053819	0	3	10	6	0	7	9
47	0,027199	0	1	11	6	0	3	11	94	0,054398	0	3	11	0	0	7	10

Digitized by Google

TABLE pour réduire en fractions décimales les fractions ordinaires de la toise, du pied, etc.

Pouces cubes contenus dans une fraction décimale de pied cube.	Nombres décimaux.	Valeur des nombres décimaux, l'unité étant							Pouces cubes contenus dans une fraction décimale de pied cube.	Nombres décimaux.	Valeur des nombres décimaux, l'unité étant						
		Toise.				Pied.					Toise.				Pied.		
		pi.	po.	li.		po.	li.				pi.	po.	li.		po.	li.	
95	0,054977	0	3	11	6′	0	7	11′	142	0,082176	0	5	11	6′	0	11	10
96	0,055556	0	4	0	0	0	8	0	143	0,082755	0	5	11	6	0	11	11
97	0,056134	0	4	0	6	0	8	1	144	0,083333	0	6	0	0	1	0	0
98	0,056713	0	4	1	0	0	8	2	145	0,083912	0	6	0	6	1	0	1
99	0,057292	0	4	1	6	0	8	3	146	0,084491	0	6	1	0	1	0	2
100	0,057870	0	4	2	0	0	8	4	147	0,085069	0	6	1	6	1	0	3
101	0,058449	0	4	2	6	0	8	5	148	0,085648	0	6	2	0	1	0	4
102	0,059028	0	4	3	0	0	8	6	149	0,086227	0	6	2	6	1	0	5
103	0,059606	0	4	3	6	0	8	7	150	0,086806	0	6	3	0	1	0	6
104	0,060185	0	4	4	0	0	8	8	151	0,087384	0	6	3	6	1	0	7
105	0,060764	0	4	4	6	0	8	9	152	0,087963	0	6	4	0	1	0	8
106	0,061343	0	4	5	0	0	8	10	153	0,088542	0	6	4	6	1	0	9
107	0,061921	0	4	5	6	0	8	11	154	0,089120	0	6	5	0	1	0	10
108	0,062500	0	4	6	0	0	9	0	155	0,089699	0	6	5	6	1	0	11
109	0,063079	0	4	6	6	0	9	1	156	0,090278	0	6	6	0	1	1	0
110	0,063657	0	4	7	0	0	9	2	157	0,090856	0	6	6	6	1	1	1
111	0,064236	0	4	7	6	0	9	3	158	0,091435	0	6	7	0	1	1	2
112	0,064815	0	4	8	0	0	9	4	159	0,092014	0	6	7	6	1	1	3
113	0,065394	0	4	8	6	0	9	5	160	0,092593	0	6	8	0	1	1	4
114	0,065972	0	4	9	0	0	9	6	161	0,093171	0	6	8	6	1	1	5
115	0,066551	0	4	9	6	0	9	7	162	0,093750	0	6	9	0	1	1	6
116	0,067130	0	4	10	0	0	9	8	163	0,094329	0	6	9	6	1	1	7
117	0,067708	0	4	10	6	0	9	9	164	0,094907	0	6	10	0	1	1	8
118	0,068287	0	4	11	0	0	9	10	165	0,095486	0	6	10	6	1	1	9
119	0,068866	0	4	11	6	0	9	11	166	0,096065	0	6	11	0	1	1	10
120	0,069444	0	5	0	0	0	10	0	167	0,096644	0	6	11	6	1	1	11
121	0,070023	0	5	0	6	0	10	1	168	0,097222	0	7	0	0	1	2	0
122	0,070602	0	5	1	0	0	10	2	169	0,097801	0	7	0	6	1	2	1
123	0,071181	0	5	1	6	0	10	3	170	0,098380	0	7	1	0	1	2	2
124	0,071759	0	5	2	0	0	10	4	171	0,098958	0	7	1	6	1	2	3
125	0,072338	0	5	2	6	0	10	5	172	0,099537	0	7	2	0	1	2	4
126	0,072917	0	5	3	0	0	10	6	173	0,100116	0	7	2	6	1	2	5
127	0,073495	0	5	3	6	0	10	7	174	0,100694	0	7	3	0	1	2	6
128	0,074074	0	5	4	0	0	10	8	175	0,101273	0	7	3	6	1	2	7
129	0,074653	0	5	4	6	0	10	9	176	0,101852	0	7	4	0	1	2	8
130	0,075231	0	5	5	0	0	10	10	177	0,102431	0	7	4	6	1	2	9
131	0,075810	0	5	5	6	0	10	11	178	0,103009	0	7	5	0	1	2	10
132	0,076389	0	5	6	0	0	11	0	179	0,103588	0	7	5	6	1	2	11
133	0,076968	0	5	6	6	0	11	1	180	0,104167	0	7	6	0	1	3	0
134	0,077546	0	5	7	0	0	11	2	181	0,104745	0	7	6	6	1	3	1
135	0,078125	0	5	7	6	0	11	3	182	0,105324	0	7	7	0	1	3	2
136	0,078704	0	5	8	0	0	11	4	183	0,105903	0	7	7	6	1	3	3
137	0,079282	0	5	8	6	0	11	5	184	0,106481	0	7	8	0	1	3	4
138	0,079861	0	5	9	0	0	11	6	185	0,107060	0	7	8	6	1	3	5
139	0,080440	0	5	9	6	0	11	7	186	0,107639	0	7	9	0	1	3	6
140	0,081019	0	5	10	0	0	11	8	187	0,108218	0	7	9	6	1	3	7
141	0,081597	0	5	10	6	0	11	9	188	0,108796	0	7	10	0	1	3	8

Digitized by Google

TABLE pour réduire en fractions décimales les fractions ordinaires de la toise, du pied, etc.

Pouces cubes contenus dans une fraction décimale de pied cube.	Nombres décimaux.	Valeur des nombres décimaux, l'unité étant							Pouces cubes contenus dans une fraction décimale de pied cube.	Nombres décimaux.	Valeur des nombres décimaux, l'unité étant						
		Toise.				Pied.					Toise.				Pied.		
		pi.	po.	li.		po.	li.				pi.	po.	li.		po.	li.	
189	0,109375	0	7	10	6′	1	3	9′	236	0,136574	0	9	10	0′	1	7	8′
190	0,109954	0	7	11	0	1	3	10	237	0,137153	0	9	10	6	1	7	9
191	0,110532	0	7	11	6	1	3	11	238	0,137731	0	9	11	0	1	7	10
192	0,111111	0	8	0	0	1	4	0	239	0,138310	0	9	11	6	1	7	11
193	0,111690	0	8	0	6	1	4	1	240	0,138889	0	10	0	0	1	8	0
194	0,112269	0	8	1	0	1	4	2	241	0,139468	0	10	0	6	1	8	1
195	0,112847	0	8	1	6	1	4	3	242	0,140046	0	10	1	0	1	8	2
196	0,113426	0	8	2	0	1	4	4	243	0,140625	0	10	1	6	1	8	3
197	0,114005	0	8	2	6	1	4	5	244	0,141204	0	10	2	0	1	8	4
198	0,114583	0	8	3	0	1	4	6	245	0,141782	0	10	2	6	1	8	5
199	0,115162	0	8	3	6	1	4	7	246	0,142361	0	10	3	0	1	8	6
200	0,115741	0	8	4	0	1	4	8	247	0,142940	0	10	3	6	1	8	7
201	0,116319	0	8	4	6	1	4	9	248	0,143519	0	10	4	0	1	8	8
202	0,116898	0	8	5	0	1	4	10	249	0,144097	0	10	4	6	1	8	9
203	0,117477	0	8	5	6	1	4	11	250	0,144676	0	10	5	0	1	8	10
204	0,118056	0	8	6	0	1	5	0	251	0,145255	0	10	5	6	1	8	11
205	0,118634	0	8	6	6	1	5	1	252	0,145833	0	10	6	0	1	9	0
206	0,119213	0	8	7	0	1	5	2	253	0,146412	0	10	6	6	1	9	1
207	0,119792	0	8	7	6	1	5	3	254	0,146991	0	10	7	0	1	9	2
208	0,120370	0	8	8	0	1	5	4	255	0,147569	0	10	7	6	1	9	3
209	0,120949	0	8	8	6	1	5	5	256	0,148148	0	10	8	0	1	9	4
210	0,121528	0	8	9	0	1	5	6	257	0,148727	0	10	8	6	1	9	5
211	0,122106	0	8	9	6	1	5	7	258	0,149306	0	10	9	0	1	9	6
212	0,122685	0	8	10	0	1	5	8	259	0,149884	0	10	9	6	1	9	7
213	0,123264	0	8	10	6	1	5	9	260	0,150463	0	10	10	0	1	9	8
214	0,123843	0	8	11	0	1	5	10	261	0,151042	0	10	10	6	1	9	9
215	0,124421	0	8	11	6	1	5	11	262	0,151620	0	10	11	0	1	9	10
216	0,125000	0	9	0	0	1	6	0	263	0,152199	0	10	11	6	1	9	11
217	0,125579	0	9	0	6	1	6	1	264	0,152778	0	11	0	0	1	10	0
218	0,126157	0	9	1	0	1	6	2	265	0,153356	0	11	0	6	1	10	1
219	0,126736	0	9	1	6	1	6	3	266	0,153935	0	11	1	0	1	10	2
220	0,127315	0	9	2	0	1	6	4	267	0,154514	0	11	1	6	1	10	3
221	0,127894	0	9	2	6	1	6	5	268	0,155093	0	11	2	0	1	10	4
222	0,128472	0	9	3	0	1	6	6	269	0,155671	0	11	2	6	1	10	5
223	0,129051	0	9	3	6	1	6	7	270	0,156250	0	11	3	0	1	10	6
224	0,129630	0	9	4	0	1	6	8	271	0,156829	0	11	3	6	1	10	7
225	0,130208	0	9	4	6	1	6	9	272	0,157407	0	11	4	0	1	10	8
226	0,130787	0	9	5	0	1	6	10	273	0,157986	0	11	4	6	1	10	9
227	0,131366	0	9	5	6	1	6	11	274	0,158565	0	11	5	0	1	10	10
228	0,131944	0	9	6	0	1	7	0	275	0,159144	0	11	5	6	1	10	11
229	0,132523	0	9	6	6	1	7	1	276	0,159722	0	11	6	0	1	11	0
230	0,133102	0	9	7	0	1	7	2	277	0,160201	0	11	6	6	1	11	1
231	0,133681	0	9	7	6	1	7	3	278	0,160880	0	11	7	0	1	11	2
232	0,134259	0	9	8	0	1	7	4	279	0,161438	0	11	7	6	1	11	3
233	0,134838	0	9	8	6	1	7	5	280	0,162037	0	11	8	0	1	11	4
234	0,135417	0	9	9	0	1	7	6	281	0,162616	0	11	8	6	1	11	5
235	0,135995	0	9	9	6	1	7	7	282	0,163194	0	11	9	0	1	11	6

Digitized by Google

TABLE pour réduire en fractions décimales les fractions ordinaires de la toise, du pied, etc.

Pouces cubes contenus dans une fraction décimale de pied cube.	Nombres décimaux.	Valeur des nombres décimaux, l'unité étant							Pouces cubes contenus dans une fraction décimale de pied cube.	Nombres décimaux.	Valeur des nombres décimaux, l'unité étant						
		Toise.				Pied.					Toise.				Pied.		
		pi.	po.	li.		po.	li.				pi.	po.	li.		po.	li.	
283	0,163773	0	11	9	6′	1	11	7′	330	0,190972	1	1	9	0′	2	3	6′
284	0,164352	0	11	10	0	1	11	8	331	0,191551	1	1	9	6	2	3	7
285	0,164931	0	11	10	6	1	11	9	332	0,192130	1	1	10	0	2	3	8
286	0,165509	0	11	11	0	1	11	10	333	0,192708	1	1	10	6	2	3	9
287	0,166088	0	11	11	6	1	11	11	334	0,193287	1	1	11	0	2	3	10
288	0,166667	1	0	0	0	2	0	0	335	0,193866	1	1	11	6	2	3	11
289	0,167245	1	0	0	6	2	0	1	336	0,194444	1	2	0	0	2	4	0
290	0,167824	1	0	1	0	2	0	2	337	0,195023	1	2	0	6	2	4	1
291	0,168403	1	0	1	6	2	0	3	338	0,195602	1	2	1	0	2	4	2
292	0,168981	1	0	2	0	2	0	4	339	0,196181	1	2	1	6	2	4	3
293	0,169560	1	0	2	6	2	0	5	340	0,196759	1	2	2	0	2	4	4
294	0,170139	1	0	3	0	2	0	6	341	0,197338	1	2	2	6	2	4	5
295	0,170718	1	0	3	6	2	0	7	342	0,197917	1	2	3	0	2	4	6
296	0,171296	1	0	4	0	2	0	8	343	0,198495	1	2	3	6	2	4	7
297	0,171875	1	0	4	6	2	0	9	344	0,199074	1	2	4	0	2	4	8
298	0,172454	1	0	5	0	2	0	10	345	0,199653	1	2	4	6	2	4	9
299	0,173032	1	0	5	6	2	0	11	346	0,200231	1	2	5	0	2	4	10
300	0,173611	1	0	6	0	2	1	0	347	0,200810	1	2	5	6	2	4	11
301	0,174190	1	0	6	6	2	1	1	348	0,201389	1	2	6	0	2	5	0
302	0,174769	1	0	7	0	2	1	2	349	0,201968	1	2	6	6	2	5	1
303	0,175347	1	0	7	6	2	1	3	350	0,202546	1	2	7	0	2	5	2
304	0,175926	1	0	8	0	2	1	4	351	0,203125	1	2	7	6	2	5	3
305	0,176505	1	0	8	6	2	1	5	352	0,203704	1	2	8	0	2	5	4
306	0,177083	1	0	9	0	2	1	6	353	0,204282	1	2	8	6	2	5	5
307	0,177662	1	0	9	6	2	1	7	354	0,204861	1	2	9	0	2	5	6
308	0,178241	1	0	10	0	2	1	8	355	0,205440	1	2	9	6	2	5	7
309	0,178819	1	0	10	6	2	1	9	356	0,206019	1	2	10	0	2	5	8
310	0,179398	1	0	11	0	2	1	10	357	0,206597	1	2	10	6	2	5	9
311	0,179977	1	0	11	6	2	1	11	358	0,207176	1	2	11	0	2	5	10
312	0,180556	1	1	0	0	2	2	0	359	0,207755	1	2	11	6	2	5	11
313	0,181134	1	1	0	6	2	2	1	360	0,208333	1	3	0	0	2	6	0
314	0,181713	1	1	1	0	2	2	2	361	0,208912	1	3	0	6	2	6	1
315	0,182292	1	1	1	6	2	2	3	362	0,209491	1	3	1	0	2	6	2
316	0,182870	1	1	2	0	2	2	4	363	0,210069	1	3	1	6	2	6	3
317	0,183449	1	1	2	6	2	2	5	364	0,210648	1	3	2	0	2	6	4
318	0,184028	1	1	3	0	2	2	6	365	0,211227	1	3	2	6	2	6	5
319	0,184606	1	1	3	6	2	2	7	366	0,211806	1	3	3	0	2	6	6
320	0,185185	1	1	4	0	2	2	8	367	0,212384	1	3	3	6	2	6	7
321	0,185764	1	1	4	6	2	2	9	368	0,212963	1	3	4	0	2	6	8
322	0,186343	1	1	5	0	2	2	10	369	0,213542	1	3	4	6	2	6	9
323	0,186921	1	1	5	6	2	2	11	370	0,214120	1	3	5	0	2	6	10
324	0,187500	1	1	6	0	2	3	0	371	0,214699	1	3	5	6	2	6	11
325	0,188079	1	1	6	6	2	3	1	372	0,215278	1	3	6	0	2	7	0
326	0,188657	1	1	7	0	2	3	2	373	0,215856	1	3	6	6	2	7	1
327	0,189236	1	1	7	6	2	3	3	374	0,216435	1	3	7	0	2	7	2
328	0,189815	1	1	8	0	2	3	4	375	0,217014	1	3	7	6	2	7	3
329	0,190394	1	1	8	6	2	3	5	376	0,217593	1	3	8	0	2	7	4

TABLE pour réduire en fractions décimales les fractions ordinaires de la toise, du pied, etc.

Pouces cubes contenus dans une fraction décimale de pied cube.	Nombres décimaux.	Valeur des nombres décimaux, l'unité étant							Pouces cubes contenus dans une fraction décimale de pied cube.	Nombres décimaux.	Valeur des nombres décimaux, l'unité étant						
		Toise.				Pied.					Toise.				Pied.		
		pi.	po.	li.		po.	li.				pi.	po.	li.		po.	li.	
377	0,218171	1	3	8	6′	2	7	5′	424	0,245370	1	5	8	0′	2	11	4′
378	0,218750	1	3	9	0	2	7	6	425	0,245949	1	5	8	6	2	11	5
379	0,219329	1	3	9	6	2	7	7	426	0,246528	1	5	9	0	2	11	6
380	0,219907	1	3	10	0	2	7	8	427	0,247106	1	5	9	6	2	11	7
381	0,220486	1	3	10	6	2	7	9	428	0,247685	1	5	10	0	2	11	8
382	0,221065	1	3	11	0	2	7	10	429	0,248264	1	5	10	6	2	11	9
383	0,221644	1	3	11	6	2	7	11	430	0,248843	1	5	11	0	2	11	10
384	0,222222	1	4	0	0	2	8	0	431	0,249421	1	5	11	6	2	11	11
385	0,222801	1	4	0	6	2	8	1	432	0,250000	1	6	0	0	3	0	0
386	0,223380	1	4	1	0	2	8	2	433	0,250579	1	6	0	6	3	0	1
387	0,223958	1	4	1	6	2	8	3	434	0,251157	1	6	1	0	3	0	2
388	0,224537	1	4	2	0	2	8	4	435	0,251736	1	6	1	6	3	0	3
389	0,225116	1	4	2	6	2	8	5	436	0,252315	1	6	2	0	3	0	4
390	0,225694	1	4	3	0	2	8	6	437	0,252894	1	6	2	6	3	0	5
391	0,226273	1	4	3	6	2	8	7	438	0,253472	1	6	3	0	3	0	6
392	0,226852	1	4	4	0	2	8	8	439	0,254051	1	6	3	6	3	0	7
393	0,227431	1	4	4	6	2	8	9	440	0,254630	1	6	4	0	3	0	8
394	0,228009	1	4	5	0	2	8	10	441	0,255208	1	6	4	6	3	0	9
395	0,228588	1	4	5	6	2	8	11	442	0,255787	1	6	5	0	3	0	10
396	0,229167	1	4	6	0	2	9	0	443	0,256366	1	6	5	6	3	0	11
397	0,229745	1	4	6	6	2	9	1	444	0,256944	1	6	6	0	3	1	0
398	0,230324	1	4	7	0	2	9	2	445	0,257523	1	6	6	6	3	1	1
399	0,230903	1	4	7	6	2	9	3	446	0,258102	1	6	7	0	3	1	2
400	0,231481	1	4	8	0	2	9	4	447	0,258681	1	6	7	6	3	1	3
401	0,232060	1	4	8	6	2	9	5	448	0,259259	1	6	8	0	3	1	4
402	0,232639	1	4	9	0	2	9	6	449	0,259838	1	6	8	6	3	1	5
403	0,233218	1	4	9	6	2	9	7	450	0,260417	1	6	9	0	3	1	6
404	0,233796	1	4	10	0	2	9	8	451	0,260995	1	6	9	6	3	1	7
405	0,234375	1	4	10	6	2	9	9	452	0,261574	1	6	10	0	3	1	8
406	0,234954	1	4	11	0	2	9	10	453	0,262153	1	6	10	6	3	1	9
407	0,235532	1	4	11	6	2	9	11	454	0,262731	1	6	11	0	3	1	10
408	0,236111	1	5	0	0	2	10	0	455	0,263310	1	6	11	6	3	1	11
409	0,236681	1	5	0	6	2	10	1	456	0,263889	1	7	0	0	3	2	0
410	0,237269	1	5	1	0	2	10	2	457	0,264468	1	7	0	6	3	2	1
411	0,237847	1	5	1	6	2	10	3	458	0,265046	1	7	1	0	3	2	2
412	0,238426	1	5	2	0	2	10	4	459	0,265625	1	7	1	6	3	2	3
413	0,239005	1	5	2	6	2	10	5	460	0,266204	1	7	2	0	3	2	4
414	0,239583	1	5	3	0	2	10	6	461	0,266782	1	7	2	6	3	2	5
415	0,240162	1	5	3	6	2	10	7	462	0,267361	1	7	3	0	3	2	6
416	0,240741	1	5	4	0	2	10	8	463	0,267940	1	7	3	6	3	2	7
417	0,241319	1	5	4	6	2	10	9	464	0,268519	1	7	4	0	3	2	8
418	0,241898	1	5	5	0	2	10	10	465	0,269097	1	7	4	6	3	2	9
419	0,242477	1	5	5	6	2	10	11	466	0,269676	1	7	5	0	3	2	10
420	0,243056	1	5	6	0	2	11	0	467	0,270255	1	7	5	6	3	2	11
421	0,243634	1	5	6	6	2	11	1	468	0,270833	1	7	6	0	3	3	0
422	0,244213	1	5	7	0	2	11	2	469	0,271412	1	7	6	6	3	3	1
423	0,244792	1	5	7	6	2	11	3	470	0,271991	1	7	7	0	3	3	2

Digitized by Google

TABLE pour réduire en fractions décimales les fractions ordinaires de la toise, du pied, etc.

Pouces cubes contenus dans une fraction décimale de pied cube.	Nombres décimaux.	Valeur des nombres décimaux, l'unité étant							Pouces cubes contenus dans une fraction décimale de pied cube.	Nombres décimaux.	Valeur des nombres décimaux, l'unité étant						
		Toise.				Pied.					Toise.				Pied.		
		pi.	po.	li.		po.	li.				pi.	po.	li.		po.	li.	
471	0,272569	1	7	7	6′	3	3	3′	518	0,299769	1	9	7	0′	3	7	2′
472	0,273148	1	7	8	0	3	3	4	519	0,300347	1	9	7	6	3	7	3
473	0,273727	1	7	8	6	3	3	5	520	0,300926	1	9	8	0	3	7	4
474	0,274306	1	7	9	0	3	3	6	521	0,301505	1	9	8	6	3	7	5
475	0,274884	1	7	9	6	3	3	7	522	0,302083	1	9	9	0	3	7	6
476	0,275463	1	7	10	0	3	3	8	523	0,302662	1	9	9	6	3	7	7
477	0,276042	1	7	10	6	3	3	9	524	0,303241	1	9	10	0	3	7	8
478	0,276620	1	7	11	0	3	3	10	525	0,303819	1	9	10	6	3	7	9
479	0,277199	1	7	11	6	3	3	11	526	0,304398	1	9	11	0	3	7	10
480	0,277778	1	8	0	0	3	4	0	527	0,304977	1	9	11	6	3	7	11
481	0,278356	1	8	0	6	3	4	1	528	0,305556	1	10	0	0	3	8	0
482	0,278935	1	8	1	0	3	4	2	529	0,306134	1	10	0	6	3	8	1
483	0,279514	1	8	1	6	3	4	3	530	0,306713	1	10	1	0	3	8	2
484	0,280093	1	8	2	0	3	4	4	531	0,307292	1	10	1	6	3	8	3
485	0,280671	1	8	2	6	3	4	5	532	0,307870	1	10	2	0	3	8	4
486	0,281250	1	8	3	0	3	4	6	533	0,308449	1	10	2	6	3	8	5
487	0,281829	1	8	3	6	3	4	7	534	0,309028	1	10	3	0	3	8	6
488	0,282407	1	8	4	0	3	4	8	535	0,309606	1	10	3	6	3	8	7
489	0,282986	1	8	4	6	3	4	9	536	0,310185	1	10	4	0	3	8	8
490	0,283565	1	8	5	0	3	4	10	537	0,310764	1	10	4	6	3	8	9
491	0,284144	1	8	5	6	3	4	11	538	0,311343	1	10	5	0	3	8	10
492	0,284722	1	8	6	0	3	5	0	539	0,311921	1	10	5	6	3	8	11
493	0,285301	1	8	6	6	3	5	1	540	0,312500	1	10	6	0	3	9	0
494	0,285880	1	8	7	0	3	5	2	541	0,313079	1	10	6	6	3	9	1
495	0,286458	1	8	7	6	3	5	3	542	0,313657	1	10	7	0	3	9	2
496	0,287037	1	8	8	0	3	5	4	543	0,314236	1	10	7	6	3	9	3
497	0,287616	1	8	8	6	3	5	5	544	0,314815	1	10	8	0	3	9	4
498	0,288194	1	8	9	0	3	5	6	545	0,315394	1	10	8	6	3	9	5
499	0,288773	1	8	9	6	3	5	7	546	0,315972	1	10	9	0	3	9	6
500	0,289352	1	8	10	0	3	5	8	547	0,316551	1	10	9	6	3	9	7
501	0,289931	1	8	10	6	3	5	9	548	0,317130	1	10	10	0	3	9	8
502	0,290509	1	8	11	0	3	5	10	549	0,317708	1	10	10	6	3	9	9
503	0,291088	1	8	11	6	3	5	11	550	0,318287	1	10	11	0	3	9	10
504	0,291667	1	9	0	0	3	6	0	551	0,318866	1	10	11	6	3	9	11
505	0,292245	1	9	0	6	3	6	1	552	0,319444	1	11	0	0	3	10	0
506	0,292824	1	9	1	0	3	6	2	553	0,320023	1	11	0	6	3	10	1
507	0,293403	1	9	1	6	3	6	3	554	0,320602	1	11	1	0	3	10	2
508	0,293981	1	9	2	0	3	6	4	555	0,321181	1	11	1	6	3	10	3
509	0,294560	1	9	2	6	3	6	5	556	0,321759	1	11	2	0	3	10	4
510	0,295139	1	9	3	0	3	6	6	557	0,322338	1	11	2	6	3	10	5
511	0,295718	1	9	3	6	3	6	7	558	0,322917	1	11	3	0	3	10	6
512	0,296296	1	9	4	0	3	6	8	559	0,323495	1	11	3	6	3	10	7
513	0,296875	1	9	4	6	3	6	9	560	0,324074	1	11	4	0	3	10	8
514	0,297454	1	9	5	0	3	6	10	561	0,324653	1	11	4	6	3	10	9
515	0,298032	1	9	5	6	3	6	11	562	0,325231	1	11	5	0	3	10	10
516	0,298611	1	9	6	0	3	7	0	563	0,325810	1	11	5	6	3	10	11
517	0,299190	1	9	6	6	3	7	1	564	0,326389	1	11	6	0	3	11	0

Digitized by Google

TABLE pour réduire en fractions décimales les fractions ordinaires de la toise, du pied, etc.

Pouces cubes contenus dans une fraction décimale de pied cube.	Nombres décimaux.	Valeur des nombres décimaux, l'unité étant la Toise. pi.	po.	li.		la Pied. po.	li.	
565	0,326968	1	11	6	6′	3	11	1′
566	0,327546	1	11	7	0	3	11	2
567	0,328125	1	11	7	6	3	11	3
568	0,328704	1	11	8	0	3	11	4
569	0,329282	1	11	8	6	3	11	5
570	0,329861	1	11	9	0	3	11	6
571	0,330440	1	11	9	6	3	11	7
572	0,331019	1	11	10	0	3	11	8
573	0,331597	1	11	10	6	3	11	9
574	0,332176	1	11	11	0	3	11	10
575	0,332755	1	11	11	6	3	11	11
576	0,333333	2	0	0	0	4	0	0
577	0,333912	2	0	0	6	4	0	1
578	0,334491	2	0	1	0	4	0	2
579	0,335069	2	0	1	6	4	0	3
580	0,335648	2	0	2	0	4	0	4
581	0,336227	2	0	2	6	4	0	5
582	0,336806	2	0	3	0	4	0	6
583	0,337384	2	0	3	6	4	0	7
584	0,337963	2	0	4	0	4	0	8
585	0,338542	2	0	4	6	4	0	9
586	0,339120	2	0	5	0	4	0	10
587	0,339699	2	0	5	6	4	0	11
588	0,340278	2	0	6	0	4	1	0
589	0,340856	2	0	6	6	4	1	1
590	0,341435	2	0	7	0	4	1	2
591	0,342014	2	0	7	6	4	1	3
592	0,342593	2	0	8	0	4	1	4
593	0,343171	2	0	8	6	4	1	5
594	0,343750	2	0	9	0	4	1	6
595	0,344329	2	0	9	6	4	1	7
596	0,344907	2	0	10	0	4	1	8
597	0,345486	2	0	10	6	4	1	9
598	0,346065	2	0	11	0	4	1	10
599	0,346644	2	0	11	6	4	1	11
600	0,347222	2	1	0	0	4	2	0
601	0,347801	2	1	0	6	4	2	1
602	0,348380	2	1	1	0	4	2	2
603	0,348958	2	1	1	6	4	2	3
604	0,349537	2	1	2	0	4	2	4
605	0,350116	2	1	2	6	4	2	5
606	0,350694	2	1	3	0	4	2	6
607	0,351273	2	1	3	6	4	2	7
608	0,351852	2	1	4	0	4	2	8
609	0,352431	2	1	4	6	4	2	9
610	0,353009	2	1	5	0	4	2	10
611	0,353588	2	1	5	6	4	2	11

Pouces cubes contenus dans une fraction décimale de pied cube.	Nombres décimaux.	Valeur des nombres décimaux, l'unité étant la Toise. pi.	po.	li.		le Pied. po.	li.	
612	0,354167	2	1	6	0′	4	3	0′
613	0,354745	2	1	6	6	4	3	1
614	0,355324	2	1	7	0	4	3	2
615	0,355903	2	1	7	6	4	3	3
616	0,356481	2	1	8	0	4	3	4
617	0,357060	2	1	8	6	4	3	5
618	0,357639	2	1	9	0	4	3	6
619	0,358218	2	1	9	6	4	3	7
620	0,358796	2	1	10	0	4	3	8
621	0,359375	2	1	10	6	4	3	9
622	0,359954	2	1	11	0	4	3	10
623	0,360532	2	1	11	6	4	3	11
624	0,361111	2	2	0	0	4	4	0
625	0,361690	2	2	0	6	4	4	1
626	0,362269	2	2	1	0	4	4	2
627	0,362847	2	2	1	6	4	4	3
628	0,363426	2	2	2	0	4	4	4
629	0,364005	2	2	2	6	4	4	5
630	0,364583	2	2	3	0	4	4	6
631	0,365162	2	2	3	6	4	4	7
632	0,365741	2	2	4	0	4	4	8
633	0,366319	2	2	4	6	4	4	9
634	0,366898	2	2	5	0	4	4	10
635	0,367477	2	2	5	6	4	4	11
636	0,368056	2	2	6	0	4	5	0
637	0,368634	2	2	6	6	4	5	1
638	0,369213	2	2	7	0	4	5	2
639	0,369791	2	2	7	6	4	5	3
640	0,370370	2	2	8	0	4	5	4
641	0,370949	2	2	8	6	4	5	5
642	0,371528	2	2	9	0	4	5	6
643	0,372106	2	2	9	6	4	5	7
644	0,372685	2	2	10	0	4	5	8
645	0,373264	2	2	10	6	4	5	9
646	0,373843	2	2	11	0	4	5	10
647	0,374421	2	2	11	6	4	5	11
648	0,375000	2	3	0	0	4	6	0
649	0,375579	2	3	0	6	4	6	1
650	0,376157	2	3	1	0	4	6	2
651	0,376736	2	3	1	6	4	6	3
652	0,377315	2	3	2	0	4	6	4
653	0,377894	2	3	2	6	4	6	5
654	0,378472	2	3	3	0	4	6	6
655	0,379051	2	3	3	6	4	6	7
656	0,379630	2	3	4	0	4	6	8
657	0,380208	2	3	4	6	4	6	9
658	0,380787	2	3	5	0	4	6	10

Digitized by Google

TABLE pour réduire en fractions décimales les fractions ordinaires de la toise, du pied, etc.

Pouces cubes contenus dans une fraction décimale de pied cube.	Nombres décimaux.	Valeur des nombres décimaux, l'unité étant la Toise. pi.	po.	li.		la Pied. po.	li.		Pouces cubes contenus dans une fraction décimale de pied cube.	Nombres décimaux.	Valeur des nombres décimaux, l'unité étant la Toise. pi.	po.	li.		le Pied. po.	li.	
659	0,381366	2	3	5	6′	4	6	11′	706	0,408565	2	5	5	0′	4	10	10′
660	0,381944	2	3	6	0	4	7	0	707	0,409144	2	5	5	6	4	10	11
661	0,382523	2	3	6	6	4	7	1	708	0,409722	2	5	6	0	4	11	0
662	0,383102	2	3	7	0	4	7	2	709	0,410301	2	5	6	6	4	11	1
663	0,383681	2	3	7	6	4	7	3	710	0,410880	2	5	7	0	4	11	2
664	0,384259	2	3	8	0	4	7	4	711	0,411458	2	5	7	6	4	11	3
665	0,384838	2	3	8	6	4	7	5	712	0,412037	2	5	8	0	4	11	4
666	0,385417	2	3	9	0	4	7	6	713	0,412616	2	5	8	6	4	11	5
667	0,385995	2	3	9	6	4	7	7	714	0,413194	2	5	9	0	4	11	6
668	0,386574	2	3	10	0	4	7	8	715	0,413773	2	5	9	6	4	11	7
669	0,387153	2	3	10	6	4	7	9	716	0,414352	2	5	10	0	4	11	8
670	0,387731	2	3	11	0	4	7	10	717	0,414931	2	5	10	6	4	11	9
671	0,388310	2	3	11	6	4	7	11	718	0,415509	2	5	11	0	4	11	10
672	0,388889	2	4	0	0	4	8	0	719	0,416088	2	5	11	6	4	11	11
673	0,389467	2	4	0	6	4	8	1	720	0,416667	2	6	0	0	5	0	0
674	0,390046	2	4	1	0	4	8	2	721	0,417245	2	6	0	6	5	0	1
675	0,390625	2	4	1	6	4	8	3	722	0,417824	2	6	1	0	5	0	2
676	0,391204	2	4	2	0	4	8	4	723	0,418403	2	6	1	6	5	0	3
677	0,391782	2	4	2	6	4	8	5	724	0,418981	2	6	2	0	5	0	4
678	0,392361	2	4	3	0	4	8	6	725	0,419560	2	6	2	6	5	0	5
679	0,392940	2	4	3	6	4	8	7	726	0,420139	2	6	3	0	5	0	6
680	0,393519	2	4	4	0	4	8	8	727	0,420718	2	6	3	6	5	0	7
681	0,394097	2	4	4	6	4	8	9	728	0,421296	2	6	4	0	5	0	8
682	0,394676	2	4	5	0	4	8	10	729	0,421875	2	6	4	6	5	0	9
683	0,395255	2	4	5	6	4	8	11	730	0,422454	2	6	5	0	5	0	10
684	0,395833	2	4	6	0	4	9	0	731	0,423032	2	6	5	6	5	0	11
685	0,396412	2	4	6	6	4	9	1	732	0,423611	2	6	6	0	5	1	0
686	0,396991	2	4	7	0	4	9	2	733	0,424190	2	6	6	6	5	1	1
687	0,397569	2	4	7	6	4	9	3	734	0,424769	2	6	7	0	5	1	2
688	0,398148	2	4	8	0	4	9	4	735	0,425347	2	6	7	6	5	1	3
689	0,398727	2	4	8	6	4	9	5	736	0,425926	2	6	8	0	5	1	4
690	0,399306	2	4	9	0	4	9	6	737	0,426505	2	6	8	6	5	1	5
691	0,399884	2	4	9	6	4	9	7	738	0,427083	2	6	9	0	5	1	6
692	0,400463	2	4	10	0	4	9	8	739	0,427662	2	6	9	6	5	1	7
693	0,401042	2	4	10	6	4	9	9	740	0,428241	2	6	10	0	5	1	8
694	0,401620	2	4	11	0	4	9	10	741	0,428819	2	6	10	6	5	1	9
695	0,402199	2	4	11	6	4	9	11	742	0,429398	2	6	11	0	5	1	10
696	0,402778	2	5	0	0	4	10	0	743	0,429977	2	6	11	6	5	1	11
697	0,403356	2	5	0	6	4	10	1	744	0,430556	2	7	0	0	5	2	0
698	0,403935	2	5	1	0	4	10	2	745	0,431134	2	7	0	6	5	2	1
699	0,404514	2	5	1	6	4	10	3	746	0,431713	2	7	1	0	5	2	2
700	0,405093	2	5	2	0	4	10	4	747	0,432292	2	7	1	6	5	2	3
701	0,405671	2	5	2	6	4	10	5	748	0,432870	2	7	2	0	5	2	4
702	0,406250	2	5	3	0	4	10	6	749	0,433449	2	7	2	6	5	2	5
703	0,406829	2	5	3	6	4	10	7	750	0,434028	2	7	3	0	5	2	6
704	0,407407	2	5	4	0	4	10	8	751	0,434607	2	7	3	6	5	2	7
705	0,407986	2	5	4	6	4	10	9	752	0,435185	2	7	4	0	5	2	8

Digitized by Google

TABLE pour réduire en fractions décimales les fractions ordinaires de la toise, du pied, etc.

Pouces cubes contenus dans une fraction décimale de pied cube.	Nombres décimaux.	Valeur des nombres décimaux, l'unité étant la Toise. pl.	po.	li.		la Pied. po.	li.		Pouces cubes contenus dans une fraction décimale de pied cube.	Nombres décimaux.	Valeur des nombres décimaux, l'unité étant la Toise. po.	po.	li.		le Pied. po.	li.	
753	0,435764	2	7	4	6′	5	2	9′	800	0,462963	2	9	4	0′	5	6	8′
754	0,436343	2	7	5	0	5	2	10	801	0,463542	2	9	4	6	5	6	9
755	0,436921	2	7	5	6	5	2	11	802	0,464120	2	9	5	0	5	6	10
756	0,437500	2	7	6	0	5	3	0	803	0,464699	2	9	5	6	5	6	11
757	0,438079	2	7	6	6	5	3	1	804	0,465278	2	9	6	0	5	7	0
758	0,438657	2	7	7	0	5	3	2	805	0,465856	2	9	6	6	5	7	1
759	0,439236	2	7	7	6	5	3	3	806	0,466435	2	9	7	0	5	7	2
760	0,439815	2	7	8	0	5	3	4	807	0,467014	2	9	7	6	5	7	3
761	0,440394	2	7	8	6	5	3	5	808	0,467593	2	9	8	0	5	7	4
762	0,440972	2	7	9	0	5	3	6	809	0,468171	2	9	8	6	5	7	5
763	0,441551	2	7	9	6	5	3	7	810	0,468750	2	9	9	0	5	7	6
764	0,442130	2	7	10	0	5	3	8	811	0,469329	2	9	9	6	5	7	7
765	0,442708	2	7	10	6	5	3	9	812	0,469907	2	9	10	0	5	7	8
766	0,443287	2	7	11	0	5	3	10	813	0,470486	2	9	10	6	5	7	9
767	0,443866	2	7	11	6	5	3	11	814	0,471065	2	9	11	0	5	7	10
768	0,444444	2	8	0	0	5	4	0	815	0,471644	2	9	11	6	5	7	11
769	0,445023	2	8	0	6	5	4	1	816	0,472222	2	10	0	0	5	8	0
770	0,445602	2	8	1	0	5	4	2	817	0,472801	2	10	0	6	5	8	1
771	0,446181	2	8	1	6	5	4	3	818	0,473380	2	10	1	0	5	8	2
772	0,446759	2	8	2	0	5	4	4	819	0,473958	2	10	1	6	5	8	3
773	0,447338	2	8	2	6	5	4	5	820	0,474537	2	10	2	0	5	8	4
774	0,447917	2	8	3	0	5	4	6	821	0,475116	2	10	2	6	5	8	5
775	0,448495	2	8	3	6	5	4	7	822	0,475694	2	10	3	0	5	8	6
776	0,449074	2	8	4	0	5	4	8	823	0,476273	2	10	3	6	5	8	7
777	0,449653	2	8	4	6	5	4	9	824	0,476852	2	10	4	0	5	8	8
778	0,450231	2	8	5	0	5	4	10	825	0,477431	2	10	4	6	5	8	9
779	0,450810	2	8	5	6	5	4	11	826	0,478009	2	10	5	0	5	8	10
780	0,451389	2	8	6	0	5	5	0	827	0,478588	2	10	5	6	5	8	11
781	0,451968	2	8	6	6	5	5	1	828	0,479167	2	10	6	0	5	9	0
782	0,452546	2	8	7	0	5	5	2	829	0,479745	2	10	6	6	5	9	1
783	0,453125	2	8	7	6	5	5	3	830	0,480324	2	10	7	0	5	9	2
784	0,453704	2	8	8	0	5	5	4	831	0,480903	2	10	7	6	5	9	3
785	0,454282	2	8	8	6	5	5	5	832	0,481481	2	10	8	0	5	9	4
786	0,454861	2	8	9	0	5	5	6	833	0,482060	2	10	8	6	5	9	5
787	0,455440	2	8	9	6	5	5	7	834	0,482639	2	10	9	0	5	9	6
788	0,456019	2	8	10	0	5	5	8	835	0,483218	2	10	9	6	5	9	7
789	0,456597	2	8	10	6	5	5	9	836	0,483796	2	10	10	0	5	9	8
790	0,457176	2	8	11	0	5	5	10	837	0,484375	2	10	10	6	5	9	9
791	0,457755	2	8	11	6	5	5	11	838	0,484954	2	10	11	0	5	9	10
792	0,458333	2	9	0	0	5	6	0	839	0,485532	2	10	11	6	5	9	11
793	0,458912	2	9	0	6	5	6	1	840	0,486111	2	11	0	0	5	10	0
794	0,459491	2	9	1	0	5	6	2	841	0,486690	2	11	0	6	5	10	1
795	0,460069	2	9	1	6	5	6	3	842	0,487269	2	11	1	0	5	10	2
796	0,460648	2	9	2	0	5	6	4	843	0,487847	2	11	1	6	5	10	3
797	0,461227	2	9	2	6	5	6	5	844	0,488426	2	11	2	0	5	10	4
798	0,461806	2	9	3	0	5	6	6	845	0,489005	2	11	2	6	5	10	5
799	0,462384	2	9	3	6	5	6	7	846	0,489583	2	11	3	0	5	10	6

Digitized by Google

TABLE pour réduire en fractions décimales les fractions ordinaires de la toise, du pied, etc.

Pouces cubes contenus dans une fraction décimale de pied cube.	Nombres décimaux.	Valeur des nombres décimaux, l'unité étant la Toise. pi.	po.	li.		la Pied. po.	li.		Pouces cubes contenus dans une fraction décimale de pied cube.	Nombres décimaux.	Valeur des nombres décimaux, l'unité étant la Toise. pi.	po.	li.		la Pied. po.	li.	
847	0,490162	2	11	3	6′	5	10	7′	894	0,517361	3	1	3	0′	6	2	6′
848	0,490741	2	11	4	0	5	10	8	895	0,517940	3	1	3	6	6	2	7
849	0,491319	2	11	4	6	5	10	9	896	0,518519	3	1	4	0	6	2	8
850	0,491898	2	11	5	0	5	10	10	897	0,519097	3	1	4	6	6	2	9
851	0,492477	2	11	5	6	5	10	11	898	0,519676	3	1	5	0	6	2	10
852	0,493056	2	11	6	0	5	11	0	899	0,520255	3	1	5	6	6	2	11
853	0,493639	2	11	6	6	5	11	1	900	0,520833	3	1	6	0	6	3	0
854	0,494213	2	11	7	0	5	11	2	901	0,521412	3	1	6	6	6	3	1
855	0,494792	2	11	7	6	5	11	3	902	0,521991	3	1	7	0	6	3	2
856	0,495370	2	11	8	0	5	11	4	903	0,522569	3	1	7	6	6	3	3
857	0,495949	2	11	8	6	5	11	5	904	0,523148	3	1	8	0	6	3	4
858	0,496528	2	11	9	0	5	11	6	905	0,523727	3	1	8	6	6	3	5
859	0,497106	2	11	9	6	5	11	7	906	0,524306	3	1	9	0	6	3	6
860	0,497685	2	11	10	0	5	11	8	907	0,524884	3	1	9	6	6	3	7
861	0,498264	2	11	10	6	5	11	9	908	0,525463	3	1	10	0	6	3	8
862	0,498843	2	11	11	0	5	11	10	909	0,526042	3	1	10	6	6	3	9
863	0,499421	2	11	11	6	5	11	11	910	0,526620	3	1	11	0	6	3	10
864	0,500000	3	0	0	0	6	0	0	911	0,527199	3	1	11	6	6	3	11
865	0,500579	3	0	0	6	6	0	1	912	0,527778	3	2	0	0	6	4	0
866	0,501157	3	0	1	0	6	0	2	913	0,528356	3	2	0	6	6	4	1
867	0,501736	3	0	1	6	6	0	3	914	0,528935	3	2	1	0	6	4	2
868	0,502315	3	0	2	0	6	0	4	915	0,529514	3	2	1	6	6	4	3
869	0,502894	3	0	2	6	6	0	5	916	0,530093	3	2	2	0	6	4	4
870	0,503472	3	0	3	0	6	0	6	917	0,530671	3	2	2	6	6	4	5
871	0,504051	3	0	3	6	6	0	7	918	0,531250	3	2	3	0	6	4	6
872	0,504630	3	0	4	0	6	0	8	919	0,531829	3	2	3	6	6	4	7
873	0,505208	3	0	4	6	6	0	9	920	0,532407	3	2	4	0	6	4	8
874	0,505787	3	0	5	0	6	0	10	921	0,532986	3	2	4	6	6	4	9
875	0,506366	3	0	5	6	6	0	11	922	0,533565	3	2	5	0	6	4	10
876	0,506944	3	0	6	0	6	1	0	923	0,534144	3	2	5	6	6	4	11
877	0,507523	3	0	6	6	6	1	1	924	0,534722	3	2	6	0	6	5	0
878	0,508102	3	0	7	0	6	1	2	925	0,535301	3	2	6	6	6	5	1
879	0,508681	3	0	7	6	6	1	3	926	0,535880	3	2	7	0	6	5	2
880	0,509259	3	0	8	0	6	1	4	927	0,536458	3	2	7	6	6	5	3
881	0,509838	3	0	8	6	6	1	5	928	0,537037	3	2	8	0	6	5	4
882	0,510417	3	0	9	0	6	1	6	929	0,537616	3	2	8	6	6	5	5
883	0,510995	3	0	9	6	6	1	7	930	0,538194	3	2	9	0	6	5	6
884	0,511574	3	0	10	0	6	1	8	931	0,538773	3	2	9	6	6	5	7
885	0,512153	3	0	10	6	6	1	9	932	0,539352	3	2	10	0	6	5	8
886	0,512731	3	0	11	0	6	1	10	933	0,539931	3	2	10	6	6	5	9
887	0,513310	3	0	11	6	6	1	11	934	0,540509	3	2	11	0	6	5	10
888	0,513889	3	1	0	0	6	2	0	935	0,541088	3	2	11	6	6	5	11
889	0,514468	3	1	0	6	6	2	1	936	0,541667	3	3	0	0	6	6	0
890	0,515046	3	1	1	0	6	2	2	937	0,542245	3	3	0	6	6	6	1
891	0,515625	3	1	1	6	6	2	3	938	0,542824	3	3	1	0	6	6	2
892	0,516204	3	1	2	0	6	2	4	939	0,543403	3	3	1	6	6	6	3
893	0,516782	3	1	2	6	6	2	5	940	0,543981	3	3	2	0	6	6	4

Digitized by Google

TABLE pour réduire en fractions décimales les fractions ordinaires de la toise, du pied, etc.

Pouces cubes contenus dans une fraction décimale de pied cube.	Nombres décimaux.	Valeur des nombres décimaux, l'unité étant la Toise. pi.	po.	li.		la Pied. po.	li.	
941	0,544560	3	3	2	6′	6	6	5′
942	0,545139	3	3	3	0	6	6	6
943	0,545718	3	3	3	6	6	6	7
944	0,546296	3	3	4	0	6	6	8
945	0,546875	3	3	4	6	6	6	9
946	0,547454	3	3	5	0	6	6	10
947	0,548032	3	3	5	6	6	6	11
948	0,548611	3	3	6	0	6	7	0
949	0,549190	3	3	6	6	6	7	1
950	0,549769	3	3	7	0	6	7	2
951	0,550347	3	3	7	6	6	7	3
952	0,550926	3	3	8	0	6	7	4
953	0,551505	3	3	8	6	6	7	5
954	0,552083	3	3	9	0	6	7	6
955	0,552662	3	3	9	6	6	7	7
956	0,553241	3	3	10	0	6	7	8
957	0,553819	3	3	10	6	6	7	9
958	0,554398	3	3	11	0	6	7	10
959	0,554977	3	3	11	6	6	7	11
960	0,555556	3	4	0	0	6	8	0
961	0,556134	3	4	0	6	6	8	1
962	0,556713	3	4	1	0	6	8	2
963	0,557292	3	4	1	6	6	8	3
964	0,557870	3	4	2	0	6	8	4
965	0,558449	3	4	2	6	6	8	5
966	0,559028	3	4	3	0	6	8	6
967	0,559606	3	4	3	6	6	8	7
968	0,560185	3	4	4	0	6	8	8
969	0,560764	3	4	4	6	6	8	9
970	0,561343	3	4	5	0	6	8	10
971	0,561921	3	4	5	6	6	8	11
972	0,562500	3	4	6	0	6	9	0
973	0,563079	3	4	6	6	6	9	1
974	0,563657	3	4	7	0	6	9	2
975	0,564236	3	4	7	6	6	9	3
976	0,564815	3	4	8	0	6	9	4
977	0,565394	3	4	8	6	6	9	5
978	0,565972	3	4	9	0	6	9	6
979	0,566551	3	4	9	6	6	9	7
980	0,567130	3	4	10	0	6	9	8
981	0,567708	3	4	10	6	6	9	9
982	0,568287	3	4	11	0	6	9	10
983	0,568866	3	4	11	6	6	9	11
984	0,569444	3	5	0	0	6	10	0
985	0,570023	3	5	0	6	6	10	1
986	0,570602	3	5	1	0	6	10	2
987	0,571181	3	5	1	6	6	10	3
988	0,571759	3	5	2	0′	6	10	4′
989	0,572338	3	5	2	6	6	10	5
990	0,572917	3	5	3	0	6	10	6
991	0,573495	3	5	3	6	6	10	7
992	0,574074	3	5	4	0	6	10	8
993	0,574653	3	5	4	6	6	10	9
994	0,575231	3	5	5	0	6	10	10
995	0,575810	3	5	5	6	6	10	11
996	0,576389	3	5	6	0	6	11	0
997	0,576968	3	5	6	6	6	11	1
998	0,577546	3	5	7	0	6	11	2
999	0,578125	3	5	7	6	6	11	3
1000	0,578704	3	5	8	0	6	11	4
1001	0,579282	3	5	8	6	6	11	5
1002	0,579861	3	5	9	0	6	11	6
1003	0,580440	3	5	9	6	6	11	7
1004	0,581019	3	5	10	0	6	11	8
1005	0,581597	3	5	10	6	6	11	9
1006	0,582176	3	5	11	0	6	11	10
1007	0,582755	3	5	11	6	6	11	11
1008	0,583333	3	6	0	0	7	0	0
1009	0,583912	3	6	0	6	7	0	1
1010	0,584491	3	6	1	0	7	0	2
1011	0,585069	3	6	1	6	7	0	3
1012	0,585648	3	6	2	0	7	0	4
1013	0,586227	3	6	2	6	7	0	5
1014	0,586806	3	6	3	0	7	0	6
1015	0,587384	3	6	3	6	7	0	7
1016	0,587963	3	6	4	0	7	0	8
1017	0,588542	3	6	4	6	7	0	9
1018	0,589120	3	6	5	0	7	0	10
1019	0,589699	3	6	5	6	7	0	11
1020	0,590278	3	6	6	0	7	1	0
1021	0,590856	3	6	6	6	7	1	1
1022	0,591435	3	6	7	0	7	1	2
1023	0,592014	3	6	7	6	7	1	3
1024	0,592593	3	6	8	0	7	1	4
1025	0,593171	3	6	8	6	7	1	5
1026	0,593750	3	6	9	0	7	1	6
1027	0,594329	3	6	9	6	7	1	7
1028	0,594907	3	6	10	0	7	1	8
1029	0,595486	3	6	10	6	7	1	9
1030	0,596065	3	6	11	0	7	1	10
1031	0,596644	3	6	11	6	7	1	11
1032	0,597222	3	7	0	0	7	2	0
1033	0,597801	3	7	0	6	7	2	1
1034	0,598380	3	7	1	0	7	2	2

Digitized by Google

TABLE pour réduire en fractions décimales les fractions ordinaires de la toise, du pied, etc.

Pouces cubes contenus dans une fraction décimale de pied cube.	Nombres décimaux.	Valeur des nombres décimaux, l'unité étant — Toise. pi.	po.	li.		Pied. po.	li.	
1035	0,598958	3	7	1	6′	7	2	3′
1036	0,599537	3	7	2	0	7	2	4
1037	0,600116	3	7	2	6	7	2	5
1038	0,600694	3	7	3	0	7	2	6
1039	0,601273	3	7	3	6	7	2	7
1040	0,601852	3	7	4	0	7	2	8
1041	0,602431	3	7	4	6	7	2	9
1042	0,603009	3	7	5	0	7	2	10
1043	0,603588	3	7	5	6	7	2	11
1044	0,604167	3	7	6	0	7	3	0
1045	0,604745	3	7	6	6	7	3	1
1046	0,605324	3	7	7	0	7	3	2
1047	0,605903	3	7	7	6	7	3	3
1048	0,606481	3	7	8	0	7	3	4
1049	0,607060	3	7	8	6	7	3	5
1050	0,607639	3	7	9	0	7	3	6
1051	0,608218	3	7	9	6	7	3	7
1052	0,608796	3	7	10	0	7	3	8
1053	0,609375	3	7	10	6	7	3	9
1054	0,609954	3	7	11	0	7	3	10
1055	0,610532	3	7	11	6	7	3	11
1056	0,611111	3	8	0	0	7	4	0
1057	0,611690	3	8	0	6	7	4	1
1058	0,612269	3	8	1	0	7	4	2
1059	0,612847	3	8	1	6	7	4	3
1060	0,613426	3	8	2	0	7	4	4
1061	0,614005	3	8	2	6	7	4	5
1062	0,614583	3	8	3	0	7	4	6
1063	0,615162	3	8	3	6	7	4	7
1064	0,615741	3	8	4	0	7	4	8
1065	0,616319	3	8	4	6	7	4	9
1066	0,616898	3	8	5	0	7	4	10
1067	0,617477	3	8	5	6	7	4	11
1068	0,618056	3	8	6	0	7	5	0
1069	0,618634	3	8	6	6	7	5	1
1070	0,619213	3	8	7	0	7	5	2
1071	0,619791	3	8	7	6	7	5	3
1072	0,620370	3	8	8	0	7	5	4
1073	0,620949	3	8	8	6	7	5	5
1074	0,621528	3	8	9	0	7	5	6
1075	0,622106	3	8	9	6	7	5	7
1076	0,622685	3	8	10	0	7	5	8
1077	0,623264	3	8	10	6	7	5	9
1078	0,623843	3	8	11	0	7	5	10
1079	0,624421	3	8	11	6	7	5	11
1080	0,625000	3	9	0	0	7	6	0
1081	0,625579	3	9	0	6	7	6	1
1082	0,626157	3	9	1	0′	7	6	2′
1083	0,626736	3	9	1	6	7	6	3
1084	0,627315	3	9	2	0	7	6	4
1085	0,627894	3	9	2	6	7	6	5
1086	0,628472	3	9	3	0	7	6	6
1087	0,629051	3	9	3	6	7	6	7
1088	0,629630	3	9	4	0	7	6	8
1089	0,630208	3	9	4	6	7	6	9
1090	0,630787	3	9	5	0	7	6	10
1091	0,631366	3	9	5	6	7	6	11
1092	0,631944	3	9	6	0	7	7	0
1093	0,632523	3	9	6	6	7	7	1
1094	0,633102	3	9	7	0	7	7	2
1095	0,633681	3	9	7	6	7	7	3
1096	0,634259	3	9	8	0	7	7	4
1097	0,634838	3	9	8	6	7	7	5
1098	0,635417	3	9	9	0	7	7	6
1099	0,635995	3	9	9	6	7	7	7
1100	0,636574	3	9	10	0	7	7	8
1101	0,637153	3	9	10	6	7	7	9
1102	0,637731	3	9	11	0	7	7	10
1103	0,638310	3	9	11	6	7	7	11
1104	0,638889	3	10	0	0	7	8	0
1105	0,639468	3	10	0	6	7	8	1
1106	0,640046	3	10	1	0	7	8	2
1107	0,640625	3	10	1	6	7	8	3
1108	0,641204	3	10	2	0	7	8	4
1109	0,641782	3	10	2	6	7	8	5
1110	0,642361	3	10	3	0	7	8	6
1111	0,642940	3	10	3	6	7	8	7
1112	0,643519	3	10	4	0	7	8	8
1113	0,644097	3	10	4	6	7	8	9
1114	0,644676	3	10	5	0	7	8	10
1115	0,645255	3	10	5	6	7	8	11
1116	0,645833	3	10	6	0	7	9	0
1117	0,646412	3	10	6	6	7	9	1
1118	0,646991	3	10	7	0	7	9	2
1119	0,647569	3	10	7	6	7	9	3
1120	0,648148	3	10	8	0	7	9	4
1121	0,648727	3	10	8	6	7	9	5
1122	0,649306	3	10	9	0	7	9	6
1123	0,649884	3	10	9	6	7	9	7
1124	0,650463	3	10	10	0	7	9	8
1125	0,651042	3	10	10	6	7	9	9
1126	0,651620	3	10	11	0	7	9	10
1127	0,652199	3	10	11	6	7	9	11
1128	0,652778	3	11	0	0	7	10	0

TABLE pour réduire en fractions décimales les fractions ordinaires de la toise, du pied, etc.

Pouces cubes contenus dans une fraction décimale de pied cube.	Nombres décimaux.	Valeur des nombres décimaux, l'unité étant							Pouces cubes contenus dans une fraction décimale de pied cube.	Nombres décimaux.	Valeur des nombres décimaux, l'unité étant						
		Toise.				Pied.					Toise.				Pied.		
		pi.	po.	li.		po.	li.				pi.	po.	li.		po.	li.	
1129	0,653356	3	11	0	6′	7	10	1′	1176	0,680556	4	1	0	0′	8	2	0′
1130	0,653935	3	11	1	0	7	10	2	1177	0,681134	4	1	0	6	8	2	1
1131	0,654514	3	11	1	6	7	10	3	1178	0,681713	4	1	1	0	8	2	2
1132	0,655093	3	11	2	0	7	10	4	1179	0,682292	4	1	1	6	8	2	3
1133	0,655671	3	11	2	6	7	10	5	1180	0,682870	4	1	2	0	8	2	4
1134	0,656250	3	11	3	0	7	10	6	1181	0,683449	4	1	2	6	8	2	5
1135	0,656829	3	11	3	6	7	10	7	1182	0,684028	4	1	3	0	8	2	6
1136	0,657407	3	11	4	0	7	10	8	1183	0,684606	4	1	3	6	8	2	7
1137	0,657986	3	11	4	6	7	10	9	1184	0,685185	4	1	4	0	8	2	8
1138	0,658565	3	11	5	0	7	10	10	1185	0,685764	4	1	4	6	8	2	9
1139	0,659144	3	11	5	6	7	10	11	1186	0,686343	4	1	5	0	8	2	10
1140	0,659722	3	11	6	0	7	11	0	1187	0,686921	4	1	5	6	8	2	11
1141	0,660301	3	11	6	6	7	11	1	1188	0,687500	4	1	6	0	8	3	0
1142	0,660880	3	11	7	0	7	11	2	1189	0,688079	4	1	6	6	8	3	1
1143	0,661458	3	11	7	6	7	11	3	1190	0,688657	4	1	7	0	8	3	2
1144	0,662037	3	11	8	0	7	11	4	1191	0,689236	4	1	7	6	8	3	3
1145	0,662616	3	11	8	6	7	11	5	1192	0,689815	4	1	8	0	8	3	4
1146	0,663194	3	11	9	0	7	11	6	1193	0,690394	4	1	8	6	8	3	5
1147	0,663773	3	11	9	6	7	11	7	1194	0,690972	4	1	9	0	8	3	6
1148	0,664352	3	11	10	0	7	11	8	1195	0,691551	4	1	9	6	8	3	7
1149	0,664931	3	11	10	6	7	11	9	1196	0,692130	4	1	10	0	8	3	8
1150	0,665509	3	11	11	0	7	11	10	1197	0,692708	4	1	10	6	8	3	9
1151	0,666088	3	11	11	6	7	11	11	1198	0,693287	4	1	11	0	8	3	10
1152	0,666667	4	0	0	0	8	0	0	1199	0,693866	4	1	11	6	8	3	11
1153	0,667245	4	0	0	6	8	0	1	1200	0,694444	4	2	0	0	8	4	0
1154	0,667824	4	0	1	0	8	0	2	1201	0,695023	4	2	0	6	8	4	1
1155	0,668403	4	0	1	6	8	0	3	1202	0,695601	4	2	1	0	8	4	2
1156	0,668981	4	0	2	0	8	0	4	1203	0,696181	4	2	1	6	8	4	3
1157	0,669560	4	0	2	6	8	0	5	1204	0,696759	4	2	2	0	8	4	4
1158	0,670139	4	0	3	0	8	0	6	1205	0,697338	4	2	2	6	8	4	5
1159	0,670718	4	0	3	6	8	0	7	1206	0,697917	4	2	3	0	8	4	6
1160	0,671296	4	0	4	0	8	0	8	1207	0,698495	4	2	3	6	8	4	7
1161	0,671875	4	0	4	6	8	0	9	1208	0,699074	4	2	4	0	8	4	8
1162	0,672454	4	0	5	0	8	0	10	1209	0,699653	4	2	4	6	8	4	9
1163	0,673032	4	0	5	6	8	0	11	1210	0,700231	4	2	5	0	8	4	10
1164	0,673611	4	0	6	0	8	1	0	1211	0,700810	4	2	5	6	8	4	11
1165	0,674190	4	0	6	6	8	1	1	1212	0,701389	4	2	6	0	8	5	0
1166	0,674769	4	0	7	0	8	1	2	1213	0,701968	4	2	6	6	8	5	1
1167	0,675347	4	0	7	6	8	1	3	1214	0,702546	4	2	7	0	8	5	2
1168	0,675926	4	0	8	0	8	1	4	1215	0,703125	4	2	7	6	8	5	3
1169	0,676505	4	0	8	6	8	1	5	1216	0,703704	4	2	8	0	8	5	4
1170	0,677083	4	0	9	0	8	1	6	1217	0,704282	4	2	8	6	8	5	5
1171	0,677662	4	0	9	6	8	1	7	1218	0,704861	4	2	9	0	8	5	6
1172	0,678241	4	0	10	0	8	1	8	1219	0,705440	4	2	9	6	8	5	7
1173	0,678819	4	0	10	6	8	1	9	1220	0,706019	4	2	10	0	8	5	8
1174	0,679398	4	0	11	0	8	1	10	1221	0,706597	4	2	10	6	8	5	9
1175	0,679977	4	0	11	6	8	1	11	1222	0,707176	4	2	11	0	8	5	10

Digitized by Google

TABLE pour réduire en fractions décimales les fractions ordinaires de la toise, du pied, etc.

Pouces cubes contenus dans une fraction décimale de pied cube.	Nombres décimaux.	Valeur des nombres décimaux, l'unité étant							Pouces cubes contenus dans une fraction décimale de pied cube.	Nombres décimaux.	Valeur des nombres décimaux, l'unité étant						
		Toise.				Pied.					Toise.				Pied.		
		pi.	po.	li.		po.	li.				pi.	po.	li.		po.	li.	
1223	0,707755	4	2	11	6′	8	5	11′	1270	0,734954	4	4	11	0′	8	9	10′
1224	0,708333	4	3	0	0	8	6	0	1271	0,735532	4	4	11	6	8	9	11
1225	0,708912	4	3	0	6	8	6	1	1272	0,736111	4	5	0	0	8	10	0
1226	0,709491	4	3	1	0	8	6	2	1273	0,736690	4	5	0	6	8	10	1
1227	0,710069	4	3	1	6	8	6	3	1274	0,737269	4	5	1	0	8	10	2
1228	0,710648	4	3	2	0	8	6	4	1275	0,737847	4	5	1	6	8	10	3
1229	0,711227	4	3	2	6	8	6	5	1276	0,738426	4	5	2	0	8	10	4
1230	0,711806	4	3	3	0	8	6	6	1277	0,739005	4	5	2	6	8	10	5
1231	0,712384	4	3	3	6	8	6	7	1278	0,739583	4	5	3	0	8	10	6
1232	0,712963	4	3	4	0	8	6	8	1279	0,740162	4	5	3	6	8	10	7
1233	0,713542	4	3	4	6	8	6	9	1280	0,740741	4	5	4	0	8	10	8
1234	0,714120	4	3	5	0	8	6	10	1281	0,741319	4	5	4	6	8	10	9
1235	0,714699	4	3	5	6	8	6	11	1282	0,741898	4	5	5	0	8	10	10
1236	0,715278	4	3	6	0	8	7	0	1283	0,742477	4	5	5	6	8	10	11
1237	0,715856	4	3	6	6	8	7	1	1284	0,743056	4	5	6	0	8	11	0
1238	0,716435	4	3	7	0	8	7	2	1285	0,743634	4	5	6	6	8	11	1
1239	0,717014	4	3	7	6	8	7	3	1286	0,744213	4	5	7	0	8	11	2
1240	0,717593	4	3	8	0	8	7	4	1287	0,744792	4	5	7	6	8	11	3
1241	0,718171	4	3	8	6	8	7	5	1288	0,745370	4	5	8	0	8	11	4
1242	0,718750	4	3	9	0	8	7	6	1289	0,745949	4	5	8	6	8	11	5
1243	0,719329	4	3	9	6	8	7	7	1290	0,746528	4	5	9	0	8	11	6
1244	0,719907	4	3	10	0	8	7	8	1291	0,747106	4	5	9	6	8	11	7
1245	0,720486	4	3	10	6	8	7	9	1292	0,747685	4	5	10	0	8	11	8
1246	0,721065	4	3	11	0	8	7	10	1293	0,748264	4	5	10	6	8	11	9
1247	0,721644	4	3	11	6	8	7	11	1294	0,748843	4	5	11	0	8	11	10
1248	0,722222	4	4	0	0	8	8	0	1295	0,749421	4	5	11	6	8	11	11
1249	0,722801	4	4	0	6	8	8	1	1296	0,750000	4	6	0	0	9	0	0
1250	0,723380	4	4	1	0	8	8	2	1297	0,750579	4	6	0	6	9	0	1
1251	0,723958	4	4	1	6	8	8	3	1298	0,751157	4	6	1	0	9	0	2
1252	0,724537	4	4	2	0	8	8	4	1299	0,751736	4	6	1	6	9	0	3
1253	0,725116	4	4	2	6	8	8	5	1300	0,752315	4	6	2	0	9	0	4
1254	0,725694	4	4	3	0	8	8	6	1301	0,752894	4	6	2	6	9	0	5
1255	0,726273	4	4	3	6	8	8	7	1302	0,753472	4	6	3	0	9	0	6
1256	0,726852	4	4	4	0	8	8	8	1303	0,754051	4	6	3	6	9	0	7
1257	0,727431	4	4	4	6	8	8	9	1304	0,754630	4	6	4	0	9	0	8
1258	0,728009	4	4	5	0	8	8	10	1305	0,755208	4	6	4	6	9	0	9
1259	0,728588	4	4	5	6	8	8	11	1306	0,755787	4	6	5	0	9	0	10
1260	0,729167	4	4	6	0	8	9	0	1307	0,756366	4	6	5	6	9	0	11
1261	0,729745	4	4	6	6	8	9	1	1308	0,756944	4	6	6	0	9	1	0
1262	0,730324	4	4	7	0	8	9	2	1309	0,757523	4	6	6	6	9	1	1
1263	0,730903	4	4	7	6	8	9	3	1310	0,758102	4	6	7	0	9	1	2
1264	0,731481	4	4	8	0	8	9	4	1311	0,758681	4	6	7	6	9	1	3
1265	0,732060	4	4	8	6	8	9	5	1312	0,759259	4	6	8	0	9	1	4
1266	0,732639	4	4	9	0	8	9	6	1313	0,759838	4	6	8	6	9	1	5
1267	0,733217	4	4	9	6	8	9	7	1314	0,760417	4	6	9	0	9	1	6
1268	0,733796	4	4	10	0	8	9	8	1315	0,760995	4	6	9	6	9	1	7
1269	0,734375	4	4	10	6	8	9	9	1316	0,761574	4	6	10	0	9	1	8

Digitized by Google

TABLE pour réduire en fractions décimales les fractions ordinaires de la toise, du pied, etc.

Pouces cubes contenus dans une fraction décimale de pied cube.	Nombres décimaux.	Valeur des nombres décimaux, l'unité étant Toise. pi.	po.	li.		Pied. po.	li.	
1317	0,762153	4	6	10	6′	9	1	9′
1318	0,762731	4	6	11	0	9	1	10
1319	0,763310	4	6	11	6	9	1	11
1320	0,763889	4	7	0	0	9	2	0
1321	0,764468	4	7	0	6	9	2	1
1322	0,765046	4	7	1	0	9	2	2
1323	0,765625	4	7	1	6	9	2	3
1324	0,766204	4	7	2	0	9	2	4
1325	0,766782	4	7	2	6	9	2	5
1326	0,767361	4	7	3	0	9	2	6
1327	0,767940	4	7	3	6	9	2	7
1328	0,768519	4	7	4	0	9	2	8
1329	0,769097	4	7	4	6	9	2	9
1330	0,769676	4	7	5	0	9	2	10
1331	0,770255	4	7	5	6	9	2	11
1332	0,770833	4	7	6	0	9	3	0
1333	0,771412	4	7	6	6	9	3	1
1334	0,771991	4	7	7	0	9	3	2
1335	0,772569	4	7	7	6	9	3	3
1336	0,773148	4	7	8	0	9	3	4
1337	0,773727	4	7	8	6	9	3	5
1338	0,774306	4	7	9	0	9	3	6
1339	0,774884	4	7	9	6	9	3	7
1340	0,775463	4	7	10	0	9	3	8
1341	0,776042	4	7	10	6	9	3	9
1342	0,776620	4	7	11	0	9	3	10
1343	0,777199	4	7	11	6	9	3	11
1344	0,777778	4	8	0	0	9	4	0
1345	0,778356	4	8	0	6	9	4	1
1346	0,778935	4	8	1	0	9	4	2
1347	0,779514	4	8	1	6	9	4	3
1348	0,780093	4	8	2	0	9	4	4
1349	0,780671	4	8	2	6	9	4	5
1350	0,781250	4	8	3	0	9	4	6
1351	0,781829	4	8	3	6	9	4	7
1352	0,782407	4	8	4	0	9	4	8
1353	0,782986	4	8	4	6	9	4	9
1354	0,783565	4	8	5	0	9	4	10
1355	0,784144	4	8	5	6	9	4	11
1356	0,784722	4	8	6	0	9	5	0
1357	0,785301	4	8	6	6	9	5	1
1358	0,785880	4	8	7	0	9	5	2
1359	0,786458	4	8	7	6	9	5	3
1360	0,787037	4	8	8	0	9	5	4
1361	0,787616	4	8	8	6	9	5	5
1362	0,788194	4	8	9	0	9	5	6
1363	0,788773	4	8	9	6	9	5	7

Pouces cubes contenus dans une fraction décimale de pied cube.	Nombres décimaux.	Valeur des nombres décimaux, l'unité étant Toise. pi.	po.	li.		Pied. po.	li.	
1364	0,789352	4	8	10	0′	9	5	8′
1365	0,789931	4	8	10	6	9	5	9
1366	0,790509	4	8	11	0	9	5	10
1367	0,791088	4	8	11	6	9	5	11
1368	0,791667	4	9	0	0	9	6	0
1369	0,792245	4	9	0	6	9	6	1
1370	0,792824	4	9	1	0	9	6	2
1371	0,793403	4	9	1	6	9	6	3
1372	0,793981	4	9	2	0	9	6	4
1373	0,794560	4	9	2	6	9	6	5
1374	0,795139	4	9	3	0	9	6	6
1375	0,795718	4	9	3	6	9	6	7
1376	0,796296	4	9	4	0	9	6	8
1377	0,796875	4	9	4	6	9	6	9
1378	0,797454	4	9	5	0	9	6	10
1379	0,798032	4	9	5	6	9	6	11
1380	0,798611	4	9	6	0	9	7	0
1381	0,799190	4	9	6	6	9	7	1
1382	0,799769	4	9	7	0	9	7	2
1383	0,800347	4	9	7	6	9	7	3
1384	0,800926	4	9	8	0	9	7	4
1385	0,801505	4	9	8	6	9	7	5
1386	0,802083	4	9	9	0	9	7	6
1387	0,802662	4	9	9	6	9	7	7
1388	0,803241	4	9	10	0	9	7	8
1389	0,803819	4	9	10	6	9	7	9
1390	0,804398	4	9	11	0	9	7	10
1391	0,804977	4	9	11	6	9	7	11
1392	0,805556	4	10	0	0	9	8	0
1393	0,806134	4	10	0	6	9	8	1
1394	0,806713	4	10	1	0	9	8	2
1395	0,807291	4	10	1	6	9	8	3
1396	0,807870	4	10	2	0	9	8	4
1397	0,808449	4	10	2	6	9	8	5
1398	0,809028	4	10	3	0	9	8	6
1399	0,809606	4	10	3	6	9	8	7
1400	0,810185	4	10	4	0	9	8	8
1401	0,810764	4	10	4	6	9	8	9
1402	0,811343	4	10	5	0	9	8	10
1403	0,811921	4	10	5	6	9	8	11
1404	0,812500	4	10	6	0	9	9	0
1405	0,813079	4	10	6	6	9	9	1
1406	0,813657	4	10	7	0	9	9	2
1407	0,814236	4	10	7	6	9	9	3
1408	0,814815	4	10	8	0	9	9	4
1409	0,815394	4	10	8	6	9	9	5
1410	0,815972	4	10	9	0	9	9	6

Digitized by Google

TABLE pour réduire en fractions décimales les fractions ordinaires de la toise, du pied, etc.

Pouces cubes contenus dans une fraction décimale de pied cube.	Nombres décimaux.	Valeur des nombres décimaux, l'unité étant Toise. pi.	po.	li.		Pied. po.	li.		Pouces cubes contenus dans une fraction décimale de pied cube.	Nombres décimaux.	Valeur des nombres décimaux, l'unité étant Toise. to.	po.	li.		Pied. po.	li.	
1411	0,816551	4	10	9	6′	9	9	7′	1458	0,843750	5	0	9	0′	10	1	6′
1412	0,817130	4	10	10	0	9	9	8	1459	0,844329	5	0	9	6	10	1	7
1413	0,817708	4	10	10	6	9	9	9	1460	0,844907	5	0	10	0	10	1	8
1414	0,818287	4	10	11	0	9	9	10	1461	0,845486	5	0	10	6	10	1	9
1415	0,818866	4	10	11	6	9	9	11	1462	0,846065	5	0	11	0	10	1	10
1416	0,819444	4	11	0	0	9	10	0	1463	0,846644	5	0	11	6	10	1	11
1417	0,820023	4	11	0	6	9	10	1	1464	0,847222	5	1	0	0	10	2	0
1418	0,820602	4	11	1	0	9	10	2	1465	0,847801	5	1	0	6	10	2	1
1419	0,821181	4	11	1	6	9	10	3	1466	0,848380	5	1	1	0	10	2	2
1420	0,821759	4	11	2	0	9	10	4	1467	0,848958	5	1	1	6	10	2	3
1421	0,822338	4	11	2	6	9	10	5	1468	0,849537	5	1	2	0	10	2	4
1422	0,822917	4	11	3	0	9	10	6	1469	0,850116	5	1	2	6	10	2	5
1423	0,823495	4	11	3	6	9	10	7	1470	0,850694	5	1	3	0	10	2	6
1424	0,824074	4	11	4	0	9	10	8	1471	0,851273	5	1	3	6	10	2	7
1425	0,824653	4	11	4	6	9	10	9	1472	0,851852	5	1	4	0	10	2	8
1426	0,825231	4	11	5	0	9	10	10	1473	0,852431	5	1	4	6	10	2	9
1427	0,825810	4	11	5	6	9	10	11	1474	0,853009	5	1	5	0	10	2	10
1428	0,826389	4	11	6	0	9	11	0	1475	0,853588	5	1	5	6	10	2	11
1429	0,826968	4	11	6	6	9	11	1	1476	0,854167	5	1	6	0	10	3	0
1430	0,827546	4	11	7	0	9	11	2	1477	0,854745	5	1	6	6	10	3	1
1431	0,828125	4	11	7	6	9	11	3	1478	0,855324	5	1	7	0	10	3	2
1432	0,828704	4	11	8	0	9	11	4	1479	0,855903	5	1	7	6	10	3	3
1433	0,829282	4	11	8	6	9	11	5	1480	0,856481	5	1	8	0	10	3	4
1434	0,829861	4	11	9	0	9	11	6	1481	0,857060	5	1	8	6	10	3	5
1435	0,830440	4	11	9	6	9	11	7	1482	0,857639	5	1	9	0	10	3	6
1436	0,831019	4	11	10	0	9	11	8	1483	0,858218	5	1	9	6	10	3	7
1437	0,831597	4	11	10	6	9	11	9	1484	0,858796	5	1	10	0	10	3	8
1438	0,832176	4	11	11	0	9	11	10	1485	0,859375	5	1	10	6	10	3	9
1439	0,832755	4	11	11	6	9	11	11	1486	0 859954	5	1	11	0	10	3	10
1440	0,833333	5	0	0	0	10	0	0	1487	0,860532	5	1	11	6	10	3	11
1441	0,833912	5	0	0	6	10	0	1	1488	0,861111	5	2	0	0	10	4	0
1442	0,834491	5	0	1	0	10	0	2	1489	0,861690	5	2	0	6	10	4	1
1443	0,835069	5	0	1	6	10	0	3	1490	0,862269	5	2	1	0	10	4	2
1444	0,835648	5	0	2	0	10	0	4	1491	0,862847	5	2	1	6	10	4	3
1445	0,836227	5	0	2	6	10	0	5	1492	0,863426	5	2	2	0	10	4	4
1446	0,836806	5	0	3	0	10	0	6	1493	0,864005	5	2	2	6	10	4	5
1447	0,837384	5	0	3	6	10	0	7	1494	0,864583	5	2	3	0	10	4	6
1448	0,837963	5	0	4	0	10	0	8	1495	0,865162	5	2	3	6	10	4	7
1449	0,838542	5	0	4	6	10	0	9	1496	0,865741	5	2	4	0	10	4	8
1450	0,839120	5	0	5	0	10	0	10	1497	0,866319	5	2	4	6	10	4	9
1451	0,839699	5	0	5	6	10	0	11	1498	0,866898	5	2	5	0	10	4	10
1452	0,840278	5	0	6	0	10	1	0	1499	0,867477	5	2	5	6	10	4	11
1453	0,840856	5	0	6	6	10	1	1	1500	0,868056	5	2	6	0	10	5	0
1454	0,841435	5	0	7	0	10	1	2	1501	0,868634	5	2	6	6	10	5	1
1455	0,842014	5	0	7	6	10	1	3	1502	0,869213	5	2	7	0	10	5	2
1456	0,842593	5	0	8	0	10	1	4	1503	0,869792	5	2	7	6	10	5	3
1457	0,843171	5	0	8	6	10	1	5	1504	0,870370	5	2	8	0	10	5	4

Digitized by Google

TABLE pour réduire en fractions décimales les fractions ordinaires de la toise, du pied, etc.

Pouces cubes contenus dans une fraction décimale de pied cube.	Nombres décimaux.	Valeur des nombres décimaux, l'unité étant la Toise. pi.	po.	li.		la Pied. po.	li.	
1505	0,870949	5	2	8	6′	10	5	5′
1506	0,871528	5	2	9	0	10	5	6
1507	0,872106	5	2	9	6	10	5	7
1508	0,872685	5	2	10	0	10	5	8
1509	0,873264	5	2	10	6	10	5	9
1510	0,873843	5	2	11	0	10	5	10
1511	0,874421	5	2	11	6	10	5	11
1512	0,875000	5	3	0	0	10	6	0
1513	0,875579	5	3	0	6	10	6	1
1514	0,876157	5	3	1	0	10	6	2
1515	0,876736	5	3	1	6	10	6	3
1516	0,877315	5	3	2	0	10	6	4
1517	0,877894	5	3	2	6	10	6	5
1518	0,878472	5	3	3	0	10	6	6
1519	0,879051	5	3	3	6	10	6	7
1520	0,879630	5	3	4	0	10	6	8
1521	0,880208	5	3	4	6	10	6	9
1522	0,880787	5	3	5	0	10	6	10
1523	0,881366	5	3	5	6	10	6	11
1524	0,881944	5	3	6	0	10	7	0
1525	0,882523	5	3	6	6	10	7	1
1526	0,883102	5	3	7	0	10	7	2
1527	0,883681	5	3	7	6	10	7	3
1528	0,884259	5	3	8	0	10	7	4
1529	0,884838	5	3	8	6	10	7	5
1530	0,885417	5	3	9	0	10	7	6
1531	0,885995	5	3	9	6	10	7	7
1532	0,886574	5	3	10	0	10	7	8
1533	0,887153	5	3	10	6	10	7	9
1534	0,887731	5	3	11	0	10	7	10
1535	0,888310	5	3	11	6	10	7	11
1536	0,888889	5	4	0	0	10	8	0
1537	0,889468	5	4	0	6	10	8	1
1538	0,890046	5	4	1	0	10	8	2
1539	0,890625	5	4	1	6	10	8	3
1540	0,891204	5	4	2	0	10	8	4
1541	0,891782	5	4	2	6	10	8	5
1542	0,892361	5	4	3	0	10	8	6
1543	0,892940	5	4	3	6	10	8	7
1544	0,893519	5	4	4	0	10	8	8
1545	0,894097	5	4	4	6	10	8	9
1546	0,894676	5	4	5	0	10	8	10
1547	0,895255	5	4	5	6	10	8	11
1548	0,895833	5	4	6	0	10	9	0
1549	0,896412	5	4	6	6	10	9	1
1550	0,896991	5	4	7	0	10	9	2
1551	0,897569	5	4	7	6	10	9	3
1552	0,898148	5	4	8	0′	10	9	4′
1553	0,898727	5	4	8	6	10	9	5
1554	0,899306	5	4	9	0	10	9	6
1555	0,899884	5	4	9	6	10	9	7
1556	0,900463	5	4	10	0	10	9	8
1557	0,901042	5	4	10	6	10	9	9
1558	0,901620	5	4	11	0	10	9	10
1559	0,902199	5	4	11	6	10	9	11
1560	0,902778	5	5	0	0	10	10	0
1561	0,903356	5	5	0	6	10	10	1
1562	0,903935	5	5	1	0	10	10	2
1563	0,904514	5	5	1	6	10	10	3
1564	0,905093	5	5	2	0	10	10	4
1565	0,905671	5	5	2	6	10	10	5
1566	0,906250	5	5	3	0	10	10	6
1567	0,906829	5	5	3	6	10	10	7
1568	0,907407	5	5	4	0	10	10	8
1569	0,907986	5	5	4	6	10	10	9
1570	0,908565	5	5	5	0	10	10	10
1571	0,909144	5	5	5	6	10	10	11
1572	0,909722	5	5	6	0	10	11	0
1573	0,910301	5	5	6	6	10	11	1
1574	0,910880	5	5	7	0	10	11	2
1575	0,911458	5	5	7	6	10	11	3
1576	0,912037	5	5	8	0	10	11	4
1577	0,912616	5	5	8	6	10	11	5
1578	0,913194	5	5	9	0	10	11	6
1579	0,913773	5	5	9	6	10	11	7
1580	0,914352	5	5	10	0	10	11	8
1581	0,914931	5	5	10	6	10	11	9
1582	0,915509	5	5	11	0	10	11	10
1583	0,916088	5	5	11	6	10	11	11
1584	0,916667	5	6	0	0	11	0	0
1585	0,917245	5	6	0	6	11	0	1
1586	0,917824	5	6	1	0	11	0	2
1587	0,918403	5	6	1	6	11	0	3
1588	0,918981	5	6	2	0	11	0	4
1589	0,919560	5	6	2	6	11	0	5
1590	0,920139	5	6	3	0	11	0	6
1591	0,920718	5	6	3	6	11	0	7
1592	0,921296	5	6	4	0	11	0	8
1593	0,921875	5	6	4	6	11	0	9
1594	0,922454	5	6	5	0	11	0	10
1595	0,923032	5	6	5	6	11	0	11
1596	0,923611	5	6	6	0	11	1	0
1597	0,924190	5	6	6	6	11	1	1
1598	0,924769	5	6	7	0	11	1	2

Digitized by Google

TABLE pour réduire en fractions décimales les fractions ordinaires de la toise, du pied, etc.

Pouces cubes contenus dans une fraction décimale de pied cube.	Nombres décimaux.	Valeur des nombres décimaux, l'unité étant — Toise. pi.	po.	li.		Pied. po.	li.		Pouces cubes contenus dans une fraction décimale de pied cube.	Nombres décimaux.	Valeur des nombres décimaux, l'unité étant — Toise. pi.	po.	li.		Pied. po.	li.	
1599	0,925347	5	6	7	6′	11	1	3′	1646	0,952546	5	8	7	0′	11	5	2′
1600	0,925926	5	6	8	0	11	1	4	1647	0,953125	5	8	7	6	11	5	3
1601	0,926505	5	6	8	6	11	1	5	1648	0,953704	5	8	8	0	11	5	4
1602	0,927083	5	6	9	0	11	1	6	1649	0,954282	5	8	8	6	11	5	5
1603	0,927662	5	6	9	6	11	1	7	1650	0,954861	5	8	9	0	11	5	6
1604	0,928241	5	6	10	0	11	1	8	1651	0,955440	5	8	9	6	11	5	7
1605	0,928819	5	6	10	6	11	1	9	1652	0,956019	5	8	10	0	11	5	8
1606	0,929398	5	6	11	0	11	1	10	1653	0,956597	5	8	10	6	11	5	9
1607	0,929977	5	6	11	6	11	1	11	1654	0,957176	5	8	11	0	11	5	10
1608	0,930556	5	7	0	0	11	2	0	1655	0,957755	5	8	11	6	11	5	11
1609	0,931134	5	7	0	6	11	2	1	1656	0,958333	5	9	0	0	11	6	0
1610	0,931713	5	7	1	0	11	2	2	1657	0,958912	5	9	0	6	11	6	1
1611	0,932292	5	7	1	6	11	2	3	1658	0,959491	5	9	1	0	11	6	2
1612	0,932870	5	7	2	0	11	2	4	1659	0,960069	5	9	1	6	11	6	3
1613	0,933449	5	7	2	6	11	2	5	1660	0,960648	5	9	2	0	11	6	4
1614	0,934028	5	7	3	0	11	2	6	1661	0,961227	5	9	2	6	11	6	5
1615	0,934606	5	7	3	6	11	2	7	1662	0,961806	5	9	3	0	11	6	6
1616	0,935185	5	7	4	0	11	2	8	1663	0,962384	5	9	3	6	11	6	7
1617	0,935764	5	7	4	6	11	2	9	1664	0,962963	5	9	4	0	11	6	8
1618	0,936343	5	7	5	0	11	2	10	1665	0,963542	5	9	4	6	11	6	9
1619	0,936921	5	7	5	6	11	2	11	1666	0,964120	5	9	5	0	11	6	10
1620	0,937500	5	7	6	0	11	3	0	1667	0,964699	5	9	5	6	11	6	11
1621	0,938079	5	7	6	6	11	3	1	1668	0,965278	5	9	6	0	11	7	0
1622	0,938657	5	7	7	0	11	3	2	1669	0,965856	5	9	6	6	11	7	1
1623	0,939236	5	7	7	6	11	3	3	1670	0,966435	5	9	7	0	11	7	2
1624	0,939815	5	7	8	0	11	3	4	1671	0,967014	5	9	7	6	11	7	3
1625	0,940394	5	7	8	6	11	3	5	1672	0,967593	5	9	8	0	11	7	4
1626	0,940972	5	7	9	0	11	3	6	1673	0,968171	5	9	8	6	11	7	5
1627	0,941551	5	7	9	6	11	3	7	1674	0,968750	5	9	9	0	11	7	6
1628	0,942130	5	7	10	0	11	3	8	1675	0,969329	5	9	9	6	11	7	7
1629	0,942708	5	7	10	6	11	3	9	1676	0,969907	5	9	10	0	11	7	8
1630	0,943287	5	7	11	0	11	3	10	1677	0,970486	5	9	10	6	11	7	9
1631	0,943866	5	7	11	6	11	3	11	1678	0,971065	5	9	11	0	11	7	10
1632	0,944444	5	8	0	0	11	4	0	1679	0,971644	5	9	11	6	11	7	11
1633	0,945023	5	8	0	6	11	4	1	1680	0,972222	5	10	0	0	11	8	0
1634	0,945602	5	8	1	0	11	4	2	1681	0,972801	5	10	0	6	11	8	1
1635	0,946181	5	8	1	6	11	4	3	1682	0,973380	5	10	1	0	11	8	2
1636	0,946759	5	8	2	0	11	4	4	1683	0,973958	5	10	1	6	11	8	3
1637	0,947338	5	8	2	6	11	4	5	1684	0,974537	5	10	2	0	11	8	4
1638	0,947917	5	8	3	0	11	4	6	1685	0,975116	5	10	2	6	11	8	5
1639	0,948495	5	8	3	6	11	4	7	1686	0,975694	5	10	3	0	11	8	6
1640	0,949074	5	8	4	0	11	4	8	1687	0,976273	5	10	3	6	11	8	7
1641	0,949653	5	8	4	6	11	4	9	1688	0,976852	5	10	4	0	11	8	8
1642	0,950231	5	8	5	0	11	4	10	1689	0,977431	5	10	4	6	11	8	9
1643	0,950810	5	8	5	6	11	4	11	1690	0,978009	5	10	5	0	11	8	10
1644	0,951389	5	8	6	0	11	5	0	1691	0,978588	5	10	5	6	11	8	11
1645	0,951968	5	8	6	6	11	5	1	1692	0,979167	5	10	6	0	11	9	0

TABLE pour réduire en fractions décimales les fractions ordinaires de la toise, du pied, etc.

Pouces cubes contenus dans une fraction décimale de pied cube.	Nombres décimaux.	Valeur des nombres décimaux, l'unité étant							Pouces cubes contenus dans une fraction décimale de pied cube.	Nombres décimaux.	Valeur des nombres décimaux, l'unité étant						
		Toise.				Pied.					Toise.				Pied.		
		pi.	po.	li.		po.	li.				pi.	po.	li.		po.	li.	
1693	0,979745	5	10	6	6′	11	9	1′	1711	0,990162	5	11	3	6′	11	10	7
1694	0,980324	5	10	7	0	11	9	2	1712	0,990741	5	11	4	0	11	10	8
1695	0,980903	5	10	7	6	11	9	3	1713	0,991319	5	11	4	6	11	10	9
1696	0,981481	5	10	8	0	11	9	4	1714	0,991898	5	11	5	0	11	10	10
1697	0,982060	5	10	8	6	11	9	5	1715	0,992477	5	11	5	6	11	10	11
1698	0,982639	5	10	9	0	11	9	6	1716	0,993056	5	11	6	0	11	11	0
1699	0,983218	5	10	9	6	11	9	7	1717	0,993634	5	11	6	6	11	11	1
1700	0,983796	5	10	10	0	11	9	8	1718	0,994213	5	11	7	0	11	11	2
1701	0,984375	5	10	10	6	11	9	9	1719	0,994792	5	11	7	6	11	11	3
1702	0,984954	5	10	11	0	11	9	10	1720	0,995370	5	11	8	0	11	11	4
1703	0,985532	5	10	11	6	11	9	11	1721	0,995949	5	11	8	6′	11	11	5
1704	0,986111	5	11	0	0	11	10	0	1722	0,996528	5	11	9	0	11	11	6
1705	0,986690	5	11	0	6	11	10	1	1723	0,997106	5	11	9	6	11	11	7
1706	0,987269	5	11	1	0	11	10	2	1724	0,997685	5	11	10	0	11	11	8
1707	0,987847	5	11	1	6	11	10	3	1725	0,998264	5	11	10	6	11	11	9
1708	0,988426	5	11	2	0	11	10	4	1726	0,998843	5	11	11	0	11	11	10
1709	0,989005	5	11	2	6	11	10	5	1727	0,999421	5	11	11	6	11	11	11
1710	0,989583	5	11	3	0	11	10	6	1728	1,000000	6	0	0	0	12	0	0

BLE II contenant les vîtesses dues à différentes hauteurs; les unes et les autres exprimées en pied de roi.

0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0000	0,7771	1,0990	1,3460	1,5542	1,7377	1,9036	2,0561	2,1980	2,3314
2,4575	2,5774	2,6920	2,8020	2,9077	3,0098	3,1085	3,2042	3,2971	3,3874
3,4754	3,5612	3,6450	3,7270	3,8071	3,8856	3,9626	4,0380	4,1121	4,1849
4,2565	4,3268	4,3961	4,4642	4,5314	4,5975	4,6627	4,7271	4,7905	4,8531
4,9149	4,9760	5,0363	5,0959	5,1548	5,2131	5,2707	5,3277	5,3841	5,4399
5,4951	5,5498	5,6039	5,6575	5,7107	5,7633	5,8156	5,8671	5,9184	5,9692
6,0196	6,0695	6,1191	6,1682	6,2170	6,2654	6,3134	6,3610	6,4083	6,4553
6,5019	6,5481	6,5941	6,6398	6,6851	6,7301	6,7748	6,8192	6,8634	6,9072
6,9508	6,9941	7,0371	7,0799	7,1224	7,1647	7,2067	7,2485	7,2901	7,3314
7,3725	7,4133	7,4539	7,4943	7,5345	7,5745	7,6142	7,6538	7,6931	7,7323
7,7712	7,8100	7,8485	7,8869	7,9251	7,9631	8,0010	8,0386	8,0761	8,1134
8,1505	8,1875	8,2243	8,2609	8,2974	8,3337	8,3699	8,4059	8,4417	8,4774
8,5130	8,5484	8,5836	8,6187	8,6537	8,6885	8,7232	8,7577	8,7921	8,8264
8,8606	8,8946	8,9285	8,9622	8,9958	9,0294	9,0627	9,0960	9,1291	9,1621
9,1950	9,2278	9,2605	9,2930	9,3255	9,3578	9,3900	9,4221	9,4541	9,4860
9,5178	9,5494	9,5810	9,6125	9,6439	9,6751	9,7063	9,7373	9,7683	9,7991
9,8299	9,8606	9,8912	9,9216	9,9520	9,9823	10,013	10,043	10,073	10,103
10,133	10,162	10,192	10,221	10,251	10,280	10,310	10,339	10,368	10,397
10,426	10,455	10,484	10,513	10,541	10,570	10,599	10,627	10,655	10,684
10,712	10,740	10,768	10,796	10,824	10,852	10,880	10,908	10,935	10,963
10,991	11,018	11,045	11,072	11,100	11,127	11,154	11,181	11,208	11,225
11,262	11,288	11,315	11,342	11,368	11,395	11,421	11,448	11,474	11,500
11,526	11,553	11,579	11,605	11,631	11,657	11,683	11,709	11,734	11,760
11,786	11,811	11,837	11,862	11,888	11,913	11,938	11,964	11,989	12,014
12,039	12,064	12,089	12,114	12,139	12,164	12,189	12,215	12,238	12,263
12,287	12,312	12,336	12,361	12,386	12,410	12,434	12,458	12,482	12,507
12,531	12,555	12,579	12,603	12,627	12,651	12,675	12,698	12,722	12,746
12,770	12,793	12,817	12,840	12,864	12,887	12,911	12,934	12,957	12,980
13,004	13,027	13,050	13,073	13,096	13,119	13,142	13,175	13,188	13,211
13,234	13,257	13,280	13,302	13,325	13,348	13,370	13,393	13,415	13,438
13,460	13,483	13,505	13,527	13,550	13,572	13,594	13,616	13,638	13,661
13,683	13,705	13,727	13,749	13,771	13,793	13,815	13,836	13,858	13,880
13,902	13,923	13,945	13,967	13,988	14,010	14,031	14,053	14,074	14,095
14,117	14,139	14,160	14,181	14,201	14,224	14,245	14,266	14,287	14,308
14,329	14,350	14,371	14,392	14,413	14,434	14,455	14,476	14,497	14,518
14,539	14,559	14,580	14,601	14,621	14,642	14,663	14,683	14,704	14,724
14,745	14,765	14,786	14,806	14,827	14,847	14,867	14,888	14,908	14,928
14,948	14,968	14,989	15,009	15,029	15,049	15,069	15,089	15,109	15,129
15,149	15,169	15,189	15,209	15,228	15,248	15,268	15,288	15,307	15,327
15,347	15,367	15,386	15,406	15,425	15,445	15,454	15,484	15,504	15,523
15,543	15,562	15,581	15,601	15,620	15,639	15,659	15,678	15,697	15,716
15,736	15,755	15,774	15,793	15,812	15,831	15,850	15,869	15,888	15,907
15,926	15,945	15,964	15,983	16,002	16,020	16,040	16,059	16,077	16,096
16,115	16,133	16,152	16,171	16,190	16,208	16,227	16,245	16,264	16,283
16,301	16,320	16,338	16,357	16,375	16,393	16,412	16,430	16,449	16,467
16,485	16,504	16,522	16,540	16,558	16,577	16,795	16,613	16,631	16,649
0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09

TABLE II contenant les vîtesses dues à différentes hauteurs; les unes et les autres exprimées en pied de roi.

Hauteur.	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
4,6	16,667	16,686	16,704	16,722	16,740	16,758	16,776	16,794	16,812	16,830
4,7	16,848	16,866	16,884	16,901	16,919	16,937	16,955	16,973	16,991	17,008
4,8	17,026	17,044	17,061	17,079	17,097	17,114	17,132	17,150	17,167	17,185
4,9	17,202	17,220	17,237	17,255	17,272	17,290	17,307	17,325	17,343	17,360
5,0	17,377	17,395	17,412	17,429	17,446	17,464	17,481	17,498	17,516	17,533
5,1	17,550	17,567	17,584	17,601	17,619	17,636	17,653	17,670	17,687	17,704
5,2	17,721	17,738	17,755	17,772	17,789	17,806	17,823	17,840	17,857	17,874
5,3	17,891	17,908	17,924	17,941	17,958	17,975	17,992	18,008	18,025	18,042
5,4	18,059	18,065	18,092	18,109	18,126	18,142	18,159	18,175	18,192	18,209
5,5	18,225	18,242	18,258	18,275	18,291	18,307	18,324	18,341	18,357	18,374
5,6	18,390	18,407	18,423	18,439	18,456	18,472	18,489	18,505	18,521	18,537
5,7	18,554	18,570	18,586	18,602	18,619	18,635	18,651	18,667	18,683	18,700
5,8	18,717	18,732	18,749	18,764	18,780	18,796	18,811	18,828	18,844	18,860
5,9	18,876	18,892	18,908	18,924	18,940	18,956	18,972	18,988	19,004	19,020
6,0	19,035	19,051	19,067	19,083	19,099	19,114	19,130	19,146	19,162	19,178
6,1	19,194	19,209	19,225	19,241	19,257	19,272	19,288	19,303	19,319	19,335
6,2	19,350	19,366	19,382	19,397	19,412	19,428	19,444	19,459	19,475	19,490
6,3	19,506	19,521	19,537	19,552	19,567	19,583	19,598	19,614	19,629	19,645
6,4	19,660	19,675	19,691	19,706	19,721	19,736	19,752	19,767	19,782	19,798
6,5	19,813	19,828	19,843	19,868	19,874	19,889	19,904	19,919	19,935	19,950
6,6	19,965	19,980	19,995	20,010	20,025	20,041	20,055	20,070	20,085	20,100
6,7	20,115	20,130	20,145	20,160	20,175	20,190	20,205	20,220	20,235	20,250
6,8	20,265	20,280	20,295	20,310	20,324	20,339	20,354	20,369	20,384	20,399
6,9	20,413	20,428	20,443	20,458	20,472	20,487	20,502	20,517	20,531	20,546
7,0	20,560	20,575	20,590	20,605	20,619	20,634	20,649	20,663	20,678	20,692
7,1	20,707	20,722	20,736	20,751	20,766	20,780	20,794	20,809	20,823	20,838
7,2	20,852	20,867	20,881	20,896	20,910	20,925	20,939	20,954	20,968	20,982
7,3	20,997	21,011	21,025	21,040	21,054	21,069	21,083	21,097	21,121	21,126
7,4	21,140	21,154	21,169	21,183	21,197	21,211	21,226	21,240	21,254	21,268
7,5	21,282	21,297	21,311	21,325	21,339	21,353	21,367	21,381	21,396	21,410
7,6	21,424	21,438	21,452	21,466	21,480	21,494	21,508	21,522	21,536	21,550
7,7	21,564	21,578	21,592	21,606	21,620	21,634	21,648	21,662	21,676	21,690
7,8	21,704	21,718	21,732	21,746	21,759	21,773	21,787	21,801	21,815	21,829
7,9	21,843	21,856	21,870	21,884	21,898	21,911	21,925	21,939	21,953	21,967
8,0	21,980	21,994	22,008	22,022	22,035	22,049	22,063	22,076	22,090	22,104
8,1	22,117	22,131	22,145	22,158	22,172	22,185	22,199	22,213	22,226	22,240
8,2	22,253	22,267	22,281	22,295	22,308	22,321	22,335	22,348	22,362	22,375
8,3	22,389	22,402	22,416	22,429	22,443	22,456	22,469	22,483	22,497	22,510
8,4	22,523	22,537	22,550	22,563	22,577	22,590	22,603	22,617	22,630	22,643
8,5	22,657	22,670	22,683	22,697	22,710	22,723	22,737	22,750	22,763	22,776
8,6	22,790	22,803	22,816	22,829	22,843	22,855	22,869	22,882	22,895	22,908
8,7	22,922	22,935	22,948	22,961	22,974	22,988	23,001	23,014	23,027	23,040
8,8	23,053	23,066	23,079	23,092	23,104	23,119	23,131	23,145	23,158	23,172
8,9	23,184	23,197	23,210	23,223	23,236	23,249	23,262	23,275	23,288	23,301
9,0	23,314	23,327	23,339	23,355	23,365	23,378	23,391	23,404	23,427	23,430
9,1	23,443	23,456	23,469	23,482	23,494	23,507	23,520	23,533	23,546	23,558
	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09

Digitized by Google

TABLE II contenant les vîtesses dues à différentes hauteurs; les unes et les autres exprimées en pied de roi.

Hauteur	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
9,2	23,571	23,585	23,597	23,610	23,622	23,635	23,648	23,661	23,673	23,686
9,3	23,699	23,712	23,725	23,737	23,750	23,763	23,775	23,788	23,801	23,813
9,4	23,826	23,839	23,851	23,864	23,877	23,889	23,902	23,915	23,927	23,940
9,5	23,953	23,965	23,978	23,990	24,003	24,015	24,028	24,040	24,053	24,066
9,6	24,078	24,091	24,103	24,116	24,128	24,141	24,153	24,166	24,178	24,191
9,7	24,203	24,216	24,228	24,241	24,253	24,266	24,278	24,291	24,303	24,315
9,8	24,328	24,340	24,353	24,365	24,377	24,390	24,402	24,415	24,427	24,439
9,9	24,451	24,464	24,476	24,489	24,501	24,513	24,526	24,538	24,550	24,563
10,0	24,575	24,587	24,599	24,612	24,624	24,636	24,648	24,661	24,673	24,685
10,1	24,697	24,709	24,722	24,734	24,746	24,758	24,771	24,783	24,795	24,807
10,2	24,819	24,832	24,844	24,856	24,868	24,880	24,892	24,904	24,916	24,929
10,3	24,940	24,953	24,965	24,977	24,989	25,001	25,013	25,025	25,037	25,049
10,4	25,062	25,074	25,086	25,098	25,110	25,122	25,134	25,146	25,158	25,170
10,5	25,182	25,194	25,206	25,218	25,230	25,242	25,254	25,265	25,277	25,289
10,6	25,301	25,313	25,325	25,337	25,349	25,361	25,373	25,385	25,397	25,408
10,7	25,420	25,432	25,444	25,456	25,468	25,480	25,491	25,503	25,515	25,528
10,8	25,539	25,551	25,562	25,574	25,586	25,598	25,610	25,621	25,633	25,645
10,9	25,657	25,669	25,680	25,692	25,703	25,716	25,727	25,739	25,751	25,763
11,0	25,774	25,786	25,798	25,809	25,821	25,833	25,844	25,856	25,868	25,880
11,1	25,891	25,903	25,915	25,926	25,938	25,949	25,961	25,973	25,984	25,996
11,2	26,007	26,019	26,031	26,042	26,054	26,065	26,077	26,089	26,100	26,112
11,3	26,123	26,135	26,147	26,158	26,170	26,181	26,193	26,204	26,216	26,227
11,4	26,239	26,250	26,262	26,273	26,285	26,296	26,308	26,319	26,331	26,342
11,5	26,353	26,365	26,377	26,388	26,399	26,411	26,422	26,434	26,445	26,456
11,6	26,468	26,479	26,491	26,502	26,513	26,525	26,536	26,547	26,559	26,570
11,7	26,582	26,593	26,604	26,616	26,627	26,638	26,650	26,661	26,672	26,684
11,8	26,695	26,706	26,718	26,729	26,740	26,751	26,763	26,774	26,785	26,797
11,9	26,808	26,819	26,830	26,842	26,853	26,864	26,875	26,887	26,898	26,909
12,0	26,920	26,932	26,943	26,954	26,965	26,976	26,988	26,999	27,010	27,021
12,1	27,032	27,043	27,055	27,066	27,077	27,088	27,099	27,110	27,121	27,133
12,2	27,144	27,155	27,166	27,177	27,188	27,199	27,210	27,222	27,233	27,244
12,3	27,255	27,266	27,277	27,288	27,299	27,310	27,321	27,332	27,343	27,354
12,4	27,365	27,376	27,387	27,398	27,409	27,420	27,431	27,442	27,453	27,465
12,5	27,476	27,486	27,497	27,508	27,519	27,530	27,541	27,552	27,563	27,574
12,6	27,585	27,596	27,607	27,618	27,629	27,640	27,651	27,662	27,673	27,684
12,7	27,694	27,705	27,716	27,727	27,738	27,749	27,760	27,771	27,782	27,792
12,8	27,803	27,814	27,825	27,836	27,847	27,858	27,868	27,879	27,890	27,901
12,9	27,912	27,923	27,933	27,944	27,955	27,966	27,976	27,987	27,998	28,009
13,0	28,020	28,030	28,041	28,052	28,063	28,073	28,084	28,095	28,106	28,116
13,1	28,127	28,138	28,149	28,159	28,170	28,181	28,191	28,202	28,213	28,224
13,2	28,234	28,245	28,256	28,266	28,277	28,288	28,298	28,309	28,320	28,330
13,3	28,341	28,352	28,362	28,373	28,383	28,394	28,405	28,415	28,426	28,437
13,4	28,447	28,458	28,468	28,479	28,490	28,500	28,511	28,522	28,532	28,543
13,5	28,553	28,564	28,574	28,585	28,595	28,606	28,617	28,627	28,638	28,648
13,6	28,659	28,669	28,680	28,690	28,701	28,712	28,722	28,733	28,743	28,754
13,7	28,764	28,775	28,785	28,796	28,806	28,817	28,827	28,837	28,848	28,858
	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09

Digitized by Google

TABLE II contenant les vîtesses dues à différentes hauteurs; les unes et les autres exprimées en pied de roi.

Hauteur.	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
13,8	28,869	28,879	28,890	28,900	28,911	28,922	28,932	28,942	28,952	28,963
13,9	28,973	28,984	28,994	29,005	29,015	29,025	29,036	29,046	29,056	29,067
14,0	29,077	29,088	29,098	29,108	29,119	29,129	29,139	29,150	29,160	29,171
14,1	29,181	29,191	29,202	29,212	29,222	29,233	29,243	29,253	29,263	29,274
14,2	29,284	29,295	29,305	29,315	29,325	29,336	29,346	29,356	29,367	29,377
14,3	29,387	29,397	29,408	29,418	29,428	29,438	29,449	29,459	29,469	29,480
14,4	29,490	29,500	29,510	29,520	29,531	29,541	29,551	29,561	29,572	29,582
14,5	29,592	29,602	29,612	29,623	29,633	29,643	29,653	29,663	29,673	29,684
14,6	29,694	29,704	29,714	29,724	29,735	29,745	29,755	29,765	29,775	29,785
14,7	29,795	29,805	29,816	29,826	29,836	29,846	29,856	29,866	29,876	29,886
14,8	29,897	29,907	29,917	29,927	29,937	29,947	29,957	29,967	29,977	29,987
14,9	29,997	30,007	30,018	30,028	30,038	30,048	30,058	30,068	30,078	30,088
15,0	30,098	30,108	30,118	30,128	30,138	30,148	30,158	30,168	30,178	30,188
15,1	30,198	30,208	30,218	30,228	30,238	30,248	30,258	30,268	30,278	30,288
15,2	30,298	30,308	30,318	30,328	30,338	30,348	30,358	30,368	30,378	30,388
15,3	30,398	30,407	30,417	30,427	30,437	30,447	30,457	30,467	30,477	30,487
15,4	30,497	30,507	30,517	30,527	30,536	30,546	30,556	30,566	30,576	30,586
15,5	30,595	30,605	30,615	30,625	30,635	30,645	30,655	30,665	30,674	30,684
15,6	30,694	30,704	30,714	30,723	30,733	30,743	30,753	30,763	30,773	30,782
15,7	30,792	30,802	30,812	30,822	30,831	30,841	30,851	30,861	30,871	30,880
15,8	30,890	30,900	30,910	30,920	30,929	30,939	30,949	30,958	30,968	30,978
15,9	30,988	30,997	31,007	31,017	31,027	31,037	31,046	31,056	31,065	31,075
16,0	31,085	31,095	31,104	31,114	31,124	31,133	31,143	31,153	31,163	31,172
16,1	31,182	31,192	31,201	31,211	31,221	31,230	31,240	31,250	31,259	31,269
16,2	31,279	31,288	31,298	31,307	31,317	31,327	31,336	31,346	31,356	31,366
16,3	31,375	31,385	31,394	31,404	31,414	31,423	31,433	31,442	31,452	31,461
16,4	31,471	31,481	31,490	31,500	31,510	31,519	31,529	31,538	31,548	31,558
16,5	31,567	31,576	31,586	31,596	31,605	31,615	31,624	31,634	31,643	31,653
16,6	31,662	31,672	31,682	31,691	31,700	31,710	31,720	31,729	31,739	31,748
16,7	31,758	31,767	31,777	31,786	31,796	31,805	31,815	31,824	31,834	31,843
16,8	31,853	31,862	31,872	31,881	31,891	31,900	31,909	31,919	31,928	31,938
16,9	31,947	31,957	31,966	31,975	31,985	31,994	32,004	32,014	32,023	32,032
17,0	32,042	32,051	32,060	32,070	32,079	32,089	32,098	32,107	32,117	32,126
17,1	32,136	32,145	32,155	32,164	32,173	32,183	32,192	32,201	32,211	32,220
17,2	32,230	32,239	32,248	32,258	32,267	32,276	32,286	32,295	32,305	32,314
17,3	32,323	32,332	32,342	32,351	32,361	32,370	32,379	32,388	32,398	32,407
17,4	32,416	32,426	32,435	32,444	32,454	32,463	32,472	32,482	32,491	32,500
17,5	32,509	32,519	32,528	32,537	32,546	32,556	32,565	32,574	32,583	32,593
17,6	32,602	32,611	32,621	32,630	32,639	32,649	32,658	32,667	32,676	32,686
17,7	32,695	32,704	32,713	32,722	32,732	32,741	32,750	32,759	32,768	32,778
17,8	32,787	32,796	32,805	32,815	32,824	32,833	32,842	32,851	32,861	32,870
17,9	32,879	32,888	32,897	32,906	32,916	32,925	32,934	32,943	32,952	32,961
18,0	32,970	32,980	32,989	32,998	33,007	33,016	33,025	33,034	33,044	33,053
18,1	33,062	33,071	33,081	33,089	33,098	33,108	33,117	33,126	33,135	33,144
18,2	33,153	33,162	33,172	33,181	33,190	33,199	33,208	33,217	33,226	33,235
18,3	33,244	33,253	33,262	33,272	33,280	33,289	33,299	33,308	33,317	33,326
	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09

Digitized by Google

TABLE II contenant les vîtesses dues à différentes hauteurs; les unes et les autres exprimées en pied de roi.

Hauteur.	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
18,4	33,335	33,344	33,353	33,362	33,371	33,380	33,389	33,398	33,407	33,416
18,5	33,425	33,434	33,444	33,452	33,461	33,470	33,479	33,488	33,498	33,506
18,6	33,515	33,525	33,533	33,543	33,552	33,561	33,570	33,579	33,587	33,596
18,7	33,606	33,614	33,624	33,632	33,641	33,651	33,660	33,668	33,677	33,686
18,8	33,695	33,704	33,713	33,722	33,731	33,740	33,749	33,758	33,767	33,776
18,9	33,785	33,794	33,803	33,812	33,820	33,830	33,838	33,847	33,856	33,865
19,0	33,874	33,883	33,892	33,901	33,910	33,918	33,927	33,936	33,945	33,954
19,1	33,963	33,972	33,981	33,990	33,999	34,008	34,016	34,025	34,034	34,043
19,2	34,052	34,061	34,070	34,078	34,087	34,096	34,105	34,114	34,123	34,132
19,3	34,140	34,149	34,158	34,167	34,176	34,185	34,194	34,202	34,211	34,220
19,4	34,229	34,238	34,246	34,255	34,264	34,273	34,282	34,290	34,299	34,308
19,5	34,317	34,325	34,334	34,343	34,352	34,361	34,370	34,378	34,387	34,396
19,6	34,405	34,413	34,422	34,431	34,440	34,449	34,457	34,466	34,475	34,484
19,7	34,492	34,501	34,510	34,519	34,528	34,536	34,545	34,554	34,562	34,571
19,8	34,580	34,589	34,597	34,606	34,615	34,623	34,632	34,641	34,649	34,658
19,9	34,667	34,676	34,685	34,693	34,702	34,711	34,719	34,728	34,737	34,745
20,0	34,753	34,763	34,772	34,780	34,789	34,797	34,806	34,815	34,823	34,832
	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09

Digitized by Google

TABLE III contenant les hauteurs dues à différentes vîtesses; les unes et les autres exprimées en pied de roi.

Vîtesse.	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001
0,1	0,0002	0,0002	0,0002	0,0003	0,0003	0,0004	0,0004	0,0005	0,0005	0,0006
0,2	0,0007	0,0007	0,0008	0,0009	0,0009	0,0010	0,0011	0,0012	0,0013	0,0014
0,3	0,0015	0,0016	0,0017	0,0018	0,0019	0,0020	0,0021	0,0023	0,0024	0,0025
0,4	0,0026	0,0028	0,0029	0,0031	0,0032	0,0033	0,0035	0,0036	0,0038	0,0040
0,5	0,0041	0,0043	0,0045	0,0046	0,0048	0,0050	0,0052	0,0054	0,0056	0,0058
0,6	0,0060	0,0062	0,0064	0,0066	0,0068	0,0070	0,0072	0,0074	0,0076	0,0079
0,7	0,0081	0,0083	0,0086	0,0088	0,0091	0,0093	0,0096	0,0098	0,0100	0,0103
0,8	0,0106	0,0109	0,0111	0,0114	0,0117	0,0119	0,0122	0,0125	0,0128	0,0131
0,9	0,0134	0,0137	0,0140	0,0143	0,0146	0,0149	0,0153	0,0156	0,0159	0,0162
1,0	0,0165	0,0169	0,0172	0,0176	0,0179	0,0182	0,0186	0,0189	0,0193	0,0197
1,1	0,0200	0,0204	0,0208	0,0211	0,0215	0,0219	0,0223	0,0227	0,0230	0,0234
1,2	0,0238	0,0242	0,0246	0,0250	0,0255	0,0259	0,0263	0,0267	0,0271	0,0275
1,3	0,0279	0,0284	0,0288	0,0293	0,0298	0,0302	0,0306	0,0311	0,0315	0,0320
1,4	0,0324	0,0329	0,0334	0,0339	0,0343	0,0348	0,0353	0,0358	0,0363	0,0368
1,5	0,0372	0,0377	0,0382	0,0388	0,0393	0,0398	0,0403	0,0408	0,0413	0,0419
1,6	0,0424	0,0429	0,0434	0,0440	0,0445	0,0450	0,0456	0,0462	0,0467	0,0473
1,7	0,0478	0,0484	0,0490	0,0495	0,0501	0,0507	0,0513	0,0519	0,0525	0,0530
1,8	0,0536	0,0542	0,0548	0,0554	0,0561	0,0567	0,0573	0,0579	0,0585	0,0591
1,9	0,0598	0,0604	0,0610	0,0617	0,0623	0,0630	0,0636	0,0643	0,0649	0,0656
2,0	0,0662	0,0669	0,0676	0,0682	0,0689	0,0696	0,0703	0,0709	0,0716	0,0723
2,1	0,0730	0,0737	0,0744	0,0751	0,0758	0,0765	0,0772	0,0780	0,0787	0,0794
2,2	0,0801	0,0809	0,0816	0,0823	0,0831	0,0838	0,0846	0,0853	0,0861	0,0868
2,3	0,0876	0,0883	0,0891	0,0899	0,0907	0,0914	0,0922	0,0930	0,0938	0,0946
2,4	0,0954	0,0962	0,0970	0,0978	0,0986	0,0994	0,1002	0,1010	0,1018	0,1027
2,5	0,1035	0,1043	0,1052	0,1060	0,1068	0,1077	0,1085	0,1094	0,1102	0,1111
2,6	0,1119	0,1128	0,1139	0,1143	0,1154	0,1163	0,1172	0,1180	0,1189	0,1198
2,7	0,1207	0,1216	0,1225	0,1234	0,1243	0,1252	0,1261	0,1270	0,1280	0,1289
2,8	0,1298	0,1307	0,1317	0,1326	0,1335	0,1345	0,1354	0,1364	0,1370	0,1383
2,9	0,1393	0,1402	0,1412	0,1421	0,1431	0,1441	0,1451	0,1461	0,1470	0,1480
3,0	0,1490	0,1500	0,1510	0,1520	0,1530	0,1540	0,1550	0,1561	0,1571	0,1581
3,1	0,1591	0,1602	0,1612	0,1622	0,1632	0,1643	0,1653	0,1664	0,1674	0,1685
3,2	0,1695	0,1706	0,1717	0,1727	0,1738	0,1749	0,1760	0,1771	0,1781	0,1792
3,3	0,1803	0,1814	0,1825	0,1836	0,1847	0,1858	0,1869	0,1880	0,1892	0,1903
3,4	0,1914	0,1925	0,1937	0,1948	0,1959	0,1971	0,1982	0,1994	0,2005	0,2017
3,5	0,2028	0,2040	0,2052	0,2063	0,2075	0,2088	0,2099	0,2110	0,2122	0,2134
3,6	0,2146	0,2158	0,2170	0,2182	0,2194	0,2206	0,2218	0,2230	0,2242	0,2255
3,7	0,2266	0,2279	0,2291	0,2304	0,2316	0,2328	0,2341	0,2353	0,2366	0,2378
3,8	0,2391	0,2404	0,2416	0,2429	0,2442	0,2454	0,2467	0,2480	0,2493	0,2506
3,9	0,2518	0,2531	0,2544	0,2557	0,2570	0,2583	0,2597	0,2610	0,2623	0,2636
4,0	0,2649	0,2663	0,2670	0,2689	0,2703	0,2716	0,2729	0,2743	0,2756	0,2770
4,1	0,2783	0,2797	0,2811	0,2824	0,2838	0,2852	0,2865	0,2879	0,2893	0,2907
4,2	0,2921	0,2935	0,2949	0,2963	0,2977	0,2991	0,3005	0,3019	0,3033	0,3047
4,3	0,3062	0,3076	0,3090	0,3104	0,3119	0,3133	0,3148	0,3162	0,3177	0,3191
4,4	0,3206	0,3220	0,3235	0,3249	0,3264	0,3279	0,3294	0,3308	0,3323	0,3338
4,5	0,3353	0,3368	0,3383	0,3398	0,3413	0,3428	0,3443	0,3458	0,3473	0,3489
	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09

Digitized by Google

TABLE III contenant les hauteurs dues à différentes vitesses; les unes et les autres exprimées en pied de roi.

Vitesse.	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
4,6	0,3504	0,3519	0,3534	0,3550	0,3565	0,3580	0,3596	0,3611	0,3629	0,3642
4,7	0,3658	0,3673	0,3689	0,3705	0,3720	0,3736	0,3752	0,3767	0,3783	0,3799
4,8	0,3815	0,3831	0,3847	0,3863	0,3879	0,3895	0,3911	0,3927	0,3943	0,3959
4,9	0,3976	0,3992	0,4008	0,4024	0,4041	0,4057	0,4074	0,4090	0,4107	0,4123
5,0	0,4140	0,4156	0,4173	0,4189	0,4206	0,4223	0,4240	0,4256	0,4273	0,4290
5,1	0,4317	0,4324	0,4341	0,4358	0,4375	0,4391	0,4409	0,4426	0,4443	0,4460
5,2	0,4477	0,4495	0,4512	0,4529	0,4547	0,4564	0,4581	0,4599	0,4616	0,4634
5,3	0,4651	0,4669	0,4686	0,4704	0,4722	0,4739	0,4757	0,4775	0,4793	0,4811
5,4	0,4828	0,4846	0,4864	0,4882	0,4900	0,4918	0,4936	0,4954	0,4973	0,4996
5,5	0,5008	0,5027	0,5045	0,5064	0,5082	0,5100	0,5119	0,5137	0,5156	0,5174
5,6	0,5193	0,5211	0,5230	0,5248	0,5267	0,5286	0,5305	0,5323	0,5342	0,5361
5,7	0,5380	0,5399	0,5418	0,5437	0,5457	0,5475	0,5494	0,5513	0,5532	0,5551
5,8	0,5570	0,5589	0,5609	0,5628	0,5647	0,5667	0,5686	0,5705	0,5725	0,5744
5,9	0,5764	0,5784	0,5803	0,5823	0,5842	0,5862	0,5882	0,5902	0,5921	0,5941
6,0	0,5961	0,5981	0,6001	0,6021	0,6041	0,6061	0,6081	0,6101	0,6121	0,6141
6,1	0,6161	0,6182	0,6202	0,6222	0,6242	0,6263	0,6283	0,6304	0,6324	0,6345
6,2	0,6365	0,6386	0,6406	0,6427	0,6447	0,6468	0,6489	0,6509	0,6530	0,6551
6,3	0,6572	0,6593	0,6614	0,6635	0,6656	0,6677	0,6698	0,6719	0,6740	0,6761
6,4	0,6782	0,6804	0,6825	0,6846	0,6867	0,6889	0,6910	0,6931	0,6953	0,6974
6,5	0,6996	0,7017	0,7039	0,7061	0,7082	0,7104	0,7126	0,7147	0,7169	0,7191
6,6	0,7213	0,7235	0,7257	0,7279	0,7301	0,7323	0,7345	0,7366	0,7389	0,7411
6,7	0,7433	0,7455	0,7477	0,7499	0,7522	0,7544	0,7567	0,7589	0,7612	0,7634
6,8	0,7657	0,7679	0,7702	0,7724	0,7747	0,7770	0,7792	0,7815	0,7838	0,7861
6,9	0,7883	0,7906	0,7929	0,7952	0,7975	0,7998	0,8021	0,8044	0,8067	0,8090
7,0	0,8114	0,8137	0,8160	0,8183	0,8207	0,8230	0,8253	0,8277	0,8300	0,8324
7,1	0,8347	0,8371	0,8394	0,8418	0,8441	0,8465	0,8490	0,8512	0,8536	0,8560
7,2	0,8584	0,8608	0,8632	0,8656	0,8680	0,8704	0,8728	0,8752	0,8776	0,8800
7,3	0,8824	0,8848	0,8872	0,8897	0,8925	0,8945	0,8970	0,8994	0,9018	0,9043
7,4	0,9067	0,9092	0,9116	0,9141	0,9166	0,9190	0,9215	0,9240	0,9264	0,9289
7,5	0,9314	0,9339	0,9364	0,9389	0,9414	0,9439	0,9464	0,9489	0,9514	0,9539
7,6	0,9564	0,9589	0,9615	0,9640	0,9665	0,9690	0,9716	0,9741	0,9767	0,9792
7,7	0,9817	0,9843	0,9869	0,9894	0,9920	0,9945	0,9971	0,9997	1,0022	1,0048
7,8	1,0074	1,0100	1,0126	1,0152	1,0178	1,0204	1,0230	1,0256	1,0282	1,0308
7,9	1,0334	1,0360	1,0387	1,0413	1,0439	1,0465	1,0492	1,0518	1,0545	1,0571
8,0	1,0597	1,0624	1,0650	1,0677	1,0704	1,0730	1,0757	1,0784	1,0810	1,0837
8,1	1,0864	1,0891	1,0918	1,0945	1,0972	1,0999	1,1026	1,1053	1,1080	1,1107
8,2	1,1134	1,1161	1,1188	1,1216	1,1243	1,1270	1,1297	1,1325	1,1352	1,1380
8,3	1,1407	1,1435	1,1462	1,1490	1,1517	1,1545	1,1573	1,1601	1,1628	1,1656
8,4	1,1684	1,1712	1,1739	1,1768	1,1795	1,1823	1,1851	1,1879	1,1907	1,1935
8,5	1,1963	1,1992	1,2020	1,2408	1,2076	1,2105	1,2133	1,2161	1,2189	1,2218
8,6	1,2247	1,2275	1,2304	1,2332	1,2361	1,2389	1,2418	1,2447	1,2476	1,2505
8,7	1,2533	1,2562	1,2591	1,2620	1,2649	1,2678	1,2707	1,2736	1,2765	1,2793
8,8	1,2823	1,2852	1,2882	1,2911	1,2940	1,2969	1,2998	1,3028	1,3057	1,3087
8,9	1,3116	1,3145	1,3175	1,3205	1,3234	1,3264	1,3293	1,3323	1,3353	1,3383
9,0	1,3412	1,3442	1,3472	1,3502	1,3532	1,3562	1,3592	1,3622	1,3652	1,3682
9,1	1,3712	1,3742	1,3773	1,3803	1,3833	1,3863	1,3893	1,3924	1,3954	1,3985
	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09

Digitized by Google

TABLE III contenant les hauteurs dues à différentes vîtesses; les unes et les autres exprimées en pied de roi.

Vîtesse.	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
9,2	1,4015	1,4045	1,4076	1,4107	1,4137	1,4168	1,4199	1,4229	1,4260	1,4291
9,3	1,4321	1,4352	1,4383	1,4414	1,4445	1,4476	1,4507	1,4538	1,4569	1,4600
9,4	1,4631	1,4662	1,4693	1,4725	1,4756	1,4787	1,4818	1,4850	1,4881	1,4913
9,5	1,4944	1,4976	1,5007	1,5038	1,5070	1,5102	1,5133	1,5165	1,5197	1,5228
9,6	1,5260	1,5292	1,5324	1,5356	1,5388	1,5420	1,5452	1,5484	1,5516	1,5547
9,7	1,5580	1,5612	1,5644	1,5676	1,5708	1,5741	1,5773	1,5805	1,5838	1,5870
9,8	1,5903	1,5935	1,5968	1,6000	1,6033	1,6066	1,6098	1,6131	1,6163	1,6196
9,9	1,6229	1,6262	1,6295	1,6327	1,6360	1,6393	1,6426	1,6459	1,6492	1,6525
10,0	1,6559	1,6592	1,6625	1,6658	1,6691	1,6724	1,6758	1,6791	1,6825	1,6858
10,1	1,6892	1,6925	1,6958	1,6992	1,7025	1,7059	1,7092	1,7126	1,7160	1,7194
10,2	1,7228	1,7261	1,7295	1,7329	1,7363	1,7397	1,7431	1,7465	1,7499	1,7533
10,3	1,7567	1,7601	1,7635	1,7669	1,7704	1,7738	1,7772	1,7806	1,7841	1,7875
10,4	1,7910	1,7944	1,7979	1,8013	1,8048	1,8082	1,8117	1,8152	1,8186	1,8221
10,5	1,8256	1,8290	1,8325	1,8360	1,8395	1,8430	1,8465	1,8500	1,8535	1,8570
10,6	1,8605	1,8640	1,8675	1,8711	1,8746	1,8781	1,8816	1,8852	1,8887	1,8922
10,7	1,8958	1,8993	1,9019	1,9064	1,9100	1,9135	1,9171	1,9207	1,9242	1,9278
10,8	1,9314	1,9350	1,9385	1,9421	1,9457	1,9493	1,9529	1,9565	1,9601	1,9637
10,9	1,9673	1,9709	1,9745	1,9782	1,9818	1,9854	1,9890	1,9927	1,9963	1,9999
11,0	2,0036	2,0072	2,0109	2,0145	2,0182	2,0218	2,0255	2,0291	2,0328	2,0365
11,1	2,0402	2,0438	2,0475	2,0512	2,0549	2,0586	2,0623	2,0660	2,0697	2,0734
11,2	2,0771	2,0808	2,0845	2,0882	2,0920	2,0957	2,0994	2,1031	2,1069	2,1106
11,3	2,1143	2,1181	2,1218	2,1256	2,1293	2,1331	2,1369	2,1406	2,1444	2,1482
11,4	2,1519	2,1557	2,1595	2,1633	2,1671	2,1709	2,1747	2,1784	2,1822	2,1861
11,5	2,1899	2,1937	2,1975	2,2013	2,2061	2,2089	2,2128	2,2166	2,2204	2,2243
11,6	2,2281	2,2319	2,2358	2,2397	2,2435	2,2474	2,2512	2,2551	2,2589	2,2628
11,7	2,2667	2,2706	2,2745	2,2783	2,2822	2,2861	2,2900	2,2939	2,2978	2,3017
11,8	2,3056	2,3095	2,3134	2,3173	2,3213	2,3252	2,3291	2,3330	2,3370	2,3409
11,9	2,3448	2,3488	2,3527	2,3567	2,3606	2,3646	2,3685	2,3725	2,3765	2,3805
12,0	2,3844	2,3884	2,3924	2,3964	2,4004	2,4043	2,4083	2,4123	2,4163	2,4203
12,1	2,4243	2,4283	2,4323	2,4364	2,4404	2,4444	2,4484	2,4525	2,4565	2,4605
12,2	2,4646	2,4686	2,4727	2,4767	2,4808	2,4848	2,4889	2,4929	2,4970	2,5011
12,3	2,5051	2,5092	2,5133	2,5174	2,5215	2,5255	2,5296	2,5337	2,5378	2,5419
12,4	2,5460	2,5501	2,5542	2,5584	2,5625	2,5666	2,5707	2,5748	2,5790	2,5831
12,5	2,5873	2,5914	2,5955	2,5997	2,6039	2,6080	2,6122	2,6163	2,6205	2,6247
12,6	2,6288	2,6330	2,6372	2,6414	2,6456	2,6497	2,6539	2,6581	2,6623	2,6665
12,7	2,6707	2,6749	2,6791	2,6834	2,6876	2,6918	2,6960	2,7003	2,7045	2,7087
12,8	2,7130	2,7172	2,7214	2,7257	2,7299	2,7342	2,7385	2,7427	2,7470	2,7512
12,9	2,7555	2,7598	2,7641	2,7683	2,7726	2,7769	2,7812	2,7855	2,7898	2,7941
13,0	2,7984	2,8027	2,8070	2,8113	2,8156	2,8200	2,8243	2,8285	2,8329	2,8373
13,1	2,8416	2,8459	2,8503	2,8546	2,8590	2,8634	2,8677	2,8721	2,8764	2,8808
13,2	2,8851	2,8895	2,8939	2,8983	2,9027	2,9070	2,9114	2,9158	2,9202	2,9246
13,3	2,9290	2,9334	2,9378	2,9423	2,9457	2,9511	2,9555	2,9599	2,9644	2,9688
13,4	2,9733	2,9777	2,9821	2,9866	2,9910	2,9955	2,9999	3,0044	3,0089	3,0133
13,5	3,0178	3,0223	3,0267	3,0312	3,0357	3,0402	3,0447	3,0492	3,0537	3,0581
13,6	3,0626	3,0672	3,0717	3,0762	3,0807	3,0852	3,0897	3,0942	3,0988	3,1033
13,7	3,1079	3,1124	3,1169	3,1215	3,1260	3,1306	3,1351	3,1397	3,1443	3,1488
	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09

TABLE III contenant les hauteurs dues à différentes vîtesses; les unes et les autres exprimées en pied de roi.

Vîtesse.	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
13,8	3,1534	3,1580	3,1625	3,1671	3,1717	3,1763	3,1809	3,1855	3,1901	3,1947
13,9	3,1993	3,2039	3,2085	3,2131	3,2177	3,2223	3,2170	3,2316	3,2362	3,2408
14,0	3,2455	3,2501	3,2547	3,2594	3,2640	3,2687	3,2734	3,2780	3,2827	3,2874
14,1	3,2920	3,2967	3,3013	3,3060	3,3107	3,3154	3,3201	3,3248	3,3295	3,3342
14,2	3,3388	3,3435	3,3483	3,3530	3,3577	3,3624	3,3671	3,3718	3,3766	3,3813
14,3	3,3861	3,3908	3,3955	3,4003	3,4050	3,4098	3,4145	3,4193	3,4240	3,4288
14,4	3,4336	3,4383	3,4431	3,4479	3,4527	3,4575	3,4622	3,4670	3,4718	3,4765
14,5	3,4814	3,4862	3,4910	3,4959	3,5007	3,5055	3,5103	3,5151	3,5199	3,5248
14,6	3,5296	3,5345	3,5393	3,5442	3,5490	3,5538	3,5587	3,5636	3,5684	3,5733
14,7	3,5781	3,5830	3,5879	3,5927	3,5976	3,6025	3,6074	3,6123	3,6171	3,6221
14,8	3,6270	3,6319	3,6368	3,6417	3,6466	3,6515	3,6565	3,6614	3,6663	3,6712
14,9	3,6762	3,6811	3,6860	3,6910	3,6961	3,7009	3,7058	3,7108	3,7157	3,7207
15,0	3,7257	3,7306	3,7356	3,7406	3,7456	3,7506	3,7556	3,7605	3,7655	3,7705
15,1	3,7755	3,7805	3,7855	3,7905	3,7955	3,8007	3,8056	3,8106	3,8156	3,8206
15,2	3,8256	3,8306	3,8357	3,8408	3,8458	3,8509	3,8559	3,8610	3,8660	3,8711
15,3	3,8762	3,8813	3,8863	3,8905	3,8965	3,9015	3,9066	3,9117	3,9168	3,9219
15,4	3,9270	3,9321	3,9372	3,9423	3,9474	3,9525	3,9576	3,9628	3,9679	3,9731
15,5	3,9782	3,9833	3,9885	3,9936	3,9988	4,0039	4,0090	4,0142	4,0193	4,0245
15,6	4,0297	4,0349	4,0400	4,0452	4,0504	4,0555	4,0607	4,0659	4,0711	4,0763
15,7	4,0815	4,0867	4,0920	4,0971	4,1023	4,1076	4,1128	4,1180	4,1232	4,1284
15,8	4,1337	4,1389	4,1441	4,1494	4,1546	4,1598	4,1651	4,1704	4,1757	4,1809
15,9	4,1861	4,1914	4,1967	4,2020	4,2072	4,2125	4,2178	4,2231	4,2274	4,2337
16,0	4,2400	4,2443	4,2496	4,2549	4,2602	4,2655	4,2699	4,2762	4,2815	4,2868
16,1	4,2921	4,2965	4,3028	4,3081	4,3135	4,3188	4,3242	4,3296	4,3349	4,3403
16,2	4,3456	4,3510	4,3564	4,3617	4,3671	4,3725	4,3779	4,3832	4,3886	4,3940
16,3	4,3994	4,4048	4,4103	4,4157	4,4211	4,4265	4,4319	4,4373	4,4427	4,4481
16,4	4,4536	4,4590	4,4644	4,4699	4,4753	4,4808	4,4862	4,4916	4,4971	4,5026
16,5	4,5080	4,5135	4,5190	4,5245	4,5299	4,5354	4,5409	4,5464	4,5519	4,5574
16,6	4,5629	4,5684	4,5739	4,5794	4,5849	4,5904	4,5959	4,6014	4,6070	4,6125
16,7	4,6180	4,6235	4,6290	4,6346	4,6402	4,6457	4,6502	4,6568	4,6623	4,6679
16,8	4,6734	4,6790	4,6846	4,6902	4,6958	4,7003	4,7069	4,7125	4,7181	4,7237
16,9	4,7293	4,7349	4,7405	4,7461	4,7517	4,7573	4,7629	4,7685	4,7741	4,7798
17,0	4,7854	4,7910	4,7967	4,8023	4,8080	4,8136	4,8192	4,8249	4,8305	4,8362
17,1	4,8419	4,8476	4,8532	4,8589	4,8646	4,8702	4,8759	4,8816	4,8873	4,8930
17,2	4,8987	4,9044	4,9101	4,9158	4,9215	4,9272	4,9329	4,9386	4,9443	4,9501
17,3	4,9558	4,9615	4,9673	4,9730	4,9787	4,9845	4,9902	4,9960	5,0017	5,0075
17,4	5,0132	5,0190	5,0248	5,0306	5,0363	5,0421	5,0479	5,0537	5,0595	5,0653
17,5	5,0710	5,0768	5,0826	5,0884	5,0942	5,1001	5,1059	5,1117	5,1175	5,1233
17,6	5,1292	5,1350	5,1408	5,1467	5,1525	5,1583	5,1642	5,1700	5,1759	5,1817
17,7	5,1876	5,1935	5,1994	5,2052	5,2111	5,2170	5,2228	5,2287	5,2346	5,2405
17,8	5,2464	5,2523	5,2582	5,2641	5,2700	5,2759	5,2818	5,2877	5,2937	5,2996
17,9	5,3055	5,3114	5,3174	5,3233	5,3292	5,3352	5,3411	5,3471	5,3530	5,3590
18,0	5,3649	5,3709	5,3769	5,3829	5,3888	5,3948	5,4008	5,4068	5,4127	5,4187
18,1	5,4247	5,4307	5,4367	5,4427	5,4487	5,4548	5,4608	5,4668	5,4728	5,4788
18,2	5,4848	5,4909	5,4969	5,5029	5,5090	5,5150	5,5211	5,5271	5,5332	5,5392
18,3	5,5453	5,5513	5,5574	5,5635	5,5695	5,5756	5,5817	5,5878	5,5939	5,5999
	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09

Digitized by Google

TABLE III contenant les hauteurs dues à différentes vîtesses; les unes et les autres exprimées en pied de roi.

Vîtesse.	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
18,4	5,6060	5,6121	5,6182	5,6243	5,6304	5,6366	5,6427	5,6488	5,6549	5,6610
18,5	5,6671	5,6733	5,6794	5,6855	5,6917	5,6978	5,7040	5,7101	5,7163	5,7224
18,6	5,7286	5,7347	5,7409	5,7471	5,7533	5,7594	5,7656	5,7718	5,7780	5,7842
18,7	5,7903	5,7965	5,8027	5,8089	5,8151	5,8213	5,8276	5,8338	5,8400	5,8462
18,8	5,8524	5,8586	5,8649	5,8711	5,8774	5,8836	5,8898	5,8961	5,9023	5,9086
18,9	5,9149	5,9211	5,9774	5,9337	5,9400	5,9462	5,9525	5,9587	5,9650	5,9713
19,0	5,9776	5,9839	5,9902	5,9965	6,0028	6,0091	6,0154	6,0217	6,0280	6,0344
19,1	6,0407	6,0470	6,0534	6,0597	6,0660	6,0724	6,0787	6,0850	6,0914	6,0978
19,2	6,1041	6,1105	6,1168	6,1232	6,1296	6,1360	6,1423	6,1487	6,1551	6,1615
19,3	6,1679	6,1743	6,1807	6,1871	6,1935	6,1999	6,2063	6,2127	6,2291	6,2255
19,4	6,2320	6,2384	6,2448	6,2512	6,2577	6,2641	6,2706	6,2770	6,2834	6,2899
19,5	6,2964	6,3028	6,3093	6,3158	6,3222	6,3287	6,3352	6,3417	6,3481	6,3546
19,6	6,3611	6,3676	6,3741	6,3806	6,3871	6,3936	6,4001	6,4066	6,4142	6,4197
19,7	6,4262	6,4327	6,4393	6,4458	6,4523	6,4588	6,4654	6,4719	6,4785	6,4850
19,8	6,4916	6,4981	6,5047	6,5113	6,5179	6,5244	6,5310	6,5376	6,5442	6,5507
19,9	6,5573	6,5639	6,5705	6,5771	6,5837	6,5903	6,5969	6,6035	6,6102	6,6168
20,0	6,6234	6,6300	6,6366	6,6433	6,6499	6,6566	6,6632	6,6698	6,6765	6,6832
20,1	6,6898	6,6964	6,7031	6,7098	6,7164	6,7231	6,7298	6,7365	6,7432	6,7498
20,2	6,7665	6,7632	6,7699	6,7766	6,7833	6,7900	6,7967	6,8034	6,8102	6,8169
20,3	6,8236	6,8303	6,8370	6,8438	6,8505	6,8572	6,8640	6,8707	6,8775	6,8842
20,4	6,8910	6,8977	6,9045	6,9113	6,9180	6,9248	6,9316	6,9384	6,9452	6,9519
20,5	6,9587	6,9655	6,9723	6,9791	6,9859	6,9927	6,9995	7,0063	7,0131	7,0199
20,6	7,0268	7,0336	7,0404	7,0473	7,0541	7,0609	7,0678	7,0746	7,0815	7,0883
20,7	7,0952	7,1020	7,1089	7,1157	7,1226	7,1293	7,1363	7,1432	7,1501	7,1570
20,8	7,1639	7,1707	7,1777	7,1845	7,1914	7,1983	7,2053	7,2122	7,2191	7,2260
20,9	7,2329	7,2398	7,2468	7,2537	7,2606	7,2675	7,2745	7,2814	7,2884	7,2953
21,0	7,3023	7,3093	7,3162	7,3232	7,3302	7,3371	7,3441	7,3511	7,3581	7,3650
21,1	7,3720	7,3790	7,3860	7,3930	7,4000	7,4070	7,4140	7,4210	7,4280	7,4350
21,2	7,4421	7,4491	7,4561	7,4631	7,4701	7,4772	7,4842	7,4913	7,4983	7,5054
21,3	7,5124	7,5195	7,5265	7,5336	7,5407	7,5477	7,5548	7,5619	7,5690	7,5760
21,4	7,5831	7,5902	7,5973	7,6044	7,6115	7,6186	7,6257	7,6328	7,6399	7,6470
21,5	7,6542	7,6613	7,6684	7,6755	7,6827	7,6898	7,6969	7,7041	7,7112	7,7184
21,6	7,7255	7,7327	7,7399	7,7470	7,7542	7,7613	7,7685	7,7757	7,7829	7,7900
21,7	7,7972	7,8044	7,8116	7,8188	7,8260	7,8332	7,8404	7,8476	7,8548	7,8620
21,8	7,8693	7,8765	7,8837	7,8909	7,8981	7,9054	7,9126	7,9199	7,9272	7,9344
21,9	7,9416	7,9489	7,9561	7,9634	7,9706	7,9779	7,9852	7,9925	7,9997	8,0070
22,0	8,0143	8,0211	8,0289	8,0362	8,0435	8,0508	8,0581	8,0654	8,0727	8,0800
22,1	8,0873	8,0947	8,1020	8,1093	8,1166	8,1239	8,1313	8,1387	8,1460	8,1533
22,2	8,1607	8,1680	8,1754	8,1828	8,1901	8,1975	8,2049	8,2122	8,2196	8,2270
22,3	8,2344	8,2417	8,2491	8,2565	8,2639	8,2713	8,2787	8,2881	8,2956	8,3010
22,4	8,3084	8,3158	8,3232	8,3306	8,3381	8,3455	8,3530	8,3604	8,3678	8,3752
22,5	8,3827	8,3902	8,3976	8,4051	8,4126	8,4200	8,4275	8,4350	8,4425	8,4499
22,6	8,4574	8,4649	8,4724	8,4799	8,4874	8,4949	8,5024	8,5099	8,5174	8,5249
22,7	8,5324	8,5399	8,5475	8,5550	8,5525	8,5701	8,5776	8,5852	8,5927	8,6002
22,8	8,6078	8,6153	8,6229	8,6304	8,6380	8,6456	8,6531	8,6667	8,6683	8,6759
22,9	8,6834	8,6910	8,6986	8,7062	8,7138	8,7214	8,7290	8,7366	8,7442	8,7518
	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09

Digitized by Google

BLE III contenant les hauteurs dues à différentes vîtesses; les unes et les autres exprimées en pied de roi.

0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
8,7594	8,7671	8,7747	8,7823	8,7899	8,7976	8,8052	8,8128	8,8205	8,8281
8,8358	8,8434	8,8511	8,8587	8,8664	8,8741	8,8817	8,8892	8,8971	8,9048
8,9124	8,9201	8,9278	8,9355	8,9432	8,9509	8,9586	8,9663	8,9740	8,9817
8,9894	8,9972	9,0049	9,0126	9,0203	9,0281	9,0358	9,0435	9,0513	9,0590
9,0668	9,0745	9,0823	9,0900	9,0978	9,1056	9,1133	9,1211	9,1289	9,1366
9,1444	9,1522	9,1600	9,1678	9,1756	9,1834	9,1912	9,1990	9,2068	9,2146
9,2224	9,2303	9,2381	9,2459	9,2537	9,2615	9,2693	9,2772	9,2850	9,2929
9,3007	9,3086	9,3165	9,3243	9,3322	9,3400	9,3479	9,3558	9,3636	9,3715
9,3794	9,3873	9,3952	9,4030	9,4109	9,4188	9,4267	9,4346	9,4425	9,4505
9,4584	9,4663	9,4742	9,4821	9,4900	9,4980	9,5059	9,5138	9,5218	9,5298
9,5377	9,5456	9,5536	9,5615	9,5695	9,5775	9,5854	9,5934	9,6014	9,6093
9,6173	9,6253	9,6333	9,6413	9,6493	9,6573	9,6653	9,6733	9,6813	9,6893
9,6973	9,7053	9,7133	9,7214	9,7294	9,7374	9,7455	9,7535	9,7615	9,7696
9,7776	9,7857	9,7937	9,8018	9,8098	9,8179	9,8260	9,8340	9,8421	9,8502
9,8583	9,8664	9,8744	9,8825	9,8906	9,8987	9,9068	9,9149	9,9230	9,9311
9,9392	9,9473	9,9555	9,9636	9,9717	9,9798	9,9880	9,9961	10,004	10,012
10,021	10,029	10,037	10,045	10,053	10,061	10,070	10,078	10,086	10,094
10,102	10,110	10,119	10,127	10,135	10,143	10,151	10,159	10,168	10,176
10,184	10,192	10,201	10,209	10,217	10,225	10,233	10,242	10,250	10,258
10,266	10,275	10,282	10,291	10,299	10,308	10,316	10,324	10,332	10,341
10,349	10,357	10,366	10,374	10,382	10,391	10,399	10,407	10,416	10,424
10,432	10,440	10,448	10,457	10,465	10,473	10,482	10,490	10,499	10,507
10,516	10,524	10,532	10,540	10,549	10,557	10,566	10,574	10,582	10,591
10,599	10,607	10,616	10,624	10,633	10,641	10,649	10,658	10,666	10,675
10,683	10,691	10,700	10,708	10,716	10,725	10,733	10,742	10,750	10,759
10,767	10,776	10,784	10,793	10,801	10,810	10,818	10,826	10,835	10,843
10,852	10,860	10,869	10,877	10,886	10,894	10,903	10,911	10,920	10,928
10,937	10,945	10,954	10,962	10,971	10,979	10,988	10,996	11,005	11,013
11,022	11,031	11,039	11,048	11,056	11,066	11,074	11,082	11,090	11,099
11,108	11,116	11,125	11,133	11,142	11,151	11,159	11,168	11,176	11,185
11,194	11,202	11,211	11,219	11,228	11,237	11,245	11,254	11,263	11,271
11,280	11,288	11,297	11,306	11,314	11,323	11,332	11,340	11,349	11,358
11,366	11,375	11,384	11,392	11,401	11,410	11,418	11,427	11,436	11,445
11,453	11,462	11,471	11,480	11,488	11,497	11,506	11,514	11,523	11,532
11,541	11,549	11,558	11,567	11,576	11,584	11,593	11,602	11,611	11,619
11,628	11,637	11,646	11,655	11,663	11,672	11,681	11,690	11,699	11,707
11,716	11,725	11,734	11,743	11,751	11,760	11,769	11,778	11,787	11,796
11,804	11,813	11,822	11,831	11,840	11,849	11,857	11,866	11,875	11,884
11,893	11,902	11,911	11,920	11,928	11,937	11,946	11,955	11,964	11,973
11,982	11,991	12,000	12,009	12,018	12,026	12,035	12,044	12,053	12,062
12,071	12,080	12,089	12,098	12,107	12,116	12,125	12,134	12,143	12,152
12,161	12,170	12,179	12,188	12,197	12,206	12,215	12,224	12,233	12,242
12,251	12,260	12,269	12,278	12,287	12,296	12,305	12,314	12,323	12,332
12,341	12,350	12,359	12,368	12,377	12,386	12,395	12,404	12,413	12,422
12,461	12,440	12,450	12,459	12,468	12,477	12,486	12,495	12,504	12,513
12,522	12,532	12,541	12,550	12,559	12,568	12,577	12,586	12,595	12,605
0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09

Digitized by Google

TABLE III contenant les hauteurs dues à différentes vîtesses; les unes et les autres exprimées en pied de roi.

Vîtesse.	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
27,6	12,614	12,623	12,632	12,641	12,650	12,659	12,668	12,678	12,687	12,696
27,7	12,705	12,714	12,723	12,733	12,742	12,751	12,760	12,769	12,779	12,788
27,8	12,797	12,806	12,815	12,825	12,834	12,843	12,852	12,861	12,871	12,880
27,9	12,889	12,899	12,908	12,917	12,926	12,935	12,945	12,954	12,963	12,973
28,0	12,982	12,991	13,000	13,010	13,019	13,028	13,038	13,047	13,056	13,065
28,1	13,075	13,084	13,093	13,103	13,112	13,121	13,131	13,140	13,149	13,159
28,2	13,168	13,178	13,187	13,196	13,205	13,215	13,224	13,233	13,243	13,252
28,3	13,261	13,271	13,280	13,290	13,299	13,308	13,318	13,327	13,337	13,346
28,4	13,355	13,365	13,374	13,384	13,393	13,402	13,412	13,421	13,431	13,440
28,5	13,450	13,459	13,468	13,478	13,487	13,497	13,506	13,516	13,525	13,534
28,6	13,544	13,554	13,563	13,573	13,582	13,591	13,601	13,610	13,620	13,630
28,7	13,639	13,649	13,658	13,667	13,677	13,686	13,696	13,706	13,715	13,725
28,8	13,735	13,744	13,753	13,763	13,773	13,782	13,792	13,801	13,811	13,820
28,9	13,830	13,839	13,849	13,858	13,868	13,878	13,887	13,897	13,906	13,916
29,0	13,926	13,935	13,945	13,955	13,964	13,974	13,983	13,993	14,002	14,012
29,1	14,022	14,032	14,041	14,051	14,060	14,070	14,080	14,089	14,099	14,109
29,2	14,118	14,128	14,138	14,148	14,157	14,167	14,177	14,186	14,196	14,206
29,3	14,215	14,225	14,235	14,244	14,254	14,264	14,274	14,283	14,293	14,303
29,4	14,312	14,322	14,332	14,342	14,351	14,361	14,371	14,381	14,390	14,400
29,5	14,410	14,420	14,430	14,439	14,449	14,459	14,469	14,479	14,488	14,498
29,6	14,508	14,518	14,528	14,537	14,547	14,557	14,567	14,577	14,586	14,596
29,7	14,606	14,616	14,626	14,636	14,646	14,655	14,665	14,675	14,685	14,695
29,8	14,705	14,714	14,724	14,734	14,744	14,754	14,764	14,774	14,784	14,794
29,9	14,804	14,813	14,823	14,833	14,843	14,853	14,863	14,873	14,883	14,893
30,0	14,903	14,913	14,922	14,932	14,942	14,952	14,962	14,972	14,982	14,992
30,1	15,002	15,012	15,022	15,032	15,042	15,052	15,062	15,072	15,082	15,092
30,2	15,102	15,112	15,122	15,132	15,142	15,152	15,162	15,172	15,182	15,192
30,3	15,202	15,212	15,222	15,232	15,242	15,252	15,262	15,273	15,283	15,293
30,4	15,303	15,313	15,323	15,333	15,343	15,353	15,363	15,373	15,383	15,393
30,5	15,404	15,414	15,424	15,434	15,444	15,454	15,464	15,474	15,484	15,494
30,6	15,505	15,515	15,525	15,535	15,545	15,555	15,565	15,576	15,586	15,596
30,7	15,606	15,617	15,627	15,637	15,647	15,657	15,667	15,677	15,688	15,698
30,8	15,708	15,718	15,728	15,739	15,749	15,759	15,769	15,780	15,790	15,800
30,9	15,810	15,820	15,830	15,841	15,851	15,861	15,872	15,882	15,892	15,902
31,0	15,913	15,923	15,933	15,944	15,954	15,964	15,974	15,985	15,995	16,005
31,1	16,016	16,026	16,036	16,046	16,057	16,067	16,077	16,087	16,098	16,108
31,2	16,119	16,129	16,139	16,150	16,160	16,170	16,180	16,191	16,202	16,212
31,3	16,222	16,232	16,243	16,253	16,263	16,274	16,284	16,295	16,305	16,316
31,4	16,326	16,336	16,347	16,357	16,368	16,378	16,388	16,399	16,409	16,420
31,5	16,430	16,441	16,451	16,461	16,472	16,482	16,493	16,503	16,514	16,524
31,6	16,535	16,545	16,556	16,566	16,577	16,587	16,598	16,608	16,619	16,629
31,7	16,640	16,650	16,660	16,671	16,681	16,692	16,703	16,713	16,724	16,734
31,8	16,744	16,755	16,766	16,776	16,787	16,797	16,808	16,818	16,829	16,840
31,9	16,850	16,861	16,871	16,882	16,892	16,903	16,913	16,924	16,934	16,945
32,0	16,956	16,967	16,977	16,988	16,998	17,009	17,019	17,030	17,041	17,052
32,1	17,062	17,073	17,083	17,094	17,105	17,115	17,126	17,136	17,147	17,158
	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09

TABLE III contenant les hauteurs dues à différentes vitesses ; les unes et les autres exprimées en pied de roi.

Vitesse.	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
32,2	17,169	17,180	17,190	17,201	17,211	17,222	17,232	17,243	17,254	17,265
32,3	17,275	17,286	17,297	17,307	17,318	17,329	17,339	17,350	17,361	17,372
32,4	17,383	17,393	17,404	17,415	17,425	17,436	17,447	17,458	17,468	17,479
32,5	17,490	17,501	17,511	17,522	17,533	17,544	17,555	17,565	17,576	17,587
32,6	17,598	17,609	17,619	17,630	17,641	17,652	17,663	17,673	17,684	17,695
32,7	17,706	17,717	17,728	17,738	17,749	17,760	17,771	17,782	17,793	17,803
32,8	17,814	17,825	17,836	17,847	17,858	17,869	17,880	17,891	17,902	17,913
32,9	17,923	17,934	17,945	17,956	17,967	17,978	17,988	17,999	18,010	18,021
33,0	18,032	18,043	18,054	18,065	18,076	18,087	18,098	18,109	18,120	18,131
33,1	18,142	18,153	18,164	18,175	18,186	18,197	18,208	18,219	18,230	18,240
33,2	18,251	18,262	18,273	18,284	18,295	18,306	18,317	18,328	18,339	18,350
33,3	18,361	18,373	18,384	18,395	18,406	18,417	18,428	18,439	18,450	18,461
33,4	18,472	18,483	18,494	18,505	18,516	18,527	18,538	18,549	18,561	18,572
33,5	18,583	18,594	18,605	18,616	18,627	18,638	18,649	18,660	18,672	18,683
33,6	18,694	18,705	18,716	18,727	18,738	18,749	18,761	18,772	18,783	18,794
33,7	18,805	18,816	18,827	18,839	18,850	18,861	18,872	18,884	18,895	18,906
33,8	18,917	18,928	18,939	18,951	18,962	18,973	18,984	18,996	19,007	19,018
33,9	19,029	19,040	19,052	19,063	19,074	19,086	19,097	19,108	19,119	19,130
34,0	19,141	19,153	19,164	19,175	19,186	19,198	19,209	19,220	19,232	19,243
34,1	19,254	19,266	19,277	19,288	19,300	19,311	19,322	19,334	19,345	19,356
34,2	19,367	19,379	19,390	19,402	19,413	19,424	19,436	19,447	19,458	19,469
34,3	19,481	19,492	19,503	19,514	19,526	19,538	19,549	19,560	19,572	19,584
34,4	19,595	19,606	19,617	19,629	19,640	19,651	16,663	19,675	19,686	19,697
34,5	19,709	19,720	19,732	19,743	19,754	19,766	19,777	19,789	19,800	19,812
34,6	19,823	19,834	19,846	19,858	19,869	19,880	19,892	19,904	19,915	19,926
34,7	19,938	19,949	19,961	19,973	19,984	19,995	20,007	20,018	20,030	20,042
34,8	20,053	20,064	20,076	20,088	20,099	20,111	20,122	20,134	20,145	20,157
34,9	20,169	20,180	20,191	20,203	20,215	20,226	20,238	20,249	20,261	20,273
35,0	20,284	20,295	20,307	20,319	20,331	20,342	20,354	20,365	20,377	20,389
	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09

Digitized by Google

Temps correspondants à différ. hauteurs de chûte; expr. en pieds de roi.

"	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,0000	0,0015	0,0060	0,0136	0,0241	0,0377	0,0543	0,0740	0,0966	0,1223
0,1	0,1510	0,1827	0,2174	0,2552	0,2960	0,3397	0,3865	0,4363	0,4893	0,5452
0,2	0,6039	0,6658	0,7307	0,7987	0,8696	0,9438	1,0206	1,0006	1,1837	1,2697
0,3	1,3588	1,4509	1,5460	1,6442	1,7453	1,8495	1,9567	2,0669	2,1806	2,2965
0,4	2,4157	2,5380	2,6633	2,7916	2,9230	3,0573	3,1950	3,3351	3,4786	3,6250
0,5	3,7745	3,9270	4,0825	4,2410	4,4026	4,5671	4,7347	4,9053	5,0790	5,2556
0,6	5,4353	5,6180	5,8037	5,9924	6,1841	6,3789	6,5767	6,7775	6,9813	7,1881
0,7	7,3980	7,6109	7,8268	8,0457	8,2677	8,4926	8,7206	8,9516	9,1856	9,4227
0,8	9,6627	9,9058	10,152	10,401	10,653	10,908	11,166	11,428	11,692	11,959
0,9	12,229	12,503	12,779	13,058	13,341	13,626	13,914	14,206	14,500	14,798
1,0	15,098	15,402	15,708	16,017	16,330	16,645	16,964	17,286	17,610	17,938
1,1	18,269	18,602	18,939	19,279	19,621	19,967	20,316	20,668	21,022	21,380
1,2	21,741	22,105	22,472	22,842	23,215	23,591	23,970	24,351	24,737	25,125
1,3	25,516	25,910	26,307	26,707	27,110	27,516	27,925	28,338	28,753	29,171
1,4	29,592	30,016	30,444	30,874	31,307	31,744	32,183	32,625	33,071	33,519
1,5	33,971	34,425	34,882	35,343	35,806	36,273	36,742	37,215	37,691	38,169
1,6	38,651	39,136	39,623	40,114	40,608	41,104	41,604	42,107	42,613	43,122
1,7	43,633	44,148	44,666	45,187	45,711	46,238	46,768	47,301	47,837	48,375
1,8	48,917	49,463	50,011	50,562	51,116	51,673	52,233	52,796	53,362	53,932
1,9	54,504	55,079	55,657	56,239	56,823	57,409	58,001	58,594	59,190	59,790
2,0	60,392	60,998	61,606	62,217	62,832	63,449	64,070	64,694	65,320	65,950
2,1	66,582	67,218	67,857	68,498	69,143	69,791	70,441	71,095	71,752	72,411
2,2	73,074	73,740	74,409	75,081	75,756	76,434	77,115	77,799	78,485	79,176
2,3	79,868	80,564	81,263	81,966	82,671	83,379	84,090	84,804	85,521	86,241
2,4	86,965	87,691	88,420	89,152	89,887	90,626	91,367	92,111	92,869	93,609
2,5	94,363	95,119	95,878	96,641	97,406	98,174	98,946	99,721	100,50	101,28
2,6	102,06	102,85	103,64	104,43	105,23	106,03	106,83	107,63	108,44	109,25
2,7	110,07	110,88	111,70	112,52	113,35	114,18	115,01	115,85	116,69	117,53
2,8	118,37	119,22	120,06	120,92	121,77	122,63	123,50	124,36	125,23	126,10
2,9	127,97	127,85	128,73	129,61	130,50	131,39	132,28	133,18	134,08	135,98
3,0	135,88	136,79	137,70	138,61	139,53	140,45	141,37	142,30	143,23	144,16
3,1	145,09	146,03	146,97	147,92	148,86	149,81	150,76	151,72	152,68	153,64
3,2	154,60	155,57	156,54	157,52	158,49	159,47	160,46	161,44	162,43	163,42
3,3	164,42	165,42	166,42	167,42	168,43	169,44	170,45	171,47	172,49	173,51
3,4	174,53	175,56	176,59	177,62	178,66	179,70	180,75	181,79	182,84	183,90
3,5	184,95	186,01	187,07	188,13	189,20	190,27	191,35	192,42	193,50	194,58
3,6	195,67	196,76	197,85	198,95	200,04	201,14	202,25	203,35	204,46	205,58
3,7	206,69	207,81	208,93	210,06	211,18	212,31	213,45	214,59	215,73	216,87
3,8	218,01	219,16	220,32	221,47	222,63	223,79	224,95	226,42	227,29	228,46
3,9	229,64	230,82	232,00	233,19	234,38	235,57	236,76	237,96	239,16	240,36
4,0	241,57	242,78	243,99	245,20	246,42	247,64	248,87	250,10	251,33	252,56
4,1	253,80	255,04	256,28	257,53	258,78	260,03	261,28	262,54	263,80	265,06
4,2	266,33	267,60	268,87	270,15	271,43	272,71	273,99	275,28	276,57	277,86
4,3	279,16	280,46	281,77	283,07	284,38	285,69	287,01	288,33	289,65	290,97
4,4	292,30	293,63	294,96	296,30	297,64	298,98	300,32	301,67	303,02	304,38
4,5	305,74	307,10	308,46	309,82	311,20	312,57	313,94	315,32	316,70	318,09
4,6	319,47	320,86	322,26	323,66	325,05	326,46	327,86	329,27	330,68	332,10
4,7	333,51	334,94	336,36	337,79	339,22	340,66	342,08	343,52	344,97	346,41
4,8	347,86	349,31	350,76	352,22	353,68	355,14	356,61	358,08	359,55	361,02
4,9	362,50	363,99	365,47	366,96	368,45	369,94	371,44	372,94	374,44	375,94
5,0	377,45	378,96	380,48	381,99	383,51	385,04	386,56	388,09	389,62	391,16

Digitized by Google

TABLE V contenant les pesanteurs spécifiques de différentes substances.

SUBSTANCES MÉTALLIQUES.

Noms des Substances métalliques.	Variétés.	Pésantenr spécifique.	Poids du pouce cube.			Poids du pied cube.			
		Nombres.	onces	gros	grains	livres	onces	gros	grains
Or.	Or à 24 karats, fondu et non forgé.	192681	12	3	62	1348	1	0	41
	Le même fondu et forgé.	193617	12	4	28	1355	5	0	60
	Or au titre de Paris, ou à 22 karats, fondu et non forgé.	174863	11	2	48	1224	0	5	18
	Le même fondu et forgé.	175894	11	3	15	1231	4	1	2
	Or au titre de la monnoie de France, ou à 21 $\frac{11}{12}$ karats, fondu et non forgé.	174022	11	2	17	1218	2	3	51
	Le même monnoyé.	176474	11	3	36	1235	5	0	51
	Or de la monnoie de France du regne de Louis XIII.	175531	11	3	1	1228	11	3	56
	Or de la monnoie d'Angleterre en guinée.	176294	11	3	30	1234	0	7	31
	Or de la monnoie d'Espagne.	176551	11	3	39	1235	13	5	50
	Or de la monnoie de Portugal.	179664	11	5	11	1257	10	2	68
	Or de la monnoie de Hollande en ducats.	193519	12	4	25	1354	10	1	2
	Or au titre des bijoux, ou à 20 karats, fondu et non forgé.	157090	10	1	33	1099	10	0	46
	Le même fondu et forgé.	157746	10	1	57	1104	3	4	30
Argent.	Argent à 12 deniers, fondu et non forgé.	104743	6	6	22	733	3	1	52
	Le même fondu et forgé.	105107	6	6	36	735	11	7	43
	Argent au titre de Paris, ou à 11 deniers 10 grains, fondu et non forgé.	101752	6	4	55	712	4	1	57
	Argent au titre de la monnoie de France, ou à 10 deniers 21 grains, fondu et non forgé.	100476	6	4	7	703	5	2	36
	Le même monnoyé.	104077	6	5	70	728	8	4	71
	Mine d'argent vitreuse.	69099	4	3	60	483	11	0	51
	Mine d'argent cornée.	47488	3	0	46	332	6	5	18
	Mine d'argent rouge demi-transparente.	55886	3	4	70	391	3	1	62
	Mine d'argent rouge opaque.	55637	3	4	61	389	7	2	54
	Mine d'argent noire.	21780	1	3	21	152	7	2	63
	La même pénétrée d'eau.	23401	1	4	10	163	12	7	21
Platine.	Platine brut en grénailles.	156017	10	0	65	1092	1	7	17
	Le même décapé par l'acide muriatique.	167521	10	6	62	1172	10	2	59
	Platine brut fondu.	146263	9	3	60	1023	13	3	47
	Platine purifié, fondu.	195000	12	5	8	1365	0	0	0

Digitized by Google

TABLE V contenant les pesanteurs spécifiques de différentes substances.

SUBSTANCES MÉTALLIQUES.

Noms des Substances métalliques.	Variétés.	Pesanteur specifique.	Poids du pouce cube.			Poids du pied cube.			
		Nombres.	onces	gros	grains	livres	onces	gros	grains
Platine.	Platine purifié, forgé.	203566	13	1	32	1423	8	7	67
	Platine purifié, passé à la filiere.	210417	13	5	8	1472	14	5	46
	Platine purifié passé au laminoir.	220690	14	2	51	1544	13	2	17
Cuivre.	Cuivre rouge fondu et non forgé.	77880	5	0	28	545	2	4	35
	Le même fondu et passé à la filiere.	88785	5	6	3	621	7	7	26
	Cuivre jaune fondu et non forgé.	83958	5	3	38	587	11	2	26
	Le même fondu et passé à la filiere.	85441	5	4	22	598	1	5	10
	Mine de cuivre jaune.	43154	2	6	27	302	1	1	71
	Mine de cuivre soyeuse, ou verd-de-gris naturel.	35718	2	2	37	250	0	3	24
	Bleu de montagne.	36082	2	2	51	252	9	1	34
	Malachite.	36412	2	2	63	254	14	1	11
Fer.	Fer fondu.	72070	4	5	27	504	7	6	52
	Fer forgé en barre, écroui, ou non écroui.	77880	5	0	28	545	2	4	35
	Acier ni trempé ni écroui.	78331	5	0	44	548	5	0	41
	Le même écroui et non trempé.	78404	5	0	47	548	13	1	71
	Le même écroui et ensuite trempé.	78180	5	0	39	547	4	1	20
	Le même trempé et non écroui.	78163	5	0	38	547	2	2	3
	Mine de fer prismatique.	73548	4	6	10	514	13	3	1
	Mine de fer spéculaire.	52180	3	3	4	365	4	1	20
	Mine de fer lenticulaire.	50116	3	1	71	350	12	7	67
	Mine de fer octaèdre.	49394	3	1	44	345	12	1	3
	Mine de fer noire de Suède.	46783	3	0	19	327	7	5	41
	Mine de fer bleue de Suède.	48670	3	1	17	340	11	0	23
	Mine de fer grise de Suède.	46770	3	0	18	327	6	1	66
	Mine de fer spathique.	36720	2	3	3	257	0	5	9
	Mine de fer cubique.	35027	2	2	12	245	3	0	14
	Mine de fer hépatique.	34771	2	2	2	243	6	2	59
	La même pénétrée d'eau.	35281	2	2	21	247	7	3	56
	Hématite striée.	48983	3	1	29	342	14	0	55
	Hématite terreuse.	35731	2	2	38	250	1	6	70
	La même pénétrée d'eau.	37502	2	3	32	262	8	1	57
	Emeril.	39221	2	4	24	274	8	6	1
	Crayon rouge fin.	31391	2	0	20	219	11	6	24
	Le même pénétré d'eau.	33348	2	1	21	233	6	7	58
	Crayon rouge grossier.	29904	1	7	36	209	5	1	71
	Le même pénétré d'eau.	32107	2	0	47	224	11	7	63
	Aimant des Indes.	42437	2	6	0	297	0	7	40

TABLE V contenant les pésanteurs spécifiques de différentes substances.

SUBSTANCES MÉTALLIQUES.

Noms des Substances métalliques.	Variétés.	Pésant. spécifiq.	Poids du pouce cube.			Poids du pied cube.			
		Nombres.	onces	gros	grains	livres	onces	gros	grains
Wolfram.		71195	4	4	66	498	5	6	52
Etain.	Etain pur de Cornouailles fondu et non écroui.	72914	4	5	58	510	6	2	68
	Le même fondu et écroui.	72994	4	5	61	510	15	2	45
	Etain de mélac fondu et non écroui.	72963	4	5	60	510	11	6	61
	Le même fondu et écroui.	73065	4	5	64	511	7	2	17
	Etain neuf fondu et non écroui.	73013	4	5	62	511	1	3	47
	Le même fondu et écroui.	73115	4	5	66	511	12	7	3
	Etain fin fondu et non écroui.	74789	4	6	56	523	8	2	68
	Le même fondu et écroui.	75194	4	6	71	526	5	5	59
	Etain commun fondu.	79200	5	1	5	554	6	3	14
	Etain dit *claire étoffe* fondu.	84869	5	4	0	594	1	2	45
	Mine d'étain rouge.	69348	4	3	69	485	6	7	58
	Mine d'étain noire.	69009	4	3	56	483	1	0	5
	Mine d'étain blanche.	60076	3	7	11	420	8	4	7
Plomb.	Plomb fondu.	113523	7	2	62	794	10	4	44
	Mine de plomb cubique, ou galène cubique.	75873	4	7	25	531	1	6	15
	Mine de plomb cornée.	60717	3	7	35	425	0	2	31
	Mine de plomb verte.	58600	3	6	28	410	3	1	43
	Mine de plomb noire.	57445	3	5	57	402	1	6	52
	Mine de plomb blanche.	40586	2	5	3	284	1	5	4
	Mine de plomb blanche vitreuse.	65585	4	2	1	459	1	4	12
	Mine de plomb rouge.	60269	3	7	18	421	14	1	2
	Saturnite.	59250	3	6	52	414	12	0	0
Zinc.	Zinc fondu.	71908	4	5	21	503	5	5	41
	Mine de zinc ou blende.	41665	2	5	43	291	10	3	60
	Calamine.	35256	2	2	19	246	10	3	33
Bismuth.	Bismuth fondu.	98227	6	2	67	687	9	3	28
	Bismuth natif.	90202	5	6	56	631	6	4	71
	Mine de bismuth en plumes.	43711	2	6	48	305	15	5	4
	Mine de bismuth sulfureuse de Suède.	64672	4	1	38	452	11	2	8
Cobalt.	Cobalt fondu.	78119	5	0	36	546	13	2	45
	Manganaise striée.	47563	3	0	48	332	15	0	32
	Manganaise à petites aiguilles.	45547	2	7	44	318	13	2	8
	Manganaise à grandes aiguilles.	42491	2	6	2	297	6	7	67
	Manganaise écailleuse.	41165	2	5	25	288	2	3	60
	Manganaise noire.	37076	2	3	16	259	8	4	7

TABLE V contenant les pésanteurs spécifiques de différentes substances.

SUBSTANCES MÉTALLIQUES.

Noms des Substances métalliques.	Variétés.	Pesant. spécifiq.	poids du pouce cube.			Poids du pied cube.			
		Nombres.	onces	gros	grains	livres	onces	gros	grains
Cobalt.	La même pénétrée d'eau.	39039	2	4	17	273	4	2	68
	Safre lavé, ou chaux de colbat.	35090	2	2	14	245	10	0	46
	Smalth, ou verre bleu de colbat.	24405	1	4	47	170	13	2	63
Antimoine.	Antimoine fondu.	67021	4	2	54	469	2	2	59
	Antimoine crud.	40643	2	5	5	284	8	0	9
	Verre d'antimoine.	49464	3	1	47	346	3	7	64
	Mine d'antimoine étoilée.	44854	2	7	19	313	15	5	13
	Mine d'antimoine tessulaire.	45165	2	7	30	316	2	3	60
	Mine d'antimoine spéculaire.	41327	2	5	31	289	4	4	71
	Mine d'antimoine cellulaire.	42532	2	6	4	297	11	4	48
Arsenic.	Arsenic fondu.	57633	3	5	64	403	6	7	12
	Mine d'arsenic écailleuse.	57249	3	5	49	400	11	7	7
	Mine d'arsenic tuberculeuse.	30534	1	7	60	213	11	6	33
	Chaux d'arsenic naturelle et crystallisée.	24775	1	4	61	173	6	6	29
	Verre d'arsenic naturelle, ou arsenic de boutiques.	35942	2	2	55	251	9	4	2
	Orpiment natif feuilleté.	34522	2	1	65	241	10	3	51
	Realgar.	33384	2	1	22	233	11	0	5
	Mispickel, ou mine d'arsenic blanche.	65223	4	1	59	456	8	7	58
Nickel.	Nickel fondu.	78070	5	0	35	546	7	6	52
	Mine de nickel, dite kupfer-nickel de Saxe	66481	4	2	34	465	5	6	70
	Mine de nickel, dite kupfer-nickel de Bohême.	66086	4	2	19	462	9	5	4
Molibd.	Molibdene.	47385	3	0	41	331	11	1	69
Tungstene.		60665	3	7	33	424	10	3	60
Mercure.	Mercure coulant.	135681	8	6	25	949	12	2	13
	Chaux naturelle de mercure.	92301	5	7	62	646	1	5	50
	Mercure précipité *per se*.	108710	7	0	27	760	15	4	12
	Mercure précipité rouge.	83992	5	3	40	587	15	0	60
	Cinabre brun d'almaden.	102185	6	4	71	715	4	5	55
	Cinabre rouge d'almaden.	69022	4	3	57	483	2	3	51

Digitized by Google

TABLE V contenant les pesanteurs spécifiques de différentes substances.

PIERRES PRÈCIEUSES.

Noms des Pierres precieuses.	Variétés.	Pesant. spécifiq.	Poids du pouce cube.			Poids du Pied cube.			
		Nombres.	onces	gros	grains	livres	onces	gros	grains
Diamant.	Diamant oriental blanc.	35212	2	2	19	246	7	5	69
	Diamant oriental couleur de rose.	35310	2	2	22	247	2	5	55
	Diamant oriental orangé, ou feuille-morte.	35500	2	2	29	248	8	0	0
	Diamant oriental verd.	35238	2	2	20	246	10	5	18
	Diamant oriental bleu.	35254	2	2	20	246	12	3	42
	Diamant du Bresil.	34444	2	1	51	241	1	5	59
	Diamant jaune.	35185	2	2	18	246	4	5	55
Rubis.	Rubis oriental.	42833	2	6	15	299	13	2	26
	Rubis spinelle.	37600	2	3	36	263	3	1	43
	Rubis balai.	36458	2	2	65	255	3	2	26
	Rubis du Bresil.	35311	2	2	22	247	2	6	47
Topaze.	Topaze orientale.	40106	2	4	57	280	11	6	70
	Topaze pistache orientale.	40615	2	5	4	284	4	7	3
	Topaze du Bresil.	35365	2	2	24	247	8	7	3
	Topaze de Saxe.	35640	2	2	35	249	7	5	32
	Topaze blanche de Saxe.	35535	2	2	31	248	11	7	26
Saphir.	Saphir oriental.	39941	2	4	51	279	9	3	10
	Saphir oriental blanc.	39911	2	4	50	279	6	0	18
	Saphir du Puy.	40769	2	5	10	285	6	1	2
	Saphir du Bresil.	31307	2	0	17	219	2	3	5
Girasol.		40000	2	4	53	280	0	0	0
Jargon.	Jargon de Ceylan.	44161	2	6	65	309	2	0	18
Hyacinthe.	Hyacinte commune.	36873	2	3	9	258	1	5	22
Vermeille.		42299	2	5	67	296	1	3	65
Grenats.	Grenat de Bohême.	41888	2	5	52	293	3	3	47
	Grenat en crystal dodecaëdre.	40627	2	5	5	284	6	1	57
	Grenat en crystal à 24 faces, volcanisé.	24684	1	4	58	172	12	4	62
	Grenat syrien.	40000	2	4	53	280	0	0	0
Émeraude.	Émeraude du Pérou.	27755	1	6	28	194	4	4	35
Crysolite.	Crysolite des Jouailliers.	27821	1	6	31	194	11	7	44
	Crysolite du Bresil.	26923	1	5	69	188	7	3	1
Aigue-marine.	Aigue marine orientale, ou beril.	35489	2	2	29	248	6	6	10
	Aigue marine occidentale.	27227	1	6	8	190	9	3	28

TABLE V contenant les pesanteurs spécifiques de différentes substances.

PIERRES SILICEUSES.

Noms des Pierres siliceuses.	Variétés.	Pesant. spécifiq	Poids du pouce cube.			Poids du pied cube.			
		Nombres	onces	gros	grains	livres	onces	gros	grains
Crystal de roche.	Crystal de roche limpide de Madagascar	26530	1	5	54	185	11	2	64
	Crystal de roche du Bresil	26526	1	5	54	185	10	7	21
	Crystal de roche gélatineux, ou d'Europe	26548	1	5	55	185	13	3	1
	Crystal de roche irisé	26497	1	5	53	185	7	5	22
	Crystal de roche couleur de rose	26701	1	5	61	186	14	4	7
	Crystal jaune, ou topaze d'occident, ou de Bohême	26542	1	5	55	185	12	5	46
	Crystal bleu, ou saphir d'eau	25813	1	5	28	180	11	0	24
	Crystal violet, ou améthyste	26535	1	5	55	185	11	7	26
	Crystal violet, peu coloré, ou améthyste blanche	26513	1	5	54	185	9	3	47
	Crystal violet pourpré, ou améthyste de vic, ou de Carthagene	26570	1	5	56	185	15	6	52
	Crystal brun, ou topaze enfumée de Bohême	26534	1	5	55	185	11	6	33
	Crystal noir	26536	1	5	55	185	12	0	18
Quartz.	Quartz crystallisé	26546	1	5	55	185	13	1	16
	Quartz en masse	26471	1	5	52	185	4	6	1
	Quartz crystallisé rouge brun, dit jargon des Portugais, ou hyacinthe de Compostelle	26468	1	5	52	185	4	3	24
	Quartz laiteux	26519	1	5	54	185	10	1	2
	Quartz gras	26459	1	5	52	185	3	3	19
	Quartz fragile	26404	1	5	50	184	13	1	71
Grès.	Grès de Paveurs	24158	1	4	38	169	1		41
	Le même pénétré d'eau	24519	1	4	51	171	10	1	2
	Grès de Rémouleurs	21429	1	3	8	150	0	0	28
	Le même pénétré d'eau	22560	1	3	50	157	14	5	55
	Grès des Couteliers	21113	1	2	68	147	12	5	18
	Le même pénétré d'eau	21920	1	3	26	153	7	0	23
	Grès de Tailleurs de pierres	20855	1	2	59	145	15	6	6
	Le même pénétré d'eau	22246	1	3	39	155	11	4	30
	Grès de Taillandiers	21476	1	3	10	150	5	2	36
	Le même pénétré d'eau	22767	1	3	58	159	5	7	17
	Grès du Levant, ou de Turquie	26016	1	5	35	182	1	6	24
	Grès à filtrer	19326	1	2	2	135	4	4	7
	Le même pénétré d'eau	21244	1	3	1	148	11	2	45

Digitized by Google

TABLE V contenant les pésanteur spécifiques de différentes susbstances.

PIERRES SILICEUSES.

Noms des Pierres siliceuses.	Variétés	Pesant. spécifiq.	Poids du pouce cube.			Poids du pied cube.			
		Nombres.	onces	gros	grains	livres	onces	gros	grains
Grès.	Grès à bâtir.	19332	1	2	2	135	5	1	34
	Le même pénétré d'eau.	21306	1	3	3	149	2	2	13
	Grès ferrugineux.	23408	1	4	10	163	13	5	41
	Le même pénétré d'eau.	23880	1	4	28	167	2	4	35
	Grès dur, ou grisard.	24928	1	4	67	174	7	7	35
	Le même pénétré d'eau.	25160	1	5	3	176	1	7	26
	Grès luisant de Fontainebleau.	25616	1	5	20	179	4	7	67
	Le même pénétré d'eau.	25739	1	5	25	180	2	6	10
	Grès crystallisé de Fontainebleau.	26111	1	5	39	182	12	3	33
	Le même pénétré d'eau.	26214	1	5	43	183	7	7	54
	Grès fin des environs d'Estampes.	25159	1	5	3	176	1	6	33
	Le même pénétré d'eau.	25339	1	5	10	177	5	7	54
	Pierre à faux à gros grains d'Auvergne.	25686	1	5	23	179	12	6	47
	La même pénétrée d'eau.	25961	1	5	33	181	11	5	4
	Pierre à faux à grains moyens d'Auvergne.	25638	1	5	21	179	7	3	47
	Pierre à faux à grains fins d'Auvergne.	26990	1	5	38	182	10	0	46
	La même pénétrée d'eau.	26314	1	5	46	184	13	1	25
	Pierre à faux de Lorraine.	25298	1	5	8	177	1	3	1
	La même pénétrée d'eau.	25658	1	5	22	179	9	5	41
	Pierre à faux de Liege.	26356	1	5	48	184	7	6	70
	La même pénétrée d'eau.	26584	1	5	56	186	1	3	19
Spaths étincelants.	Spath étincelant blanc.	25946	1	5	33	181	9	7	44
	Spath étincelant rougeâtre.	24378	1	4	46	170	10	2	50
	Spath étincelant verd.	27045	1	6	2	189	5	0	23
	Spath étincelant verd et blanc.	31051	2	0	7	217	5	5	50
	Spath étincelant bleu, dit pierre de Labrador.	26925	1	5	69	188	7	4	58
	Spath étincelant transparent.	25644	1	5	21	179	8	1	63
	Spath étincelant de la Chine, dit spath adamantin.	38732	2	4	6	271	1	7	63
Aventurines.	Aventurine demi-transparente.	26667	1	5	60	186	10	4	46
	Aventurine opaque.	26426	1	5	51	184	15	5	50
Oeils de Chat.	Oeil de chat gris.	25675	1	5	23	179	11	4	58
	Oeil de chat jaune.	26573	1	5	56	186	0	1	29
	Oeil de chat mordoré.	26667	1	5	60	186	10	4	46
	Oeil de chat noirâtre.	32693	2	0	65	228	2	3	24
	Oeil de loup.	23507	1	4	14	164	8	6	20
	Oeil de poisson.	25782	1	5	27	180	7	4	48

Digitized by Google

TABLE V contenant les pesanteurs spécifiques de différentes substances.

PIERRES SILICEUSES.

Noms des Pierres siliceuses.	Variétés.	Pesant. spécifiq.	Poids du pouce cube.			Poids du pied cube.			
		Nombres.	onces	gros	deniers	livres	onces	gros	grains
Opale.		21140	1	2	69	147	15	5	32
Perle. . .	Perle vierge orientale.	26836	1	5	66	187	13	5	4
Agates.	Agate orientale.	25901	1	5	31	181	4	7	21
	Agate onyx.	26375	1	5	49	184	10	0	0
	Agate irisée.	25555	1	5	17	178	11	7	26
	Agate nuée.	26253	1	5	44	183	12	2	60
	Agate ponctuée.	26070	1	5	37	182	7	6	52
	Agate veinée.	26667	1	5	60	186	10	4	46
	Agate tachetée.	26324	1	5	47	184	4	2	22
	Agate herborisée.	25891	1	5	31	181	3	6	24
	Agate mousseuse.	25991	1	5	34	181	14	6	67
	Agate jaspée.	26356	1	5	48	184	7	6	70
	Agate des galets du Havre.	25881	1	5	30	181	2	5	27
Calcédoines.	Calcédoine.	26156	1	5	40	183	1	3	56
	Calcédoine limpide.	26640	1	5	59	186	7	5	32
	Calcédoine veinée.	26059	1	5	37	182	6	4	60
	Calcédoine onyx.	26151	1	5	40	183	0	7	21
	Calcédoine rougeâtre.	26645	1	5	59	186	8	1	66
	Calcédoine bleuâtre.	25867	1	5	30	181	1	0	60
	Calcédoine hydrophane, dite *œil du monde*.	22950	1	3	65	160	10	3	14
	Calcédoine en hydre.	10942	0	5	49	76	9	4	2
Cornalines.	Cornaline.	26137	1	5	40	182	15	2	54
	Cornaline pâle.	26301	1	5	46	184	1	5	50
	Cornaline ponctuée.	26120	1	5	39	182	13	3	37
	Cornaline veinée.	26234	1	5	43	183	10	1	48
	Cornaline onyx.	26227	1	5	43	183	9	3	28
	Cornaline herborisée.	26133	1	5	40	183	0	7	12
	Cornaline stalactite.	25977	1	5	34	181	13	3	28
Sardoines.	Sardoine pure.	26025	1	5	36	182	2	6	39
	Sardoine pâle, ou blonde.	26060	1	5	37	182	6	5	55
	Sardoine ponctuée.	26215	1	5	43	183	8	0	46
	Sardoine veinée.	25951	1	5	33	181	10	4	7
	Sardoine onyx.	25949	1	5	33	181	10	2	22
	Sardoine herborisée.	25988	1	5	34	181	14	5	18
	Sardoine noirâtre.	26284	1	5	45	183	15	6	33

TABLE V contenant les pesanteurs spécifiques de différentes substances.

PIERRES SILICEUSES.

Noms des Pierres siliceuses.	Variétés.	Pesant. spécifiq.	Poids du pouce cube.			Poids du pied cube.			
		Nombres.	onces	gros	grains	livres	onces	gros	grains
Prase.	Prase.	25805	1	5	27	180	10	1	20
Pierres à fusil.	Pierre à fusil blonde.	25941	1	5	32	181	9	3	10
	Pierre à fusil noirâtre.	25817	1	5	28	180	11	4	2
Cailloux.	Caillou onyx.	26644	1	5	59	186	8	1	2
	Caillou de Rennes.	26558	1	5	55	185	12	2	3
	Caillou olivâtre.	26067	1	5	37	182	7	4	2
	Caillou tacheté.	25867	1	5	30	181	1	0	60
	Caillou veiné.	26122	1	5	39	182	13	5	22
	Caillou oolithe gris de la Selle.	26023	1	5	36	182	2	4	44
	Caillou colithe jaunâtre de la Selle.	26187	1	5	42	183	4	7	40
	Caillou panaché du Limousin.	22431	1	3	45	157	0	2	13
	Caillon d'Angleterre, nommé *poudding*.	26087	1	5	38	182	9	5	69
	Caillou herborisé, ou d'Egypte.	25648	1	5	22	179	8	4	44
Pierre meuliere.		24835	1	4	63	173	13	4	12
Jades.	Jade blanc.	29502	1	7	21	206	8	1	57
	Jade verd.	29660	1	7	27	207	9	7	26
	Jade olivâtre.	29829	1	7	34	208	12	6	56
Petrosilex.	Petrosilex blanc.	26527	1	5	54	185	11	0	14
	Petrosilex rougeâtre.	26733	1	5	62	187	2	0	55
	Petrosilex veiné.	27467	1	6	17	192	4	2	31
Jaspes.	Jaspe verd clair.	25587	1	4	17	165	1	5	69
	Jaspe verd foncé.	26258	1	5	44	183	12	7	12
	Jaspe verd brun.	26814	1	5	65	187	11	1	25
	Jaspe verd, dit *pierre à lancettes*.	26274	1	5	45	183	14	5	36
	Jaspe rouge.	26612	1	5	58	186	4	4	25
	Jaspe rouge de sanguine.	26189	1	5	42	183	5	1	25
	Jaspe brun.	26911	1	5	69	188	6	0	18
	Jaspe jaune.	27101	1	6	4	189	11	2	56
	Jaspe violet.	27111	1	6	4	189	12	3	33
	Jaspe gris.	27640	1	6	24	193	7	5	32
	Jaspe noirâtre.	26719	1	5	62	187	0	4	16
	Jaspe sanguin.	26277	1	5	45	183	15	0	14
	Jaspe héliotrope.	26330	1	5	47	184	4	7	49
	Jaspe nué.	27354	1	6	13	191	7	5	13
	Jaspe veiné.	26955	1	5	70	188	10	7	49
	Jaspe onyx, ou rubanné.	28160	1	6	43	197	1	7	26

TABLE V contenant les pesanteurs spécifiques de différentes substances.

PIERRES SILICEUSES.

Noms des Pierres siliceuses.	Variétés.	Pesant. spécifiq.	Poids du pouce cube.			Poids du pied cube.			
		Nombres.	onces	gros	grains	livres	onces	gros	grains
Jaspes.	Jaspe fleuri rouge et blanc.	26228	1	5	43	193	9	4	21
	Jaspe fleuri rouge et jaune.	27500	1	6	18	192	8	0	0
	Jaspe fleuri verd et jaune.	26859	1	5	66	187	13	7	54
	Jaspe fleuri rouge, verd et gris. . . .	27323	1	6	12	191	4	1	29
	Jaspe fleuri rouge, verd et jaune. . .	27492	1	6	18	192	7	0	60
	Jaspe universel.	25630	1	5	21	179	6	4	25
	Jaspe agaté.	26608	1	5	57	186	4	0	55
	Jaspe grossier, ou synople.	26913	1	5	69	188	6	2	3
Schorls.	Schorl noir prismatique hexaëdre. . .	33636	2	1	32	235	7	1	62
	Schorl noir prismatique octaëdre. . .	32265	2	0	53	225	13	5	32
	Schorl noir prismatique ennéaëdre. .	30926	2	0	3	216	7	5	50
	Schorl noir prismatique ennéaëdre, transparent, ou tourmaline de Ceylan.	30541	1	7	60	213	12	4	53
	Schorl noir spathique.	33852	2	1	40	236	15	3	28
	Schorl noir en masse, dit *basalte noir antique*.	29225	1	7	11	204	9	1	43
	Schorl violet du Dauphiné.	32956	2	1	6	230	11	0	41
	Schorl verd du Dauphiné.	34529	2	1	65	241	11	1	71
	Schorl verd, dit *émeraude du Brésil*	31555	2	0	26	220	14	1	20
	Schorl verd jaunâtre, dit *péridot*. .	33548	2	1	28	234	13	5	57
	Schorl cruciforme, ou pierre de croix.	32861	2	1	3	230	0	3	33

PIERRES ARGILEUSES ou ALUMINEUSES.

Noms des Pierres argileuses.									
Serpentines.	Serpentine opaque verte d'Italie, dite *gabro des Florentins*.	24295	1	4	43	170	1	0	23
	La même pénétrée d'eau.	24729	1	4	59	173	1	5	13
	Serpentine opaque tachetée de noir et de blanc.	23767	1	4	23	165	5	7	17
	La même pénétrée d'eau.	24341	1	4	52	171	12	4	53
	Serpentine opaque tachetée de noir et de gris	22645	1	3	53	158	8	1	66
	La même pénétrée d'eau.	23893	1	4	28	167	4	0	9
	Serpentine opaque veinée de noir et d'olivâtre.	25939	1	5	32	181	9	1	25
	La même pénétrée d'eau.	26087	1	5	38	182	9	5	69
	Serpentine opaque veinée de rouge et de noirâtre.	26273	1	5	45	183	14	4	44
	Serpentine opaque tachetée de rouge et de jaunâtre.	26885	1	5	68	188	3	0	69

TABLE V contenant les pesanteurs spécifiques de différentes substances.

PIERRES ARGILEUSES ou ALUMINEUSES.

Noms des Pierres argileuses.	Variétés.	Pesant. spécifiq.	Poids du pouce cube.			Poids du pied cube.			
		Nombres.	onces	gros	grains	livres	onces	gros	grains
Serpentines.	Serpentine opaque verte des carrieres de Grenade.	26849	1	5	66	187	15	0	51
	Serpentine opaque verd-foncé des carrieres de Grenade.	27097	1	6	4	189	10	6	66
	Serpentine demi-transparente grenue.	25859	1	5	29	181	0	1	48
	Serpentine demi-transparente fibreuse	29997	1	7	40	209	15	5	22
	Serpentine demi-tranparente du Dauphiné.	26693	1	5	61	186	13	4	67
Stéatites.	Stéatite de Bareiht.	26149	1	5	40	183	0	5	36
	La même pénétrée d'eau.	26657	1	5	59	186	9	4	48
	Craie de Briançon.	27274	1	6	10	190	14	5	56
	La même pénétrée d'eau.	27387	1	6	14	191	11	2	54
	Craie de Briançon fine.	26689	1	5	60	186	13	1	25
	La même pénétrée d'eau.	26925	1	5	69	188	7	4	58
	Craie d'Espagne.	27902	1	6	34	195	5	0	14
	La même pénétrée d'eau.	27943	1	6	35	195	9	4	67
	Pierre-de-lard.	25834	1	5	28	180	13	3	19
	La même pénétrée d'eau.	26322	1	5	47	184	4	0	37
	Pierre ollaire feuilletée du Dauphiné.	27687	1	6	26	193	12	7	40
	La même pénétrée d'eau.	28214	1	6	45	197	7	7	54
	Pierre ollaire feuilletée de Suède.	28531	1	6	57	199	11	3	56
	La même pénétrée d'eau.	28629	1	6	61	200	6	3	42
	Pierre de Côme.	28729	1	6	65	201	1	5	13
Amiantes.	Amiante longue.	9088	0	4	51	63	9	6	61
	La même pénétrée d'eau.	15662	1	0	9	109	20	1	11
	Amiante courte.	23134	1	4	0	161	15	0	5
	La même pénétrée d'eau.	23803	1	4	25	166	9	7	35
	Asbeste mûr.	25779	1	5	26	180	7	1	71
	Le même pénétré d'eau.	26994	1	6	0	188	15	2	45
	Asbeste étoilé.	30733	1	7	67	215	2	0	55
	Le même pénétré d'eau.	30808	1	7	70	215	10	3	70
	Asbeste non mûr.	29958	1	7	38	209	11	2	26
	Le même pénétré d'eau.	30343	1	7	53	212	6	3	24
	Cuir fossile, ou de montagne.	6806	0	3	38	47	10	2	13
	Le même pénétré d'eau.	13492	0	7	0	94	7	0	60
	Liege fossile, ou de montagne.	9933	0	5	11	69	8	3	70
	Le même pénétré d'eau.	12492	0	6	34	87	7	0	60

Digitized by Google

TABLE V contenant les pesanteurs spécifiques de différentes substances.

PIERRES ARGILEUSES ou ALUMINEUSES.

Noms des Pierres argileuses.	Variétés.	Pesant. spécifiq.	Poids du pouce cube.			Poids du pied cube.			
		Nombres.	onces	gros	grains	livres	onces	gros	grains
Talcs.	Talc de Moscovie.	27917	1	6	54	195	6	5	46
	Talcite.	26525	1	5	47	184	4	3	14
	Le même pénétré d'eau.	26496	1	5	53	185	7	4	30
	Mica blanc.	27044	1	6	2	189	4	7	31
	Le même pénétré d'eau.	27496	1	6	19	182	7	4	30
	Mica jaune.	26546	1	5	55	185	13	1	16
	Le même pénétré d'eau.	27037	1	6	1	189	4	1	11
	Mica noir.	29004	1	7	3	203	0	3	42
	Le même pénétré d'eau.	29386	1	7	17	205	11	1	62
	Mica noir crystallisé.	29342	1	7	15	205	6	2	31
	Crayon noir, ou plombagine d'Angleterre	20891	1	2	60	146	3	6	24
	Le même pénétré d'eau.	21506	1	3	11	150	8	5	27
	Le même qui a subi l'action du feu.	23006	1	3	67	161	0	5	27
	Le même pénétré d'eau.	24104	1	4	46	168	11	5	13
	Crayon noir, ou plombagine d'Allemagne.	22456	1	3	46	157	3	0	41
	Le même pénétré d'eau.	22761	1	3	58	159	5	1	62
Schistes.	Schiste commun.	26718	1	5	61	187	0	3	24
	Le même pénétré d'eau.	26905	1	5	68	188	5	2	63
	Schiste supérieur aux bancs d'ardoise.	28276	1	6	48	197	14	7	21
	Le même pénétré d'eau.	28327	1	6	50	198	4	4	71
	Ardoise neuve.	28535	1	6	57	199	11	7	26
	La même pénétrée d'eau.	28592	1	6	59	200	2	2	31
	Ardoise qui a servi sur les toits.	28118	1	6	42	196	13	1	52
	La même pénétrée d'eau.	28336	1	6	50	198	5	5	4
	Pierre noire.	21861	1	3	24	153	0	3	33
	La même pénétrée d'eau.	22774	1	3	58	159	6	5	36
	Pierre à rasoir blanche.	28765	1	6	66	201	5	3	47
	La même pénétrée d'eau.	28850	1	6	68	201	12	7	49
	Pierre à rasoir noire et blanche.	31311	2	0	17	219	2	6	47
	La même pénétrée d'eau.	31398	2	0	20	219	12	3	43
	Pierre à polir rude ou sableuse.	26667	1	5	60	186	10	5	46
	La même pénétrée d'eau	27019	1	6	1	189	2	1	2
	Pierre à polir demi-douce.	26570	1	5	56	185	15	6	52
	La même pénétrée d'eau.	26820	1	5	65	187	11	6	52
	Pierre à polir douce.	27664	1	6	25	193	10	2	68
	La même pénétrée d'eau.	27897	1	6	33	195	4	3	51
	Pierre à polir verte.	27733	1	6	27	194	2	0	55

Digitized by Google

TABLE V contenant les pesanteurs spécifiques de différentes substances.

PIERRES ARGILEUSES ou ALUMINEUSES.

Noms des Pierres argileuses.	Variétés.	Pesant. spécifiq.	Poids du pouce cube.			Poids du pied cube.			
		Nombres.	onces	gros	grains	livres	onces	gros	grains
Gypses.	Gypse grossier opaque, ou pierre à plâtre.	21679	1	3	17	151	12	0	28
	Le même pénétré d'eau.	22052	1	3	31	154	5	6	43
	Gypse grossier demi-transparent.	23062	1	3	69	161	6	7	40
	Gypse fin opaque.	22642	1	3	53	158	7	7	17
	Gypse fin demi-transparent.	22741	1	3	57	159	2	7	67
	Gypse spathique opaque.	22746	1	3	57	159	3	4	30
	Gypse spathique demi-transparent.	23108	1	3	71	161	12	0	55
	Gypse strié de France.	23057	1	3	69	161	6	3	5
	Gypse strié de la Chine.	23088	1	3	70	161	9	6	61
	Gypse rhomboïdal, dit *miroir d'âne.*	23114	1	3	71	161	12	6	10
	Gypse rhomboïdal à dix faces.	23117	1	3	71	161	13	0	60
	Gypse crystallisé en forme de lentille.	23065	1	3	69	161	7	2	17
	Gypse crystallisé cunéiforme.	23060	1	3	69	161	6	5	55
	Gypse fleuri, ou fleurs de gypse.	23059	1	3	69	161	6	4	62
	Gypse en stalactite.	22849	1	3	61	159	15	0	51

PIERRES CALCAIRES.

Noms des Pierres calcaires.									
Spaths calcaires.	Spath calcaire rhomboïdal, dit crystal d'Islande.	27151	1	6	6	190	0	7	21
	Spath calcaire rhomboïdal de France.	27146	1	6	5	190	0	2	59
	Spath calcaire prismatique.	27182	1	6	7	190	4	3	5
	Spath calcaire prismatique et pyramidal.	27115	1	6	4	189	12	7	3
	Spath calcaire pyramidal, dit *dent de cochon.*	27141	1	6	5	189	15	6	24
	Spath calcaire puant gris, dit *pierre porc grise.*	27121	1	6	5	189	13	4	30
	Spath calcaire puant noir, dit *pierre porc noire.*	26207	1	5	42	183	7	1	34
	Spath calcaire, connu sous le nom de *flos ferri.*	26747	1	5	63	187	3	5	22
Stalactites.	Stalactite transparente.	23239	1	4	4	162	10	6	10
	Stalactite opaque.	24783	1	4	61	173	7	5	41
	La même pénétrée d'eau.	25462	1	5	15	178	3	5	69
Spaths fluors.	Spath fluor blanc.	31555	2	0	26	220	14	1	20
	Spath fluor rouge octaëdre.	31815	2	0	36	222	11	2	17
	Spath fluor d'Angleterre.	31796	2	0	35	222	9	1	16
	Spath fluor d'Auvergne.	30945	2	0	3	216	9	4	67

TABLE V contenant les pesanteurs spécifiques de différentes substances.

PIERRES CALCAIRES.

Noms des Pierres calcaires.	VARIÉTÉS.	Pesant. spécifiq.	Poids du pouce cube.			Poids du pied cube.			
		Nombres	onces	gros	grains	livres	onces	gros	grains
Albâtres.	Albâtre oriental blanc antique.	27302	1	6	11	191	2	6	42
	Albâtre oriental blanc demi-transparent.	27621	1	6	23	193	5	4	30
	Albâtre oriental blanc œillé.	27906	1	6	54	195	5	3	56
	Albâtre oriental blanc tacheté de brun.	27437	1	6	16	192	0	7	40
	Albâtre oriental brun tacheté de blanc.	26296	1	5	46	184	1	1	16
	Albâtre oriental rougeâtre.	28332	1	6	50	198	5	1	34
	Albâtre salin oriental.	27214	1	6	8	190	7	7	54
	Albâtre oriental abricot veiné de blanc.	26988	1	6	0	188	14	5	18
	Albâtre jaune.	26993	1	6	0	188	15	1	52
	Albâtre rayé de jaune et de blanc.	27086	1	6	3	189	9	5	4
	Albâtre roux opaque.	26888	1	5	68	188	3	3	47
	Albâtre veiné.	26915	1	5	69	188	6	2	3
	Albâtre rougeâtre demi-transparent du Piémont.	26925	1	5	70	188	10	7	49
	Albâtre jaune de Malte.	26998	1	6	0	188	15	6	15
	Albâtre panaché de Malte.	26693	1	5	61	186	13	4	67
	Albâtre jaune du royaume de Léon.	26896	1	5	68	188	4	2	59
	Albâtre salin d'Espagne.	27128	1	6	5	189	14	2	50
	Albâtre salin de Consuegra.	26910	1	5	69	188	5	7	26
	Albâtre gris de Consuegra.	26612	1	5	58	186	4	4	25
	Albâtre veiné de Consuegra.	26764	1	5	63	187	5	4	39
	Albâtre de Valence.	26579	1	5	49	184	10	3	42
	Albâtre œillé de Valence.	27512	1	6	19	192	9	2	54
	Albâtre de Lanzaron.	28110	1	6	41	196	12	2	40
	Albâtre tacheté de Lanzaron.	26443	1	5	51	185	1	4	67
	Albâtre de Dalias.	26110	1	5	39	182	12	2	40
	Albâtre rayé demi-transparent de Malaga.	26841	1	5	66	187	14	1	39
	Albâtre rayé opaque de Malaga.	26254	1	5	44	183	12	3	42
	Albâtre panaché de Malaga.	26423	1	5	50	184	15	3	1
	Albâtre œillé de Malaga.	28761	1	6	66	201	5	1	62
	Albâtre roux de Malaga.	27009	1	6	0	189	1	0	5
	Albâtre de Mont-martre.	26858	1	5	66	187	13	6	61
Marbres.	Marbre de Bourbon-l'Ancy.	26957	1	5	70	188	11	1	34
	Marbre, dit *lumachelle de Chasenai.*	26690	1	5	57	186	2	0	46
	Marbre, dit *Bourbonnois antique.*	26805	1	5	65	187	10	1	20
	Marbre de Poligny.	27084	1	6	3	189	9	3	19
	Marbre de Virieux.	26428	1	5	51	184	15	7	35
	Marbre de Saint-Maximin.	27010	1	6	0	189	4	0	69

Digitized by Google

TABLE V contenant les pesanteurs spécifiques de différentes substances.

PIERRES CALCAIRES.

Noms des Pierres calcaires.	Variétés.	Pesant. spécifiq.	Poids du pouce cube.			Poids du pied cube.			
		Nombres.	onces	gros	grains	livres	onces	gros	grains
Marbres de France.	Marbre de Sainte-Baume.	27042	1	6	2	189	4	5	46
	Marbre, dit *breche d'Alep.*	26867	1	5	67	188	1	0	60
	Marbre, dit *verrette*, ou *d'Antin.*	27166	1	6	6	190	2	4	53
	Marbre, dit *verrette nouveau.*	28546	1	6	58	199	13	1	16
	Marbre, dit *griotte d'Italie.*	27471	1	6	18	192	14	6	1
	Marbre campan verd.	27417	1	6	16	191	14	5	46
	Marbre campan rouge.	27242	1	6	9	190	11	0	60
	Marbre, dit *cervelas.*	27195	1	6	7	190	5	6	52
	Marbre de la vicomté de Turenne.	27122	1	6	5	189	13	5	22
	Marbre de Vieux.	27509	1	6	19	192	9	0	5
Marbres de Flandre et des Pays-Bas.	Marbre noir et blanc de Namur.	27167	1	6	6	190	2	5	46
	Marbre tigré.	27062	1	6	2	189	6	7	40
	Marbre d'Estrée.	27525	1	6	20	192	10	6	29
	Marbre, dit *griotte de Flandre*	27080	1	6	3	189	8	7	49
Marbres des Pyrénées.	Marbre gris blanc des Pyrénées.	27256	1	6	10	190	12	5	27
	Marbre violet des Pyrénées.	27162	1	6	6	190	2	1	11
	Marbre, dit *Berg-op-zoom.*	27008	1	6	0	189	0	7	12
	Marbre, dit *breche violette des Pyrén.*	27084	1	6	3	189	9	3	19
	Marbre, dit *breche grise de la carriere de Barbesan.*	27037	1	6	1	189	4	1	11
Marbres d'Espagne et de Portugal.	Marbre noir des carrieres de Biscaye.	27067	1	6	3	189	7	4	2
	Marbre noir rayé de blanc des carrieres de Biscaye.	27109	1	6	4	189	12	1	48
	Marbre noir et blanc des carrieres de Biscaye.	26973	1	5	71	188	12	7	58
	Marbre noir et rouge des carrieres de Biscaye.	26946	1	5	70	188	9	7	44
	Marbre de la carriere de la montagne de Santender.	27102	1	6	4	189	11	3	28
	Marbre de la carriere de Loyola.	27129	1	6	5	189	14	3	42
	Marbre jaune des carrieres de Loyola.	27090	1	6	3	189	10	0	46
	Marbre des carrieres de Tortose.	26821	1	5	65	187	11	7	44
	Marbre violet des carrieres de Tortose.	26998	1	6	0	188	15	6	15
	Marbre, dit *brocatelle.*	26498	1	5	53	185	7	6	15
	Marbre des carrieres d'Arragon.	26972	1	5	71	188	12	6	66
	Marbre jaune des carrieres d'Arragon.	26788	1	5	64	187	8	2	3
	Marbre, dit *breche de la carriere de Ricla.*	26483	1	5	53	185	6	0	55

Digitized by Google

TABLE V contenant les pesanteurs spécifiques de différentes substances.

PIERRES CALCAIRES.

Noms des Pierres calcaires.	Variétés.	Pesant. spécifiq.	Poids du pouce cube.			Poids du pied cube.			
		Nombres.	onces	gros	grains	livres	onces	gros	grains
Marbres d'Espagne et de Portugal.	Marbre blanc de la carriere de Badajoz.	27162	1	6	6	190	2	1	11
	Marbre noirâtre des carrieres du royaume de Léon.	27092	1	6	3	189	10	2	31
	Marbre gris des carrieres de Léon.	27010	1	6	0	189	1	0	69
	Marbre des carrieres de Villa-Mayor a Sant-Iago.	26668	1	5	60	186	13	0	42
	Marbre jaune des carrieres de Villa-Mayor a Sant-Iago.	26889	1	5	68	188	3	4	39
	Marbre vineux des carrieres de Villa-Mayor a Sant-Iago.	26727	1	5	62	187	1	3	28
	Marbre, dit *breche*, des carrieres de Villa-Mayor a Sant-Iago.	26416	1	5	50	184	14	4	53
	Marbre blanc des carrieres de la vieille Castille.	27008	1	6	0	189	0	7	12
	Marbre blanc tacheté des carrieres de la vieille Castille.	26815	1	5	65	187	11	2	17
	Marbre gris des carrieres de la vieille Castille.	27000	1	6	0	189	0	0	0
	Marbre jaune des carrieres de la vieille Castille.	26909	1	5	69	188	5	6	33
	Marbre jaune tacheté des carrieres de la vieille Castille.	26940	1	5	70	188	9	2	17
	Marbre orangé des carrieres de la vieille Castille.	26913	1	5	69	188	6	2	3
	Marbre vineux des carrieres de la vieille Castille.	26750	1	5	63	187	4	0	0
	Marbre violet des carrieres de la vieille Castille.	26995	1	6	0	188	15	3	37
	Marbre violet pâle des carrieres de la vieille Castille.	27022	1	6	1	189	2	3	51
	Marbre, dit *breche jaune* des carrieres de la vieille Castille.	26821	1	5	65	187	11	7	44
	Marbre, dit *breche violette* des carrieres de la vieille Castille.	26998	1	6	0	188	15	6	15
	Marbre gris de la carriere de San-Pablo.	27338	1	6	13	191	5	6	61
	Marbre noirâtre de la carriere de San-Pablo	27486	1	6	18	192	6	3	33
	Marbre de la carriere d'Espirdo.	26913	1	5	69	188	6	2	3
	Marbre des carrieres del Castanas a Compena Aguilera.	27340	1	6	13	191	6	0	46
	Marbre blanc de la carriere d'Urda.	27290	1	6	11	191	0	3	60

Digitized by Google

TABLE V contenant les pesanteurs spécifiques de différentes substances.

PIERRES CALCAIRES.

Noms des Pierres calcaires.	Variétés.	Pesant. spécifiq.	Poids du pouce cube.			Poids du pied cube.			
		Nombres	onces	gros	grains	livres	onces	gros	grains
Marbres d'Espagne et de Portugal.	Marbre noir de la carriere d'Urda. .	27487	1	6	18	192	6	4	25
	Marbre noirâtre des carrieres dans le voisinage d'Urda.	27176	1	6	7	190	3	5	50
	Marbre panaché des carrieres dans le voisinage d'Urda.	26736	1	5	62	187	2	3	33
	Marbre de la carriere de Cabeça rubia.	26950	1	5	70	188	10	5	14
	Marbre de la carriere du Toboso. . .	27087	1	6	3	189	9	5	69
	Marbre jaune des carrieres Pedro-Munoz.	27509	1	6	19	192	9	0	5
	Marbre rouge des carrieres de Pedro-Munoz.	26672	1	5	60	186	11	2	8
	Marbre de la carriere de Saint-Augustin.	26498	1	5	53	185	7	6	15
	Marbre jaune des carrieres de Cuença.	26921	1	5	69	188	7	1	16
	Marbre violet des carrieres de Cuença.	26940	1	5	70	188	9	2	17
	Marbre de la carriere de Talavera de la Reyna.	27487	1	6	18	192	6	4	25
	Marbre blanc des carrieres de Valence.	26190	1	5	42	183	5	2	17
	Marbre noir des carrieres de Valence	27100	1	6	4	189	11	1	43
	Marbre isabelle des carrieres de Valence.	26889	1	5	68	188	3	4	39
	Marbre isabelle tacheté des carrieres de Valence.	26948	1	5	70	188	10	1	29
	Marbre jaune des carrieres de Valence.	27009	1	6	0	189	1	0	5
	Marbre jaune tacheté des carrieres de Valence.	26543	1	5	55	185	12	6	38
	Marbre rouge des carriers de Valence.	27012	1	6	0	189	1	2	54
	Marbre rouge tacheté des carrieres de Valence.	27013	1	6	0	189	1	3	47
	Marbre couleur de rose des carrieres de Valence.	27076	1	6	3	189	8	4	7
	Marbre gris de lin des carrieres de Valence.	26943	1	5	70	188	9	4	67
	Marbre vineux des carrieres de Valence.	27040	1	6	1	189	4	3	60
	Marbre violet des carrieres de Valence.	26566	1	5	56	185	15	3	10
	Marbre violet tacheté des carrieres de Valence.	26802	1	5	65	187	9	6	43
	Marbre noir des carrieres de Moron.	26853	1	5	67	187	15	4	21
	Marbre gris des carrieres de Moron. .	27053	1	6	2	189	5	7	35
	Marbre des carrieres de Cortes. . . .	27047	1	6	2	189	5	2	8
	Marbre des carrieres de Cabra.	26985	1	5	71	188	14	2	40

Digitized by Google

TABLE V contenant les pesanteurs spécifiques de différentes substances.

PIERRES CALCAIRES.

Noms des Pierres calcaires.	Variétés.	Pesant. spécifiq.	Poids du pouce cube.			Poids du pied cube.			
		Nombres	onces	gros	grains	livres	onces	gros	grains
Marbres d'Espagne et de Portugal.	Marbre, dit *breche*, des carrieres de Cabra.	26794	1	5	64	187	8	7	31
	Marbre blanc du voisinage de la carriere de Cordoue.	27121	1	6	5	189	13	4	39
	Marbre violet de la carriere du voisinage de Cordoue.	27146	1	6	5	190	0	2	59
	Marbre, dit *breche*, de la carriere du voisinage de Cordoue.	27000	1	6	0	189	0	0	0
	Marbre de la carriere d'Altovira. . . .	26888	1	5	68	188	3	3	47
	Marbre blanc des carrieres de Grenade.	27049	1	6	2	189	5	3	65
	Marbre de la carriere d'Elvira.	26881	1	5	68	188	2	5	27
	Marbre de la carriere d'Yexen.	26356	1	5	48	184	7	6	70
	Marbre de la carriere de Loxa.	26934	1	5	70	188	8	4	62
	Marbre des carrieres de Beles el Blanco	26849	1	5	66	187	15	0	51
	Marbre violet des carrieres de Beles el Blanco.	27000	1	6	0	189	0	0	0
	Marbre gris à petites taches, de la carriere de Robledo de Chavela. . . .	28538	1	6	57	199	12	2	3
	Marbre des carrieres de Salieda dans l'Azcaria.	27024	1	6	1	189	2	5	36
	Marbre gris à grandes taches de la carriere de Robledo de Chavela. . .	27905	1	6	34	195	5	2	63
	Marbre, dit *breche*, des carrieres de Salieda dans l'Azcaria.	25493	1	5	16	178	7	1	52
	Marbre, dit *serrancolin d'Espagne*.	27126	1	6	5	189	14	0	65
	Marbre, dit *ravida nouveau d'Espag.*	26667	1	5	60	186	10	5	46
	Marbre violet de Maffra.	27259	1	6	9	190	10	6	10
Marbres d'Italie ou que l'on en tire.	Marbre blanc de Carrare.	27168	1	6	6	190	2	6	38
	Marbre blanc de Paros.	28376	1	6	51	198	10	0	65
	Marbre noir d'Italie.	27120	1	6	4	189	13	3	37
	Marbre noir, dit *petit antique*. . . .	27329	1	6	12	191	4	6	56
	Marbre rouge du Piémont.	28494	1	6	56	199	7	2	45
	Marbre panaché du Piémont.	27296	1	6	11	191	1	1	16
	Marbre bleu turquin de carrare. . . .	27132	1	6	5	189	14	6	20
	Marbre gris de Malte.	27054	1	6	2	189	6	0	28
	Marbre, dit *serrancolin moucheté*. . .	27185	1	6	7	190	4	5	55
	Marbre, dit *porte-or*.	27094	1	6	4	189	10	4	16
	Marbre jaune de Saint-Ange.	26911	1	5	69	188	6	0	18
	Marbre jaune de Sienne.	26778	1	5	64	187	7	1	6
	Marbre, dit *lumachelle antique*. . . .	26752	1	5	62	187	1	7	63

Digitized by Google

TABLE V contenant les pesanteurs spécifiques de différentes substances.

PIERRES CALCAIRES.

Noms des Pierres calcaires.	VARIÉTÉS.	Pesant. spécifiq.	Poids du pouce cube.			Poids du pied cube.			
		Nombres.	onces	gros	grains	livres	onces	gros	grains
Marbres d'Italie ou que l'on en tire.	Marbre verd-d'eau	27276	1	6	10	190	14	7	21
	Marbre, dit *cipolin*	27258	1	6	10	190	12	7	12
	Marbre de la Tarantaise	27697	1	6	26	193	14	0	37
	Marbre violet de Rome	27554	1	6	21	192	14	0	28
	Marbre grec violet	27520	1	6	19	192	10	1	66
	Marbre, dit *l'Africain*	27075	1	6	3	189	8	3	14
	Marbre, dit *breche grise d'Italie*	26896	1	5	68	188	4	2	59
	Marbre, dit *breche violette d'Italie*	28579	1	6	59	200	0	6	56
	Marbre, dit *breche violette de Gênes*	27144	1	6	5	190	0	1	2
Marbres du Nord.	Marbre noir et blanc de Norwege	27281	1	6	10	190	15	3	56
	Marbre gris de Norwerge	27090	1	6	3	189	10	0	46
	Marbre blanc de Sibérie	27185	1	6	7	190	4	5	55
	Marbre gris moucheté de Sibérie	27056	1	6	2	189	6	2	13
	Marbre verd antique	26879	1	5	67	188	2	3	42
	Marbre verd antique de Grenoble	28030	1	6	38	196	3	2	63
	Marbre verd d'Egypte	26683	1	5	60	186	12	3	70
	Marbre verd de mer	26667	1	5	60	186	10	5	46
	Marbre verd de Varalte	27358	1	6	13	191	5	6	61
	Marbre verd de Suse	27144	1	6	5	190	0	1	2
	Marbre verd des Pyrénées	27321	1	6	12	191	3	7	44
	Marbre, dit *pierre de Florence jaune*	25159	1	5	3	176	1	6	33
	Le même pénétré d'eau	25918	1	5	32	181	6	6	38
	Marbre, dit *pierre de Florenc verte*	26153	1	5	40	183	1	1	6
	Le même pénétré d'eau	26509	1	5	54	185	9	0	5
	Pierre herborisée de France	26494	1	5	53	185	7	2	45
	Pierre herborisée de la carriere de Colmenar	26034	1	5	36	182	3	6	33
Pierres à bâtir.	Pierre de Saint-Leu, de la carriere de Saint-Leu	16593	1	0	43	116	2	3	24
	La même pénétrée d'eau	19199	1	1	69	134	6	2	22
	Pierre de Saint-Leu, de la carriere de Maillet	15781	1	0	13	110	7	3	56
	La même pénétrée d'eau	18817	1	1	56	131	11	4	2
	Pierre de Saint-Leu, de la carriere de Notre-Dame	18094	1	1	28	126	10	4	16
	La même pénétrée d'eau	20362	1	2	40	142	8	4	25
	Pierre de vergelet du plus gros grain	16542	1	0	42	115	12	5	46
	La même pénétrée d'eau	19325	1	2	1	135	4	3	14
	Pierre de vergelet de grain fin	17278	1	0	69	120	15	1	6
	La même pénétrée d'eau	19942	1	2	25	139	9	4	2
	Pierre de Lambourde, du côté de Gentilli, de la carriere de M. Mangin	16610	1	0	44	116	4	2	54

TABLE V contenant les pesanteurs spécifiques de différentes substances.

PIERRES CALCAIRES.

Noms des Pierres calcaires.	VARIÉTÉS.	Pesant. spécifiq.	poids du pouce cube.			Poids du pied cube.			
		Nombres.	onces	gros	grains	livres	onces	gros	grains
Pierres à bâtir.	La même pénétrée d'eau.	19045	1	1	63	133	5	0	23
	Pierre de Lambourde, de la carriere de Chavastel, à côté de Bicêtre.	18433	1	1	40	129	0	3	70
	La même penétrée d'eau.	20112	1	2	31	140	12	4	25
	Pierre haute de la plaine du fauxbourg Saint-Marcel.	19932	1	2	24	139	8	3	5
	La même pénétrée d'eau.	21392	1	3	7	149	11	7	17
	Pierre d'Arcueil.	20605	1	2	49	144	3	6	6
	La même pénétrée d'eau.	21891	1	3	25	153	3	6	24
	Piere, dite *banc franc de Châtillon*, de la carriere de Radit.	20985	1	2	63	146	14	2	40
	La même pénétrée d'eau.	22379	1	3	43	156	10	3	42
	Pierre, dite *roche de Châtillon*, de la carriere de Brachet.	21223	1	3	0	148	8	7	58
	La même pénétrée d'eau.	22200	1	3	37	155	6	3	14
	Pierre grossiere du fond de Bagneux, de la carriere de M. Brunet.	19779	1	2	18	138	7	1	71
	La même pénétrée d'eau.	21120	1	2	68	147	13	3	37
	Pierre de Liais du fond de Bagneux, de la carriere de Mme Ricateau.	20778	1	2	56	145	7	1	6
	La même pénétrée d'eau.	22280	1	3	40	155	15	6	3
	Pierre de Liais de la carriere de Mme Ricateau.	21364	1	3	6	149	8	6	10
	La même pénétrée d'eau.	22534	1	3	49	157	11	6	33
	Pierre de Liais du fond de Bagneux, de la carriere de M. Ory.	23902	1	4	28	167	5	0	14
	La même pénétrée d'eau	24607	1	4	55	172	3	7	63
	Pierre de Liais du fond de Bagneux, de la carriere de Charles de Vesse.	23926	1	4	29	167	7	5	50
	La même pénétrée d'eau.	24916	1	4	51	171	9	6	24
	Pierre, dite *petit banc* du val de Meudon, de la carriere de Gardy.	22248	1	3	59	155	11	6	15
	La même pénétrée d'eau.	23365	1	4	8	163	8	7	3
	Pierre haute du val de Meudon, de la carriere de Gardy.	22983	1	3	66	160	14	0	55
	La même pénétrée d'eau.	23805	1	4	25	166	10	1	20
	Pierre fine du val de Meudon, de la carriere de Gardy.	24353	1	4	45	170	7	4	21
	La même pénétrée d'eau.	24869	1	4	64	174	1	2	45
	Pierre du val de Meudon, dite *clicard*, de la carriere d'Ouchain.	22736	1	3	57	159	2	3	33
	La même pénétrée d'eau.	23696	1	4	21	165	13	7	44
	Pierre de Vaugirard, dite *clicard*, de la carriere de Brachet.	23574	1	4	16	165	0	2	22

Digitized by Google

TABLE V contenant les pesanteurs spécifiques de différentes substances.

PIERRES CALCAIRES.

Noms des Pierres calcaires.	Variétés.	Pesant. spécifiq.	Poids du pouce cube.			Poids du pied cube.			
		Nombres.	onces	gros	grains	livres	onces	gros	grains
Pierres à bâtir.	La même pénétrée d'eau.	24189	1	4	39	169	5	1	25
	Pierre fine de Vaugirard.	24582	1	4	54	172	1	1	34
	La même pénétrée d'eau.	25088	1	5	1	175	9	6	61
	Pierre de Chaillot.	20789	1	2	56	145	8	0	68
	La même pénétrée d'eau.	22322	1	3	41	156	4	0	37
	Pierre de Saint-Cloud.	22011	1	3	30	154	1	1	62
	La même pénétrée d'eau.	23058	1	3	69	161	6	3	70
	Pierre de Saint-Nom.	20776	1	2	56	145	6	7	21
	La même pénétrée d'eau.	21977	1	3	28	153	13	3	28
	Pierre, dite *roche de Saint-Nom.*	21058	1	2	66	147	6	3	70
	La même pénétrée d'eau.	22163	1	3	35	155	2	2	3
	Pierre de Saint-Germain second banc.	20114	1	2	31	140	12	6	10
	La même pénétrée d'eau.	21940	1	3	27	153	9	2	17
	Pierre de Conflans-Sainte-Honorine, dite *banc-royal.*	17494	1	1	5	122	7	2	45
	La même pénétrée d'eau.	19953	1	2	25	139	10	5	64
	Pierre de Conflans-Sainte-Honorine, qui tient au banc-royal.	23402	1	4	10	163	13	0	14
	La même pénétrée d'eau.	24264	1	4	42	169	13	4	39
	Pierre de Saillantcourt troisieme banc.	21672	1	3	17	151	11	2	8
	La même pénétrée d'eau.	22903	1	3	63	160	5	1	6
	Pierre de Notre-Dame.	23775	1	4	24	166	6	6	29
	La même pénétrée d'eau.	24304	1	4	43	170	2	0	28
	Pierre de Véteuil.	23706	1	4	21	165	15	0	41
	La même pénétrée d'eau.	24283	1	4	43	169	15	5	41
	Pierre de Chérence.	24682	1	4	57	172	12	3	5
	La même pénétrée d'eau.	25122	1	5	2	175	13	5	22
	Pierre de Saint-Nicolas cinquieme banc	17898	1	1	20	125	4	4	44
	La même pénétrée d'eau.	20293	1	2	38	142	0	6	38
	Pierre de Gannelon deuxieme banc.	22476	1	3	47	157	5	2	36
	La même pénétrée d'eau.	23296	1	4	6	163	1	1	16
	Pierre d'Ivri.	19581	1	2	11	137	1	0	41
	La même pénétrée d'eau.	20956	1	2	62	146	11	0	41
	Pierre de Saint-Maur.	20342	1	2	39	142	6	2	31
	La même pénétrée d'eau.	21255	1	3	2	149	7	6	6
	Pierre de Trouhaine.	22064	1	3	32	154	7	1	25
	La même pénétrée d'eau.	23344	1	4	8	163	6	4	16
	Pierre de Château-Saint-Ange.	24437	1	4	48	171	0	7	40
	La même pénétrée d'eau.	25010	1	4	70	175	1	0	69
	Pierre des carrieres de Bouré.	13864	0	7	14	97	1	6	10
	La même pénétrée d'eau.	17528	1	1	6	122	11	1	6
	Pierre de Tonnerre.	17914	1	1	21	125	6	2	68
	La même pénétrée d'eau.	20511	1	2	46	143	9	1	62

Digitized by Google

TABLE V contenant les pesanteurs spécifiques de différentes substances.

PIERRES DIVERSES.

Noms des Pierres.	Variétés.	Pesant. spécifiq.	Poids du pouce cube.			Poids du pied cube.			
		Nombres.	onces	gros	grains	livres	onces	gros	grains
Pierres à bâtir.	Pierres des bois de Tonnerre.	18545	1	1	44	129	13	0	23
	La même pénétrée d'eau.	20229	1	2	35	141	9	5	13
	Pierre de Passy près Tonnerre. . . .	23340	1	4	7	163	6	0	46
	La même pénétrée d'eau.	24101	1	4	36	168	11	2	36
Spaths pesants, ou sulfates de Baryte.	Spath pesant blanc.	44300	2	6	70	310	1	4	58
	Spath pesant gris, dit *pierre de Bolog.*	44409	2	7	2	310	13	6	33
	Spath pesant rhomboïdal.	44434	2	7	3	311	0	4	62
	Spath pesant octaëdre.	44712	2	7	13	312	15	5	69
	Spath pesant en table.	44228	2	6	67	309	9	4	21
	Spath pesant en stalactite, dit *albâtre pesant.*	42984	2	6	21	300	14	1	48
Spaths fluors, ou Fluate de chaux.	Spath fluor blanc.	31555	2	0	26	220	14	1	20
	Spath fluor rouge faux rubis.	81911	2	0	39	223	6	0	18
	Spath fluor rouge octaëdre.	31815	2	0	36	222	11	2	17
	Spath fluor jaune fausse topaze. . . .	30967	2	0	4	216	12	2	31
	Spath fluor verd fausse émeraude. . .	31817	2	0	36	222	11	4	2
	Spath fluor verd octaëdre.	31838	2	0	37	222	13	6	61
	Spath fluor bleu faux saphir.	31688	2	0	31	221	13	0	32
	Spath fluor bleu-verdâtre fausse aigue marine.	31820	2	0	36	222	11	6	52
	Spath fluor violet fausse améthyste. .	31757	2	0	34	222	4	6	20
	Spath fluor violet pourpré fausse améthyste de Vic ou de Carthagene. .	31857	2	0	37	222	15	7	63
	Spath fluor d'Angleterre.	31796	2	0	35	222	9	1	16
	Spath fluor d'Auvergne.	30943	2	0	3	216	9	4	67
	Spath fluor en stalactite, dit *albâtre vitreux.*	31668	2	0	30	221	10	6	38
Zéolites étincelantes.	Zéolite étincelante rouge d'AEdelfors.	24868	1	4	64	174	1	1	52
	La même pénétrée d'eau.	25157	1	5	3	176	1	4	48
	Zéolite étincelante blanche.	20739	1	2	54	145	2	6	10
	La même pénétrée d'eau.	21436	1	3	8	150	0	6	47
Zéolites non étincelantes.	Zeolite crystallisée.	20833	1	2	58	145	13	2	26
	La même pénétrée d'eau.	21137	1	2	69	147	15	2	54
	Zeolite compacte.	21344	1	3	5	149	6	4	26
	La même pénétrée d'eau.	21466	1	3	9	150	4	1	39
Pierres de poix.	Pierre de poix noire.	20499	1	2	45	143	7	7	7
	Pierre de poix jaune.	20860	1	2	59	146	0	2	40

Digitized by Google

TABLE V contenant les pesanteurs spécifiques de différentes substances.

PIERRES DIVERSES.

Noms des Pierres.	Variétés.	Pesant. spécifiq.	Poids du pouce cube.			Poids du pied cube.			
		Nombres.	onces	gros	grains	livres	onces	gros	grains
Pierres de poix.	Pierre de poix rouge.	26695	1	5	61	186	13	6	52
	Pierre de poix noirâtre.	23191	1	4	2	162	5	3	10
	Pierre de poix brun-verdâtre.	23149	1	4	0	162	0	5	36
	Pierre de poix olivâtre.	23145	1	4	0	162	0	1	66
Porphyres.	Porphyre rouge.	27651	1	6	24	193	8	7	21
	Porphyre verd.	26760	1	5	63	187	5	0	69
	Porphyre rouge des carrieres du voisinage de Cordoue.	27542	1	6	20	192	12	5	46
	Porphyre verd des carrieres du voisinage de Cordoue.	27278	1	6	10	190	15	1	6
	Porphyre rouge du Dauphiné.	27933	1	6	35	195	8	3	70
Serpentins.	Serpentin verd.	28960	1	7	1	202	11	4	12
	Serpentin jaune.	27305	1	6	11	191	2	1	20
	Serpentin violet	26424	1	5	50	184	15	3	65
	Serpentin violet du Dauphiné.	27913	1	6	34	195	6	2	3
	Serpentin noir, dit *variolite du Dauphiné.*	29339	1	7	15	205	5	7	54
Ophite.		29722	1	7	30	208	0	6	66
Granits.	Granitelle.	30626	1	7	63	214	6	0	65
	Granitelle du Dauphiné.	28465	1	6	55	199	4	0	46
Granits.	Granit rouge d'Egypte.	26541	1	5	55	185	12	4	53
	Granit gris d'Egypte.	27279	1	6	10	190	15	1	71
	Granit d'un beau rouge.	27609	1	6	23	193	4	1	48
	Granit couleur de chair.	25827	1	5	28	180	12	4	71
	Granit jaune.	26633	1	5	58	186	6	7	12
	Granit verd.	28875	1	6	70	202	2	0	0
	Granit verd tacheté de rouge	26937	1	5	70	188	8	7	40
	Granit bleu de la Carinthie.	29364	1	7	24	206	15	1	25
	Granit rayé.	27175	1	6	7	190	3	4	58
	Granit du Canada.	27037	1	6	1	189	4	1	11
	Granit rouge de Laponie.	25793	1	5	27	180	8	6	38
	Granit de Russie.	26304	1	5	46	184	2	0	28
	Granit de Danemarck.	26970	1	5	71	188	12	5	9
	Granit rouge de Baden-Weiler.	26270	1	5	45	183	14	1	66
	Granit gris de Baden-Weiler.	26648	1	5	59	186	8	4	44
	Granit cendré de Baden-Weiler.	26351	1	5	48	184	7	2	36
	Granit violet d'Hochberg.	26772	1	5	63	187	6	3	51
	Granit violet tacheté d'Hochberg. . .	25388	1	5	12	177	11	3	47

Digitized by Google

TABLE V contenant les pesanteurs spécifiques de différentes substances.

PIERRES CALCAIRES.

Noms des Pierres calcaires.	Variétés.	Pesant. spécifiq.	Poids du pouce cube.			Poids du pied cube.			
		Nombres.	onces	gros	grains	livres	onces	gros	grains
Granits.	Granit de Sausemberg.	26582	1	5	49	184	10	6	20
	Granit de la Nouvelle-Castille.	26578	1	5	56	186	0	5	64
	Granit des Pyrénées.	26731	1	5	62	187	1	6	70
	Granit rouge des Vosges.	26965	1	5	33	181	12	0	46
	Granit rouge à grains fins des Vosges.	25794	1	5	27	180	8	7	31
	Granit gris des Vosges.	27156	1	6	6	190	1	3	56
	Granit à grains fins, près de la mine de Saint-Brisson dans les Vosges.	26421	1	5	50	184	15	1	16
	Granit de la vallée de Girardmer dans les Vosges.	27163	1	6	6	190	2	2	3
	Granit violet de Gyromagny dans les Vosges.	26852	1	5	66	187	15	3	28
	Granit rouge du Dauphiné.	26451	1	5	51	185	0	2	13
	Granit verd du Dauphiné.	26836	1	5	66	187	13	5	4
	Granit rayé du Dauphiné.	26678	1	5	60	186	11	7	35
	Granit rouge de Sémur en Bourgogne.	26384	1	5	49	184	11	0	5
	Granit gris de Bretagne.	27378	1	6	14	191	10	2	50
	Granit jaunâtre de Bretagne.	26156	1	5	40	182	15	1	62
Pierres de Corne.	Pierre de Corne.	27084	1	6	3	189	9	3	19
	Trapp.	27453	1	6	17	192	2	5	64
Pierres d'azur.	Pierre d'azur.	27675	1	6	25	193	11	4	58
	Pierre d'azur oriental.	27714	1	6	27	193	15	7	54
	Pierre d'azur de Sibérie.	29454	1	7	20	206	2	6	54
Pierres de Volcans.	Pierre-ponce.	9145	0	4	55	64	0	1	66
	Lave pleine de volcans, dite *pierre obsidienne*.	23480	1	4	13	164	5	6	6
	Pierre de Volvic.	23205	1	4	2	162	6	7	49
	Basalte de la chaussée des Géants.	28642	1	6	61	200	7	7	17
	Basalte prismatique d'Auvergne.	24215	1	4	40	169	8	0	46
	Basalte, dit *pierre de touche*.	24153	1	4	38	169	1	1	6

VITRIFICATIONS ARTIFICIELLES.

Verre.	Laitier des forges.	28548	1	6	58	199	15	3	1
	Verre des bouteilles.	27325	1	6	12	191	4	3	14
	Verre verd ou commun des vitres.	26423	1	5	50	184	15	3	1
	Verre blanc ou crystal de France.	28922	1	7	0	202	7	2	8
	Crystal des glaces, de Saint Gobin.	24882	1	4	65	174	2	6	20
	Crystal d'Angletetre, dit *flint glass*.	37293	2	1	19	253	0	6	58
	Verre de borax.	26070	1	5	57	182	7	6	52

Digitized by Google

TABLE V contenant les pesanteurs spécifiques de différentes substances.

PIERRES CALCAIRES.

Noms des Pierres calcaires.	Variétés.	Pesant. spécifiq.	Poids du pouce cube.			Poids du pied cube.			
		Nombres.	onces	gros	grains	livres	onces	gros	grains
Porcelaines.	Porcelaine dure du roi, ou de Seves.	21457	1	3	9	150	3	1	34
	Porcelaine de Limoges.	23410	1	4	10	163	13	7	26
	Porcelaine de la Chine.	23847	1	4	26	166	14	6	66
	Terre cuite brune de la Chine.	23625	1	4	18	165	6	0	0
	Porcelaine moderne de Saxe.	24932	1	4	67	174	8	3	5

MATIERES INFLAMMABLES.

Soufres.	Soufre natif.	20332	1	2	39	142	5	1	34
	Soufre fondu.	19907	1	2	23	139	5	3	56
Soufres combinés avec des métaux.	Pyrite cuivreuse ou marcassite du Dauphiné.	49539	3	1	49	346	12	2	68
	Pyrite cuivreuse ou marcassite cubique.	47016	3	0	27	329	1	6	24
	Pyrite cuivreuse ou marcassite des Incas.	47619	3	0	50	333	5	2	45
	Pyrite ferrugineuse cubique.	39000	2	4	16	273	0	0	0
	Pyrite ferrugineuse ronde.	41006	2	5	19	287	0	5	27
	Pyrite ferrugineuse de Saint-Domingue.	34402	2	1	59	240	13	0	14
Bitumes.	Charbon de terre compacte.	13292	0	6	64	93	0	5	46
	Jais ou jaiet.	12590	0	6	38	88	2	0	46
	Bitume de Judée ou asphalte.	11044	0	5	52	77	4	7	31
	Pétrole.	8783	0	4	40	61	7	5	41
	Naphte.	8475	0	4	28	59	5	1	43
	Ambre gris.	9263	0	4	58	64	13	5	47
	Ambre gris noirâtre.	7803	0	4	3	54	9	7	55
	Ambre ou succin jaune opaque.	10855	0	5	45	75	15	6	6
	Ambre ou succin jaune transparent.	10780	0	5	42	75	7	2	63
	Ambre ou succin rouge.	10834	0	5	44	75	13	3	19
	Ambre ou succin verd.	10829	0	5	44	75	12	6	56

Digitized by Google

TABLE V contenant les pesanteurs spécifiques des fluides.

LIQUEURS.

Noms des especes.	Variétés.	Pesant. spécifiq.	poids du pouce cube.			Poids du pied cube.			
		Nombres	onces	gros	grains	livres	onces	gros	grains
Eaux.	Eau distillée	10000	0	5	13 1/3	70	0	0	0
	Eau de pluie	10000	0	5	13 1/3	70	0	0	0
	Eau de la Seine filtrée	10001,5	0	5	13,4	70	0	1	25
	Eau de l'Yvette	10002				70	0	1	50
	Eau d'Arcueil	10004,6	0	5	13,5	70	0	4	9
	Eau de Ville-d'Avrai	10004,3	0	5	13,5	70	0	3	61
	Eau de Mer	10263	0	5	23	71	3	3	47
	Eau du lac Asphaltite ou de la Mer Morte	12403	0	6	31	86	13	1	6
	LIQUEURS SPIRITUEUSES.								
Vins.	Vin de Bourgogne	9915	0	5	10	69	6	3	60
	Vin de Bourdeaux	9939	0	5	11	69	9	1	25
	Vin de Malvoisie de Madere	10382	0	5	28	72	10	6	20
Liqueurs.	Biere rouge	10338	0	5	26	72	5	6	61
	Biere blanche	10231	0	5	22	71	9	6	70
	Cidre	10181	0	5	20	71	4	2	13
Esprit de vin ou alkool.	Alkool du commerce	8371	0	4	25	58	9	3	30
	Alkool très rectifié	8293	0	4	22	58	0	6	38
	ALKOOL MÉLÉ D'EAU.								
	Parties d'alkool. — Parties d'eau.								
	15. 1	8527	0	4	30	59	11	0	14
	14. 2	8674	0	4	36	60	11	4	3
	13. 3	8815	0	4	41	61	11	2	17
	12. 4	8947	0	4	46	62	10	0	37
	11. 5	9075	0	4	51	63	8	3	14
	10. 6	9199	0	4	55	64	6	2	22
	9. 7	9317	0	4	60	65	3	4	2
	8. 8	9427	0	4	64	65	15	6	43
	7. 9	9519	0	4	67	66	10	1	2
	6. 10	9598	0	4	70	67	2	7	58
	5. 11	9674	0	5	1	67	11	3	66
	4. 12	9733	0	5	3	68	2	0	55
	3. 13	9791	0	5	6	68	8	4	53
	2. 14	9852	0	5	8	68	15	3	28
	1. 15	9919	0	5	10	69	6	7	31

Digitized by Google

TABLE V contenant les pesanteurs spécifiques des fluides.

LIQUEURS SPIRITUEUSES.

Noms des especes.	Variétés.	Pesant. spécifiq.	Poids du pouce cube.			Poids du pied cube.			
		Nombres.	onces	gros	grains	livres	onces	gros	grains
Ethers.	Ether sulfurique	7396	0	3	60	51	12	2	59
	Ether nitrique	9088	0	4	51	63	9	6	61
	Ether muriatique	7296	0	3	56	51	1	1	16
	Ether acétique	8664	0	4	35	60	10	2	68

LIQUEURS ACIDES.

Acides des minéraux.	Acide sulfurique	18409	0	1	39	128	13	6	33
	Acide nitrique	12715	0	6	43	89	0	0	46
	Acide muriatique	11940	0	6	14	83	9	2	17
Acides des végétaux.	Acide acéteux rouge	10251	0	5	23	71	12	0	65
	Acide acéteux blanc	10135	0	5	18	70	15	0	69
	Acide acéteux distillé	10095	0	5	17	70	10	5	9
	Acide acétique	10626	0	5	37	74	6	0	65
Acides des animaux.	Acide phosphorique	15575	1	0	5	109	0	3	14
	Acide formique	9942	0	5	11	69	9	4	2

ALKALI VOLATIL OU AMMONIAC.

Ammoniac.	Ammoniac en liqueur	8970	0	4	47	62	12	5	9

LIQUEURS HUILEUSES.

Huile volatille ou essentielle.	Huile essentielle de térébenthine	8697	0	4	37	60	14	0	37
	Térébenthine liquide	9910	0	5	10	69	5	7	26
	Huile essentielle de lavande	8938	0	4	46	62	9	0	32
	Huile essentielle de girofle	10363	0	5	27	72	8	5	18
	Huile essentielle de canelle	10439	0	5	30	73	1	1	25
Huiles grasses.	Huile d'olives	9153	0	4	54	64	1	1	6
	Huile d'amande douces	9170	0	4	54	64	3	0	23
	Huile de noisettes	9161	0	4	54	64	2	0	18
	Huile de noix	9227	0	4	56	64	9	3	28
	Huile de lin	9403	0	4	63	65	13	1	6
	Huile de chénevis	9258	0	4	58	64	12	7	12
	Huile de pavot	9238	0	4	57	64	10	5	18
	Huile de navette	9193	0	4	55	64	5	4	67
	Huile de baleine	9233	0	4	57	64	10	0	55
	Huile de faîne	9176	0	4	55	64	3	5	50

Digitized by Google

TABLE V contenant les pesanteurs spécifiques des fluides.

LIQUEURS ANIMALES.

Noms des especes.	Variétés.	Pesant. spécifiq.	Poids du pouce cube.			Poids du pied cube.			
		Nombres.	onces	gros	grains	livres	onces	gros	grains
Liqueurs animales.	Lait de femme	10203	0	5	21	71	6	5	64
	Lait de jument	10346	0	5	26	72	6	6	1
	Lait d'ânesse	10355	0	5	27	72	7	6	6
	Lait de chêvre	10341	0	5	26	72	6	1	39
	Lait de brebis	10409	0	5	29	72	13	6	33
	Lait de vache	10324	0	5	25	72	4	2	22
	Petit-lait de vache clarifié	10193	0	5	20	71	5	4	67
	Urine humaine	10106	0	5	17	70	1	6	70
	SUBSTANCES VÉGÉTALES ET ANIMALES								
Résines.	Résine jaune ou blanche du pin	10727	0	5	40	75	1	3	28
	Arcançon	10857	0	5	45	75	15	7	63
	Galipot	10819	0	5	54	75	11	5	59
	Baras	10441	0	5	30	73	1	3	10
	Sandarac	10920	0	5	48	76	7	0	23
	Mastic	10742	0	5	41	75	3	0	60
	Storax	11098	0	5	54	77	10	7	58
	Résine ou gomme copale opaque	11398	0	5	28	72	12	4	44
	Gomme copale transparente	10452	0	5	30	73	2	4	71
	Gomme copale de Madagascar	10600	0	5	36	74	3	1	43
	Gomme copale de la Chine	10628	0	5	37	74	6	2	50
	Résine ou gomme élémi	10182	0	5	20	71	4	3	7
	Résine ou gomme animée d'Orient	10284	0	5	24	71	15	6	33
	Résine ou gomme animée d'Occident	10426	0	5	29	72	15	5	50
	Labdanum	11862	0	6	11	83	0	4	25
	Labdanum *in tortis*	24933	1	4	67	174	8	3	70
	Résine ou gomme de gaïac	12289	0	6	27	86	0	2	68
	Résine de jalap	12185	0	6	23	85	4	5	55
	Sang-dragon	12045	0	6	18	84	5	0	23
	Résine ou gomme laque	11390	0	5	65	79	11	5	32
	Résine tacamaque	10463	0	5	31	73	3	6	61
	Benjoin	10924	0	5	48	76	7	3	65
	Résine ou gomme alouchi	10604	0	5	36	74	3	5	13
	Résine ou gomme caragne	11244	0	5	60	78	11	2	45
	Résine ou gomme élastique	9335	0	4	61	65	5	4	12
	Camphre	9887	0	5	9	69	3	2	54
Gommes résines.	Gomme ammoniaque	12071	0	6	19	84	7	7	44
	Gomme séraphique	12008	0	6	16	84	0	7	12
	Gomme de lierre ou hédérée	12948	0	6	51	90	10	1	29
	Gomme gutte	12216	0	6	24	85	8	1	39
	Euphorbe	11244	0	5	60	78	11	2	45

Digitized by Google

TABLE V contenant les pesanteurs spécifiques des fluides.

SUBSTANCES ANIMALES ET VÉGÉTALES.

Noms des especes.	Variétés.	Pesant. spécifiq.	Poids du pouce cube.			Poids du pied cube.			
		Nombres.	onces	gros	grains	livres	onces	gros	grains
Gommes résines.	Oliban ou encens.	11752	0	6	6	82	1	7	63
	Mirrhe.	13600	0	7	4	95	3	1	43
	Bdellium.	13717	0	5	65	79	10	1	57
	Scammonée d'Alep.	12354	0	6	29	86	7	5	13
	Scammonée de Smirne.	12743	0	6	44	89	3	1	52
	Galbanum.	12120	0	6	20	84	13	3	37
	Assa fœtida.	13275	0	6	64	92	14	6	29
	Sarcocolle.	12684	0	6	42	88	12	4	62
	Opopanax.	16226	1	0	30	113	9	2	36
Gommes.	Gomme commune ou de notre pays.	14817	0	7	49	103	11	4	2
	Gomme arabique.	14523	0	7	38	101	10	4	44
	Gomme adraganthe.	13161	0	6	59	92	2	0	18
	Gomme de Bassora.	14346	0	7	32	100	6	6	1
	Gomme d'Acajou.	14456	0	7	36	101	3	0	41
	Gomme monbain.	14206	0	7	26	99	7	0	41
Sucs épaissis.	Suc de réglisse.	17228	1	0	67	120	9	4	21
	Suc d'acacia.	15153	0	7	62	106	1	1	6
	Suc d'arec.	14573	0	7	40	102	0	1	29
	Cachou.	13980	0	7	18	97	13	6	6
	Aloès hépatique.	13586	0	7	3	95	1	5	4
	Aloès socotrin.	13795	0	7	11	96	9	0	23
	Hypociste	15263	0	7	66	106	13	3	47
	Opium.	13365	0	6	67	93	8	7	3
Fécules.	Indigo.	7690	0	3	71	53	13	2	17
	Roucou.	5956	0	3	6	41	11	0	41
Cires et Graisses.	Cire jaune.	9648	0	5	0	67	8	4	44
	Cire blanche.	9686	0	5	2	67	12	6	47
	Cire d'ouarouchi.	8970	0	4	47	62	12	5	9
	Beurre de cacao.	8916	0	4	45	62	6	4	53
	Blanc de baleine.	9433	0	4	64	66	0	3	70
	Graisse de bœuf.	9232	0	4	57	64	9	7	63
	Graisse de veau.	9341	0	4	61	65	6	1	39
	Graisse de mouton.	9235	0	4	57	64	10	2	40
	Suif.	9419	0	4	64	65	14	7	31
	Graisse de cochon.	9368	0	4	62	65	9	1	52
	Lard.	9478	0	4	66	66	5	4	21
	Beurre.	9423	0	4	64	65	15	3	1

TABLE V contenant les pesanteurs spécifiq. de différentes especes de bois.

BOIS.

Noms des especes.	VARIÉTÉS.	Pesant. spécifiq.	Poids du pouce cube.			Poids du pied cube.			
		Nombres.	onces	gros	grains	livres	onces	gros	grains
Bois.	Chêne de 60 ans, le cœur.	11700	0	6	5	81	14	3	14
	Liege.	2400	0	1	18	16	12	6	29
	Orme, le tronc.	6710	0	3	35	46	15	4	12
	Frêne, le tronc.	8450	0	4	27	59	2	3	14
	Hêtre.	8520	0	4	30	59	10	1	66
	Aune.	8000	0	4	11	56	0	0	0
	Erable.	7550	0	3	66	52	13	4	58
	Noyer de France.	6710	0	3	35	46	15	4	12
	Saule.	5850	0	3	2	40	15	1	43
	Tilleul.	6040	0	3	9	42	4	3	60
	Sapin mâle.	5500	0	2	61	38	8	0	0
	Sapin femelle.	4980	0	2	42	34	13	6	6
	Peuplier.	3830	0	1	71	26	12	7	49
	Peuplier blanc d'Espagne.	5294	0	2	54	37	0	7	31
	Pommier.	7930	0	4	8	55	8	1	20
	Poirier.	6610	0	3	31	46	4	2	40
	Coignassier.	7050	0	3	47	49	5	4	58
	Nefflier.	9440	0	4	64	66	1	2	17
	Prunier.	7850	0	4	5	54	15	1	43
	Olivier.	9270	0	4	58	64	14	1	66
	Cerisier.	7150	0	3	51	50	0	6	29
	Coudrier ou noisetier.	6000	0	3	8	42	0	0	0
	Buis de France.	9120	0	4	52	63	13	3	37
	Buis de Hollande.	13280	0	6	64	92	15	2	63
	If de Hollande.	7880	0	4	6	55	2	4	35
	If d'Espagne.	8070	0	4	13	56	7	6	52
	Cyprès d'Espagne.	6440	0	3	24	45	1	2	17
	Thuya.	5608	0	2	65	39	4	0	55
	Grenadier.	13540	0	7	1	94	12	3	60
	Mûrier d'Espagne.	8970	0	4	47	62	12	5	9
	Syringa.	10989	0	5	50	76	14	6	10
	Genevrier d'Espagne.	5560	0	2	64	38	14	5	55
	Laurier d'Espagne.	8220	0	4	19	57	8	5	9
	Garence, la racine.	7650	0	3	70	53	8	6	29
	Vigne.	13270	0	6	63	92	14	1	66
	Sureau.	6950	0	3	43	48	10	3	14
	Jasmin d'Espagne.	7700	0	3	71	53	14	3	14
	Gaïac.	15330	0	6	66	93	4	7	49
	Ebénier d'Amérique.	13310	0	6	65	93	2	5	55
	Ebénier des Indes.	12090	0	6	19	84	10	0	46
	Buis rouge de Brésil.	10310	0	5	25	72	2	5	55
	Bois de campêche.	9130	0	4	53	63	4	4	35
	Cedre sauvage.	5960	0	3	7	41	11	4	12

Digitized by Google

TABLE V contenant les pesanteurs spécifiq. de différentes especes de bois.

BOIS.

Noms des especes.	VARIÉTÉS.	Pesant. spécifiq.	Poids du pouce cube.			Poids du pied cube.			
		Nombres.	onces	gros	grains	livres	onces	gros	grains
Bois.	Cedre de Palestine.	6130	0	3	13	42	14	4	55
	Cedre des Indes.	13150	0	6	59	92	0	6	29
	Bois de coco.	10403	0	5	28	72	13	1	6
	Lentisque	8490	0	4	29	59	6	7	3
	Oranger	7050	0	3	47	49	5	4	58
	Citronnier.	7263	0	3	55	50	13	3	47
	Limonier.	7033	0	3	47	49	3	5	41
	Sassafras.	4820	0	2	36	33	11	6	52
	Santal blanc.	10410	0	5	29	72	13	7	26
	Santal jaune.	8090	0	4	14	56	10	0	46
	Santal rouge.	11280	0	5	61	78	15	2	63
	Kinkina.	7840	0	4	5	54	14	0	36

TABLE VI des pesanteurs de différents gas à 28 pouces de pression et à 10 degrés du thermometre.

NOMS DES AIRS OU GAS.	Poids du pouce cube.	Poids du pied cube.			OBSERVATIONS.
	grains	onces	gros	grains	
Air atmosphérique.	0,46005	1	3	3,00	D'après M. Lavoisier.
Gas azoth.	0,44444	1	2	48,00	D'après M. Lavoisier.
Gas oxygene.	0,50694	1	4	12,00	D'après M. Lavoisier.
Gas hydrogene.	0,03539	0	0	61,15	D'après M. Lavoisier.
Gas acide carbonique.	0,68985	2	0	40,00	D'après M. Lavoisier.
Gas nitreux.	0,54690	1	5	9,04	D'après M. Kirwan.
Gas ammoniac.	0,27488	0	6	43,00	D'après M. Kirwan.
Gas acide sulfureux.	0,03820	3	0	66,00	D'après M. Kirwan.

Digitized by Google

TABLE VII des expansions de l'air et des principaux gas par la chaleur; donnée par M. de Morveau, d'après les expériences de M. Duvernois, dans le premier volume des Annales de Chymie, la chaleur étant observée de 20 en 20 degrés sur le thermometre de M. Réaumur, depuis la congélation jusqu'à l'ébullition de l'eau, avec les quantités totales de dilatation entre ces deux limites, le volume primitif ou à zéro étant pris pour unité.

	de 0 à 20 degrés.	de 20 à 40 degrés.	de 40 à 60 degrés.	de 60 à 80 degrés.	de 0 à 80 degrés.
L'air commun se dilate de	$\frac{1}{12,67}$	$\frac{1}{5,61}$	$\frac{1}{2,49}$	$\left(\frac{1}{3,57}\right)$	$\frac{1}{1,067}$
L'air vital.	$\frac{1}{22,12}$	$\frac{1}{4,92}$	$\frac{1}{1,53}$	$\left(3+\frac{1}{1,73}\right)$	$4+\frac{1}{2,09}$
Le gas azoth.	$\frac{1}{29,41}$	$\frac{1}{5,41}$	$\frac{1}{1,82}$	$5+\frac{1}{57,2}$	$5+\frac{1}{1,062}$
Le gas hydrogene. . . .	$\frac{1}{11,91}$	$\frac{1}{6,92}$	$\left(\frac{1}{6,85}\right)$	$\left(\frac{1}{58,82}\right)$	$\frac{1}{2,55}$
Le gas nitreux.	$\frac{1}{15,33}$	$\frac{1}{9,00}$	$\frac{1}{3,739}$	$\left(\frac{1}{6,28}\right)$	$\frac{1}{1,65}$
Le gas acide carbonique. .	$\frac{1}{9,049}$	$\frac{1}{1,099}$	$\frac{1}{2,31}$	$\left(\frac{1}{3,69}\right)$	$1+\frac{1}{106,3}$
Le gas ammoniacal. . . .	$\frac{1}{3,58}$	$\frac{1}{1,75}$	$1+\frac{1}{1,35}$	$\left(3+\frac{1}{4,69}\right)$	$5+\frac{1}{1,248}$

TABLE VIII des expansions de l'air commun de degré en degré, déduite de la table précédente par la méthode d'interpolation de M. de Prony; le volume primitif est supposé égal à 10000.

0	000	11	354	21	848	31	1589	41	2703	51	4375
1	026	12	395	22	909	32	1681	42	2841	52	4582
2	053	13	439	23	973	33	1777	43	2986	53	4798
3	082	14	482	24	1040	34	1877	44	3136	54	5023
4	111	15	528	25	1109	35	1981	45	3292	55	5258
5	143	16	576	26	1181	36	2189	46	3457	56	5501
6	174	17	626	27	1256	37	2202	47	3624	57	5754
7	207	18	678	28	1334	38	2320	48	3801	58	6027
8	243	19	733	29	1416	39	2443	49	3985	59	6302
9	279	20	789	30	1496	40	2570	50	4178	60	6574
10	315										

TABLE IX contenant les hauteurs en pouces des colonnes de mercure et les hauteurs en pied-droit des colonnes d'eau, représentatives de la même pression.

Mercure.	0	10	20	30	40
0	0,00000	11,42860	22,85720	34,28580	45,71440
1	1,14286	12,57146	24,00006	35,42866	46,85726
2	2,28572	13,71432	25,14292	36,57152	48,00012
3	3,42858	14,85718	26,28578	37,71438	49,14298
4	4,57144	16,00004	27,42864	38,85724	50,28584
5	5,71430	17,14290	28,57150	40,00010	51,42870
6	6,85716	18,28576	29,71436	41,14296	52,57156
7	8,00002	19,42862	30,85722	42,28582	53,71442
8	9,14288	20,57148	32,00008	43,42868	54,85728
9	10,28574	21,71434	33,14294	44,57154	56,00014
10	11,42860	22,85720	34,28580	45,71440	57,14300

Mercure.	50	60	70	80	90
0	57,14300	68,57160	80,00020	91,42880	102,85740
1	58,28586	69,71446	81,14306	92,57166	104,00026
2	59,42872	70,85732	82,28592	93,71452	105,14312
3	60,57158	72,00018	83,42878	94,85738	106,28598
4	61,71444	73,14304	84,57164	96,00024	107,42884
5	62,85730	74,28590	85,71450	97,14310	108,57170
6	64,00016	75,42876	86,85736	98,28596	109,71456
7	65,14302	76,57162	88,00022	99,42882	110,85742
8	66,28588	78,71448	89,14308	100,57168	112,00028
9	67,42874	79,85734	90,28594	101,71454	113,14314
10	68,57160	80,00020	91,42880	102,85740	114,28600

Parties proportionnelles d'un pied d'eau pour chaque 10e d'un pouce de mercure.

0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0,1143	0,2286	0,3428	0,4571	0,5714	0,6857	0,8000	0,9143	1,0286	1,1429

Parties proportionnelles d'un pouce de mercure pour chaque 10e d'un pied d'eau.

0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0,0875	0,1750	0,2625	0,3500	0,4375	0,5250	0,6125	0,7000	0,7875	0,8750

Digitized by Google

TABLE X pour connoître, soit d'après le calcul, soit d'après l'expérience, la force expansive de la vapeur de l'eau à différentes températures mesurées sur le thermometre de Réaumur.

DEGRÉS du thermometre.	FORCE expansive déduite de l'expérience.	FORCE expansive déduite du calcul.	DIFFÉRENCE entre les résultats du calcul et ceux de l'expérience.	DEGRÉS du thermometre.	FORCE expansive déduite de l'expérience.	FORCE expansive déduite du calcul.	DIFFÉRENCE entre les résultats du calcul et ceux de l'expérience.	DEGRÉS du thermometre.	FORCE expansive déduite de l'expérience.	FORCE expansive déduite du cacul.	DIFFÉRENCE entre les résultats du calcul et ceux de l'expérience.
1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
0	0,00	0,00	+ 0,00	37	2,45	2,44	— 0,01	74	20,60	20,49	— 0,11
1	0,00	0,01	+ 0,01	38	2,57	2,60	+ 0,03	75	21,75	21,59	— 0,16
2	0,00	0,03	+ 0,03	39	2,75	2,78	+ 0,03	76	22,90	22,75	— 0,15
3	0,00	6,05	+ 0,05	40	2,92	2,97	+ 0,05	77	24,15	23,97	— 0,18
4	0,02	0,07	+ 0,05	41	3,10	3,15	+ 0,05	78	25,50	25,36	— 0,14
5	0,02	0,10	+ 0,08	42	3,27	3,36	+ 0,09	79	26,67	26,59	— 0,08
6	0,05	0,12	+ 0,07	43	3,47	3,57	+ 0,10	80	28,00	28,00	0,00
7	0,07	0,15	+ 0,08	44	3,70	3,80	+ 0,10	81	29,60	29,46	— 0,14
8	0,10	0,17	+ 0,07	45	3,95	4,04	+ 0,09	82	31,30	30,98	— 0,32
9	0,12	0,20	+ 0,08	46	4,25	4,29	+ 0,04	83	33,00	32,58	— 0,42
10	0,15	0,23	+ 0,08	47	4,45	4,56	+ 0,11	84	34,60	34,25	— 0,35
11	0,18	0,27	+ 0,09	48	4,75	4,84	+ 0,09	85	36,45	35,98	— 0,47
12	0,22	0,30	+ 0,08	49	5,00	5,13	+ 0,13	86	38,10	37,80	— 0,30
13	0,27	0,34	+ 0,07	50	5,35	5,44	+ 0,09	87	40,00	39,70	— 0,30
14	0,30	0,38	+ 0,08	51	5,70	5,77	+ 0,07	88	42,20	41,64	— 0,56
15	0,35	0,42	+ 0,07	52	6,05	6,12	+ 0,07	89	44,30	43,73	— 0,67
16	0,40	0,47	+ 0,07	53	6,50	6,48	— 0,02	90	46,40	45,87	— 0,53
17	0,45	0,52	+ 0,07	54	6,90	6,87	— 0,03	91	48,40	48,09	— 0,31
18	0,52	0,57	+ 0,05	55	7,32	7,28	— 0,04	92	50,50	50,41	— 0,09
19	0,58	0,62	+ 0,04	56	7,85	7,70	— 0,15	93	53,00	52,79	— 0,21
20	0,65	0,68	+ 0,03	57	8,40	8,14	— 0,26	94	55,30	55,25	— 0,05
21	0,75	0,75	0,00	58	8,85	8,62	— 0,23	95	57,80	57,80	0,00
22	0,82	0,82	0,00	59	9,35	9,11	— 0,24	96	60,50	60,42	— 0,08
23	0,90	0,89	— 0,01	60	9,95	9,63	— 0,32	97	63,40	63,11	— 0,29
24	0,97	0,96	— 0,01	61	10,40	10,18	— 0,32	98	66,20	65,88	— 0,32
25	1,05	1,04	— 0,01	62	11,00	10,71	— 0,29	99	69,00	68,69	— 0,31
26	1,12	1,12	0,00	63	11,70	11,36	— 0,34	100	71,80	71,55	— 0,25
27	1,22	1,21	— 0,01	64	12,40	12,00	— 0,40	101	75,00	74,44	— 0,56
28	1,32	1,31	— 0,01	65	13,20	12,67	— 0,53	102	78,20	77,36	— 0,84
29	1,42	1,40	— 0,02	66	13,80	13,37	— 0,53	103	81,00	80,27	— 0,73
30	1,52	1,50	— 0,02	67	14,50	14,12	— 0,38	104	84,00	83,26	— 0,74
31	1,65	1,63	— 0,02	68	15,25	14,90	— 0,35	105	86,80	85,99	— 0,81
32	1,78	1,74	— 0,04	69	16,10	15,72	— 0,38	106	89,00	88,74	— 0,26
33	1,90	1,86	— 0,04	70	16,90	16,58	— 0,32	107	91,30	91,37	+ 0,07
34	2,00	2,00	0,00	71	17,80	17,48	— 0,32	108	93,50	93,82	+ 0,32
35	2,15	1,14	— 0,01	72	18,70	18,43	— 0,27	109	95,60	96,04	+ 0,44
36	2,27	2,28	— 0,01	73	19,50	19,43	— 0,07	110	98,00	98,36	+ 0,36

Digitized by Google

TABLE XI servant à connoître la différence entre les niveaux vrai et apparent, soit qu'on ait, ou qu'on n'ait pas égard à la réfraction terrestre, avec l'indication des erreurs qu'on connoît lorsqu'on néglige cette réfraction.

DISTANCE en toises.	ÉLÉVATION du niveau apparent au-dessus du niveau vrai, exprimé en pieds,		DIFFÉRENCE entre les deux élévations ci-à-côté.	DISTANCE en toises.	ÉLÉVATION du niveau apparent au-dessus du niveau vrai, exprimé en pieds,		DIFFÉRENCE entre les deux élévations ci-à-côté.
	sans avoir égard à la réfraction terrestre.	ayant égard à la réfraction terrestre.			sans avoir égard à la réfraction terrestre.	ayant égard à la réfraction terrestre.	
50	0,0023	0,0020	0,0003	1050	1,0000	0,8571	0,1429
60	0,0035	0,0030	0,0005	1100	1,1088	0,9504	0,1584
70	0,0046	0,0040	0,0006	1150	1,2141	1,0407	0,1734
80	0,0058	0,0050	0,0008	1200	1,3200	1,1314	0,1886
90	0,0075	0,0064	0,0011	1250	1,4323	1,2277	0,2046
100	0,0092	0,0081	0,0011	1300	1,5492	1,3279	0,2213
120	0,0133	0,0114	0,0019	1400	1,7963	1,5397	0,2566
140	0,0179	0,0154	0,0025	1500	2,0625	1,7678	0,2947
150	0,0208	0,0178	0,0030	1600	2,3466	2,0257	0,3209
160	0,0237	0,0205	0,0032	1700	2,6487	2,2989	0,3498
180	0,0295	0,0253	0,0042	1800	2,9699	2,5456	0,4243
200	0,0370	0,0317	0,0053	1900	3,3090	2,9363	0,4727
220	0,0445	0,0482	0,0063	2000	3,6667	3,1431	0,5236
240	0,0527	0,0451	0,0076	2100	4,0422	3,4648	0,5774
260	0,0579	0,0496	0,0083	2200	4,4363	3,8029	0,6334
280	0,0625	0,0536	0,0089	2300	4,8489	4,1562	0,6927
300	0,0723	9,0620	0,0103	2400	5,2800	4,5258	0,7542
320	0,0827	0,0709	0,0118	2500	5,7292	4,9107	0,8185
340	0,0937	0,0803	0,0134	2600	6,1967	5,3115	0,8852
360	0,1059	0,0908	0,0151	2700	6,6823	5,7277	0,9546
380	0,1128	0,0967	0,0161	2800	7,1863	6,1597	1,0266
400	0,1180	0,1012	0,0168	2900	7,7089	6,6076	1,1013
420	0,1325	0,1136	0,0189	3000	8,2500	7,0714	1,1786
440	0,1470	0,1260	0,0210	3100	8,8090	7,5506	1,2584
460	0,1620	0,1403	0,0217	3200	9,3866	8,0456	1,3410
480	0,1777	0,1523	0,0254	3300	9,9826	8,5565	1,4261
500	0,1875	0,1607	0,0268	3400	10,6105	9,0947	1,5158
520	0,1944	0,1667	0,0277	3500	11,2292	9,6250	1,6042
540	0,2112	0,1810	0,0302	3600	11,8796	10,1825	1,6971
560	0,2292	0,1964	0,0328	3700	12,5491	10,7564	1,7927
580	0,2483	0,2128	0,0355	3800	13,2367	11,3457	1,8910
600	0,2674	0,2306	0,0367	3900	13,9421	11,9504	1,9917
620	0,2772	0,2376	0,0396	4000	14,6667	12,5714	2,0953
660	0,2876	0,2465	0,0411	4100	15,4091	13,2078	2,2013
680	0,3084	0,2644	0,0440	4200	16,1701	13,8601	2,3100
700	0,3299	0,2827	0,0472	4300	16,9490	14,5278	2,4212
750	0,3871	0,3318	0,0553	4400	17,7465	15,2113	2,5352
800	0,4490	0,3849	0,0641	4500	18,5625	15,9107	2,6518
850	0,5156	0,4420	0,0736	4600	19,3964	16,6255	2,7709
900	0,5868	0,5030	0,0838	4700	20,2494	17,4566	2,8928
950	0,6620	0,5675	0,0945	4800	21,1198	18,1027	3,0171
1000	0,7425	0,6364	0,1061	4900	22,0092	18,8651	3,1441
1050	0,7847	0,6726	0,1121	5000	22,9167	19,6431	3,2736
1000	0,9167	0,7857	0,1310	6000	33,0000	28,2857	4,7143

Digitized by Google

EXPLICATION

DES TABLES.

TABLE 1.

On sait, pour peu qu'on ait calculé, combien les multiplications, divisions, extractions de racines, etc. entraînent de longueurs et de causes d'erreur quand on opere sur des nombres complexes. La premiere table a pour objet de faciliter l'usage des logarithmes dans tous les calculs où il entre de pareils nombres composés de toises, pieds, pouces, etc., en donnant le moyen de réduire sur-le-champ les nombres complexes en nombres décimaux.

On a supposé l'unité principale divisée en 1728 parties, qui valent chacune $\frac{1}{2}$ ligne pour la toise, $\frac{1}{12}$ de ligne pour le pied, un pouce cube pour le pied cube, et généralement 0,000579 pour une unité; ainsi la premiere colonne à gauche des pouces cubes rapportés au pied cube, comme unité, suit l'ordre naturel des nombres; la deuxieme colonne des nombres décimaux est une progression arithméthique dont la différence est 0,000579 (1), la 3ᵉ colonne où la toise est l'unité, procede de demi-ligne en demi-ligne; et la 4ᵉ colonne où le pied est l'unité, procede par 12ᵉˢ de ligne.

Supposons qu'on veuille réduire en nombre décimal le nombre complexe 6 toises 5 pieds 7 pouces 8 lignes 9 points; je trouve que le nombre décimal correspondant à 5 pieds 7 pouces 8 lignes 9′ est 0,940394; à quoi il faut ajouter pour $3' = \frac{6'}{2}$, le nombre $\frac{0,000579}{2} = 0,000289$, et la somme est $= 0,940683$.

Ainsi le nombre complexe proposé est égal à 6,940683 toises.

Supposons qu'on veuille réduire 0,762309 de pied cube en pouces cubes; je trouve d'abord dans la 2ᵉ colonne 0,762153, répondant à 1317 pouces cubes; la différence 0,000156 étant divisée par 0,000579, qui répond à 1 pouce cube, donne au quotient 0,27, ainsi le nombre cherché de pouces cubes est 1317,27.

Il est évident que les colonnes de la toise et du pied peuvent représenter des fractions de toises et de pieds quarrés ou cubes d'après les subdivisions adoptées pour le toisé dans les ouvrages des ponts et chaussées.

TABLES 2 et 3.

Il est très ordinaire en mécanique de substituer à une vîtesse la hauteur due à cette vîtesse, et réciproquement : la premiere partie de l'Architecture Hydraulique offre plusieurs exemples de cette substitution. On a en conséquence calculé avec soin les tables 2 et 3, qui seront, on ose

(1) La fraction $\frac{1}{1728}$ n'est pas rigoureusement égale à 0,000579; mais on a eu égard à la différence.

l'espérer, regardées comme très-propres à remplir l'objet auquel elles sont destinées.

Dans la 2e table, les pieds et 10es de pied, marquant les hauteurs dues aux vitesses, occupent la premiere colonne à gauche, et les vitesses par secondes auxquelles ces hauteurs répondent, sont dans la colonne à côté. Les colonnes suivantes servent pour les vitesses par secondes répondant à des hauteurs exprimées en pieds et 100es de pied.

Supposons qu'on veuille connoître la vitesse par secondes due à une hauteur de 17,99 pieds; je cherche 17,9 dans la colonne intitulée *hauteurs*; et le nombre 32,961, qui se trouve dans la ligne horizontale de 17,9 et dans la colonne verticale de 0,09, est le nombre cherché.

La 3e table est l'inverse de la 2e, la disposition et l'usage en sont les mêmes.

TABLE 4.

Cette quatrieme table forme le complément des deux précédentes; la disposition et l'usage en sont les mêmes; la premiere colonne à gauche exprime les secondes et les 10es de seconde qu'emploieroit un corps à tomber dans le vuide d'une hauteur exprimée, en pieds-de-roi dans la colonne à côté. Les autres colonnes servent lorsque le temps est exprimé en seconde, et 100es de seconde, ainsi que l'indiquent les fractions décimales qui sont en tête de ces colonnes.

TABLE 5.

Cette table à laquelle, vu son utilité, on a donné une certaine étendue, est extraite de l'ouvrage de M. Brisson : la colonne intitulée *pesanteur spécifique*, est, d'après ce qu'on a dit art. (528), rapportée à l'eau distillée, dont on suppose la pesanteur spécifique égale à 10000. Au reste cette table n'a pas besoin d'autre explication que celle des titres des colonnes.

TABLE 6.

Cette table, qui n'a également besoin d'aucune explication, est tirée du Traité de Chymie de M. de Lavoisier.

TABLES 7 et 8.

Les titres de la table 7 tiennent lieu d'une explication suffisante; l'objet de la table 8 a été de donner, pour l'air commun, de degré en degré, ce que la table 7 ne donne que de 20 en 20 degrés. La méthode d'interpolation qui a servi à calculer cette table est la même que celle employée pour la force expansive de la vapeur de l'eau et de l'esprit de vin. La formule donnée par cette méthode dans le cas dont il sagit ici, et applicable jusqu'à 70° environ, est,

$y = e^{\mu + \lambda x} - e^{\mu' + \lambda' x} + A$, dans laquelle on a $c = 10$, $\mu = 2{,}7976118$, $\mu' = -6{,}5311728$, $\lambda = 0{,}0176801$, $\lambda' = 0{,}1291305$, $A = -627{,}497$, $y =$ l'expansion de l'air, $x =$ le nombre de degrés du thermometre.

Observons que le deuxieme terme de cette équation peut sensiblement être

négligé, vu sa petitesse, jusqu'à 50 ou 60 degrés, ce qui, dans l'étendue de la 8e table, réduit l'équation à $y = e^{\mu + \lambda x} - 627{,}497$. On voit, par la progression des termes, que l'air est d'autant plus dilatable qu'il est déja dilaté; ce qui rend raisou des différences entre les résultats des expériences de plusieurs physiciens sur la dilatation de l'air répondant à un degré de variation, dans la température pour laquelle on ne peut adopter une valeur moyenne constante, que dans l'intervalle de quelques degrés. C'est ce que nous avons fait art. (art. 524, *note*), en prenant 0,005 pour la dilatation moyenne applicable depuis 10 jusqu'à 20 degrés.

Le lecteur verra peut-être avec plaisir dans la table suivante, le rapprochement des dilatabilités correspondantes à un degré de variation dans la température, trouvées par les physiciens dont on vient deparler, et des températures auxquelles ces dilatabilités conviennent.

Degrés du thermometre.	Dilatabilité pour un degré de variations.	Dilatabilité trouvée pardifférents physiciens.	
10	0,003791. .		
11	0,003940. .		
12	0,004088. .		
13	0,004254. .	0,004244.	M. de Saussure.
14	0,004392. .		
15	0,004559. .	0,004651.	MM. Lavoisier et Deluc.
16	0,004727. .		
17	0,004912. .		
18	0,005094. .		
19	0,005264. .	0,005208.	M. Trembley.
20	0,005459. .	0,005410.	MM. Monge, Bertholet et Vandermonde.
21	0,005660. .		
22	0,005848. .	0,005807.	M. Roi.

TABLE 9.

L'objet de cette table est de convertir en colonnes d'eau les pressions exprimées en colonnes de mercure et réciproquement.

Supposons qu'on veuille connoître la hauteur en pieds d'une colonne d'eau dont la pression seroit équivalente à celle d'une colonne de mercure de 67,89 pouces, je cherche la colonne qui a 60 en tête, et je descends verticalement jusqu'à la ligne répondante au nombre 7 dans la colonne intitulée *mercure;* le nombre pris dans cette ligne au-dessous de 60 est 76,57162

Je cherche ensuite dans la premiere des petites tables des parties proportionnelles, le nombre 0,8, auquel répond. . 0,91430

Puis le nombre répondant à 0,9, dont je recule les chiffres d'un rang vers la droite, parceque ce sont des 100es que je cherche, ... 0,10286

Somme, ... 77,58878

Ainsi la hauteur cherchée de la colonne d'eau est de . . 77,58878 pieds.

Supposons maintenant qu'on veuille chercher la hauteur en pouces de la colonne de mercure dont la pression équivaudroit à celle d'une colonne d'eau de 95,1251 pieds.

Je vois d'abord dans les tables, que 94,857 pieds d'eau équivalent à une colonne de mercure de . . . . . 83,0000 pouc.

Il reste 0,2677 de pieds, pour lesquels la 2e petite table des parties proportionnelles fournit d'abord pour 0,2, . . 0,1750

Ensuite pour 0,06, ... 0,0525

pour 0,007, ... 0,0061

pour 0,0007. 0,0006

Somme. 83,2342

Ainsi la hauteur cherchée de la colonne de mercure est de 83,2342 pouces.

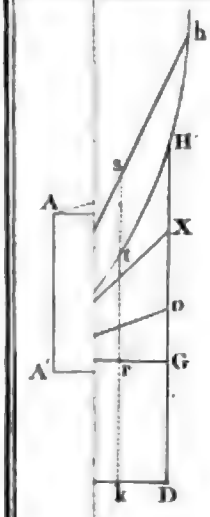
TABLE 10.

Tout ce qui est relatif à la construction et à l'intelligence de cette table est expliqué très en détail (art. 1309 et suivants), principalement aux art. (1322, 1324 et 1325).

TABLE 11.

Cette table est construite, d'après ce qui est exposé à l'art. 571 et dans la note de cet article; elle n'a pas besoin d'autres explications que celles qui sont aux titres des colonnes. On voit, à l'inspection de la colonne des différences, qu'il y a bien des circonstances où il est indispensable d'avoir égard à la réfraction terrestre; et c'est faute d'avoir pris une pareille précaution que des opérations, bien faites d'ailleurs, laissent souvent de grandes incertitudes.

Digitized by Google



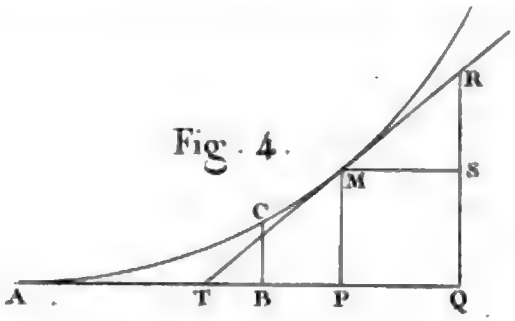


Fig. 4.

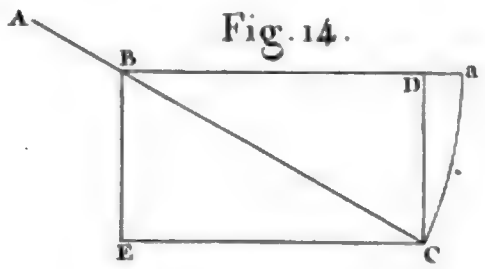


Fig. 14.

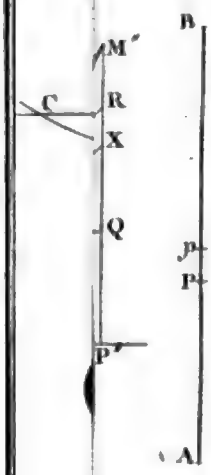


Fig. 8.
pour l'art.
(41.)

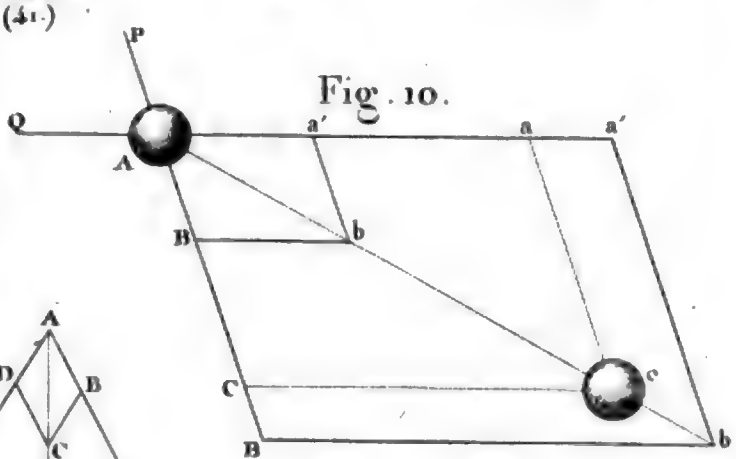
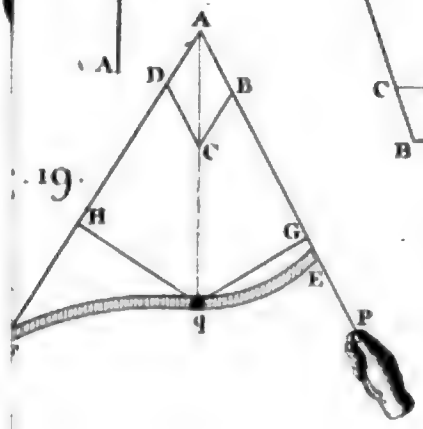


Fig. 10.



. 19.

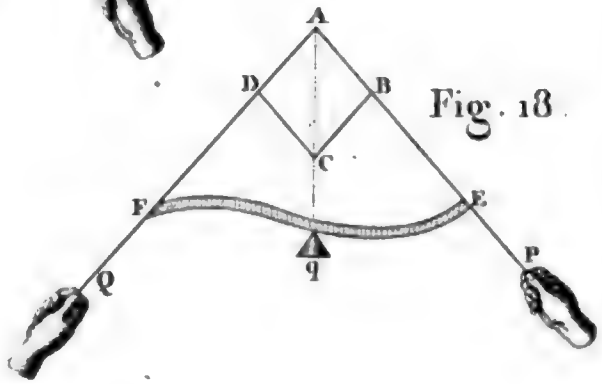


Fig. 18.

A

Bernard Sculpsit.

Fig. 21.

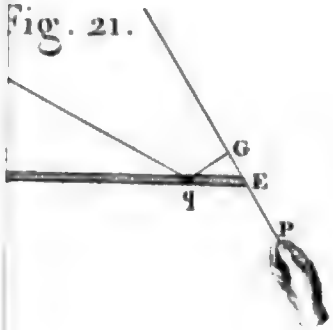
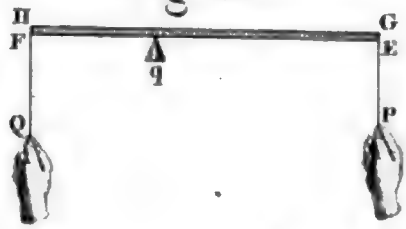


Fig. 22.



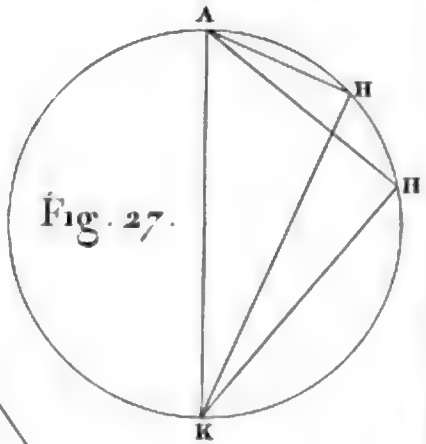


Fig. 27.

g. 26.

Fig. 28.

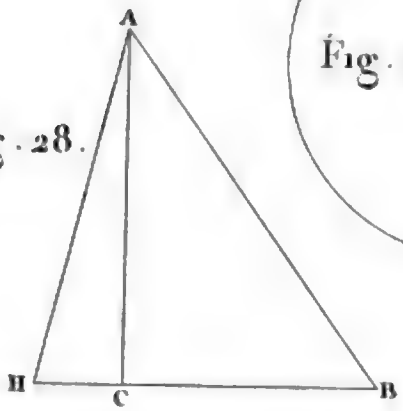
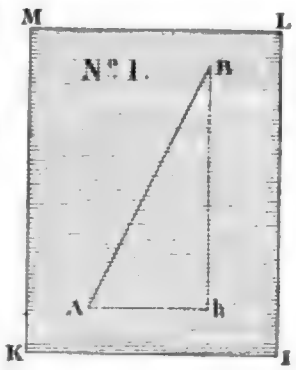
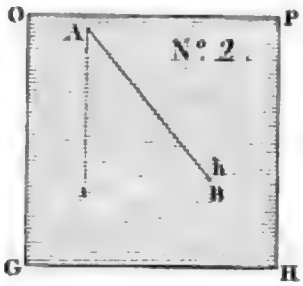
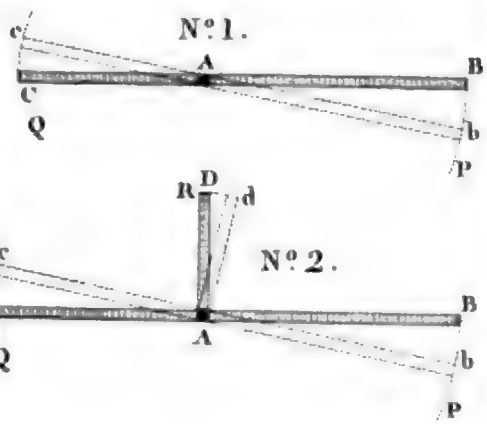
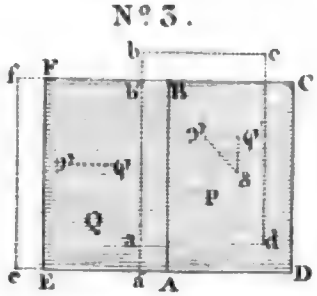


Fig. 31. pour les art. (136 137. et 138.)









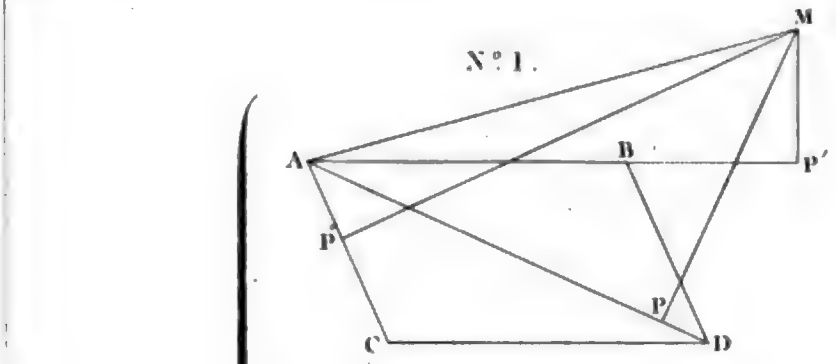
Bernard Sculpsit

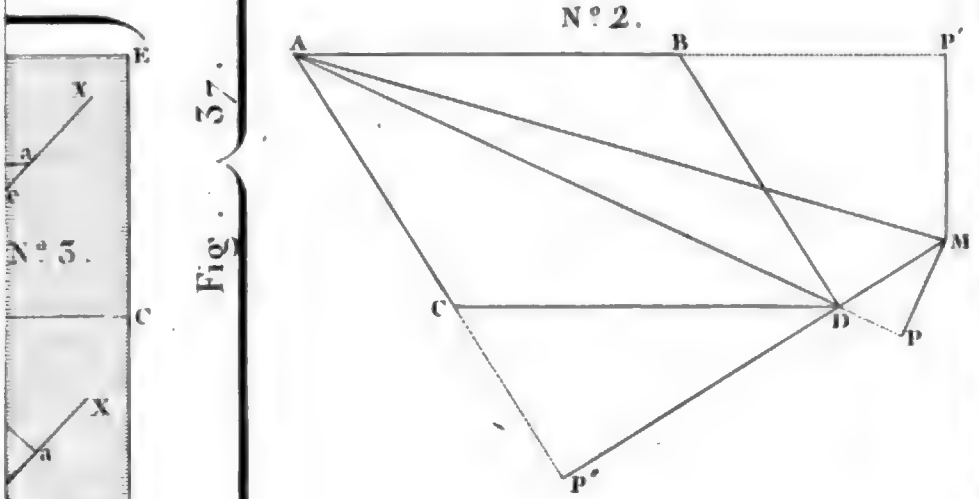
Digitized by Google

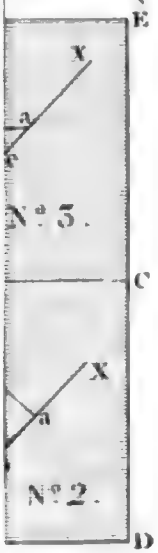
E.

Pl. 5.

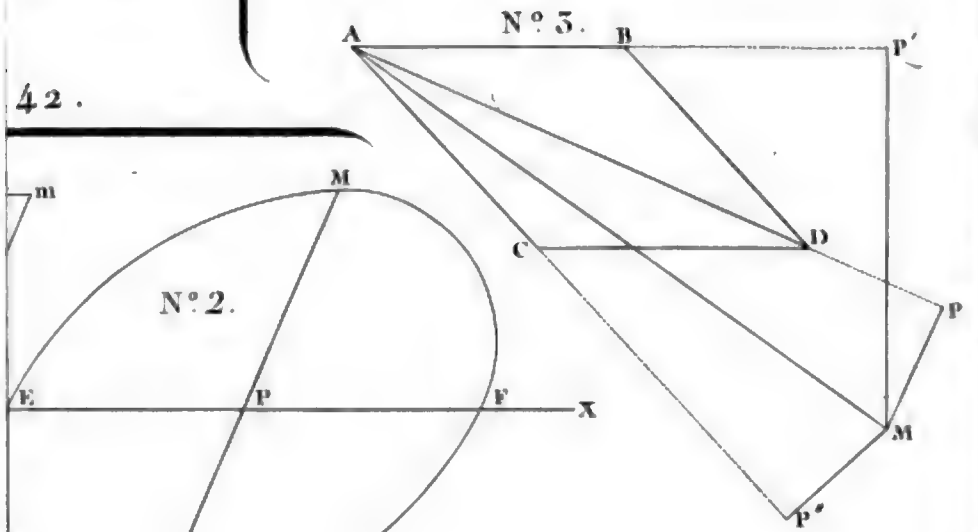
Fig. 37.

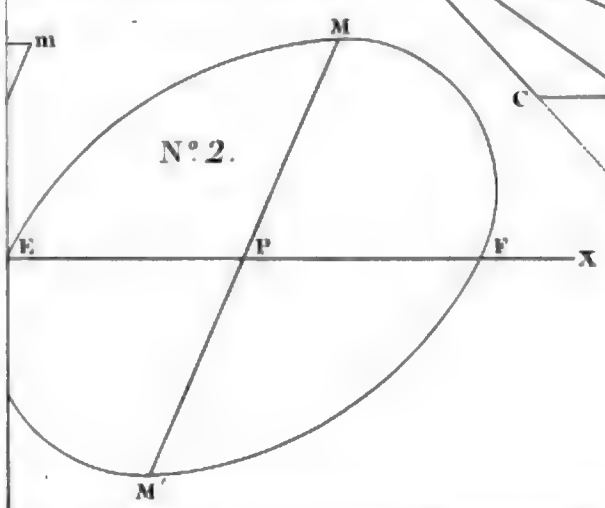






42.

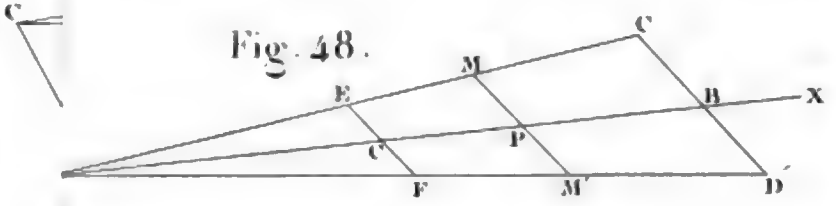




Arnaud sculpsit

Digitized by Google

Fig. 48.



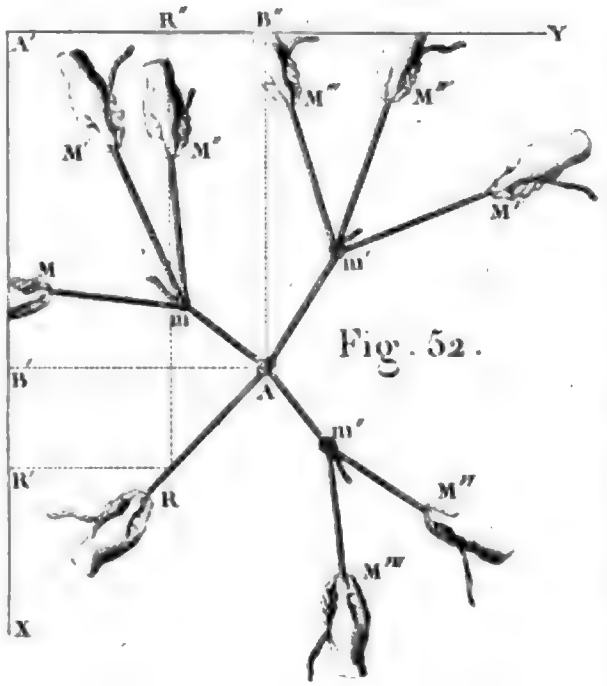
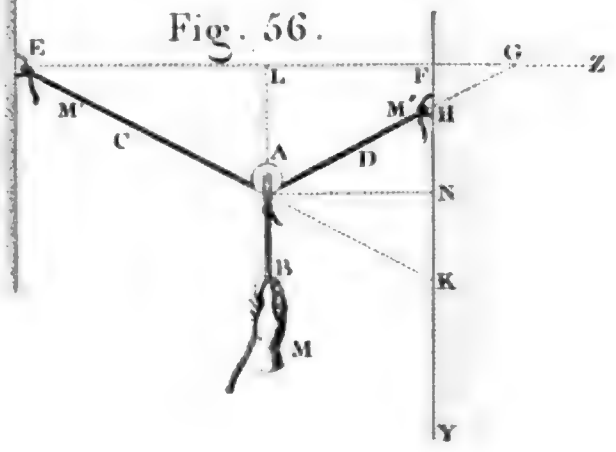


Fig. 52.

Fig. 56.



Digitized by Google

Digitized by Google

Fig . 62 .

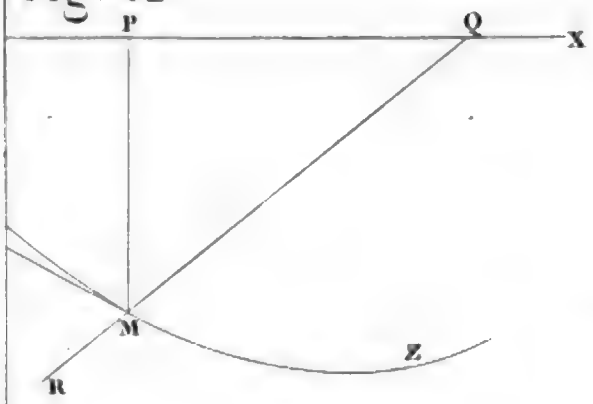
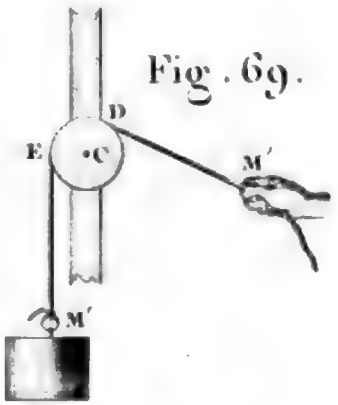
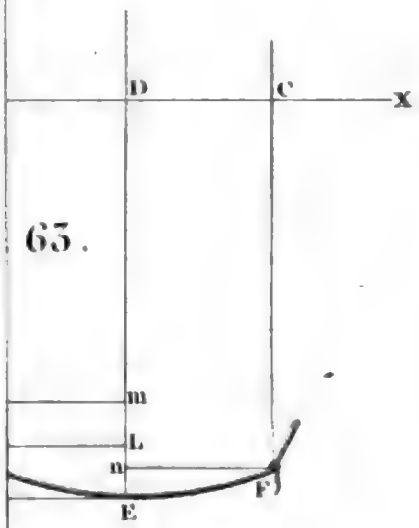


Fig . 69.





63 .

Fig . 64 .

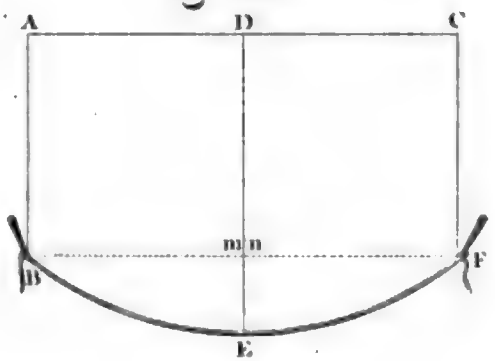


Fig . 67 .

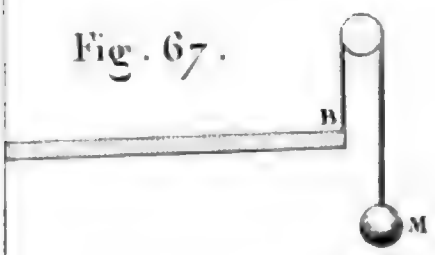
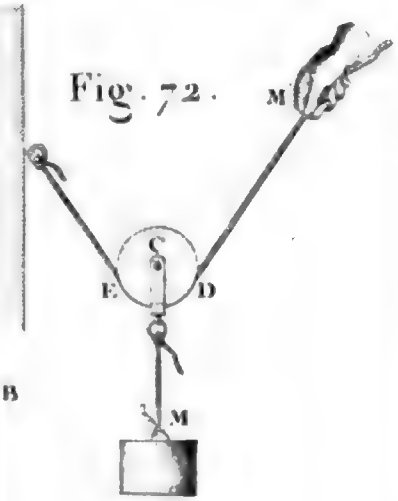


Fig . 72 .



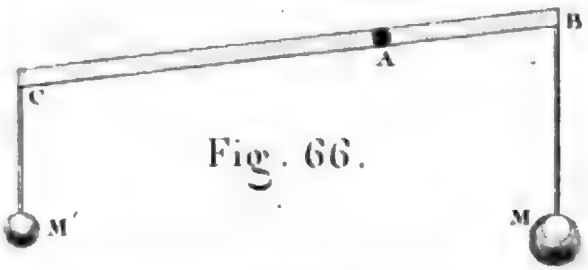


Fig . 66.

Bernard sculpsit

Digitized

Fig. 78.

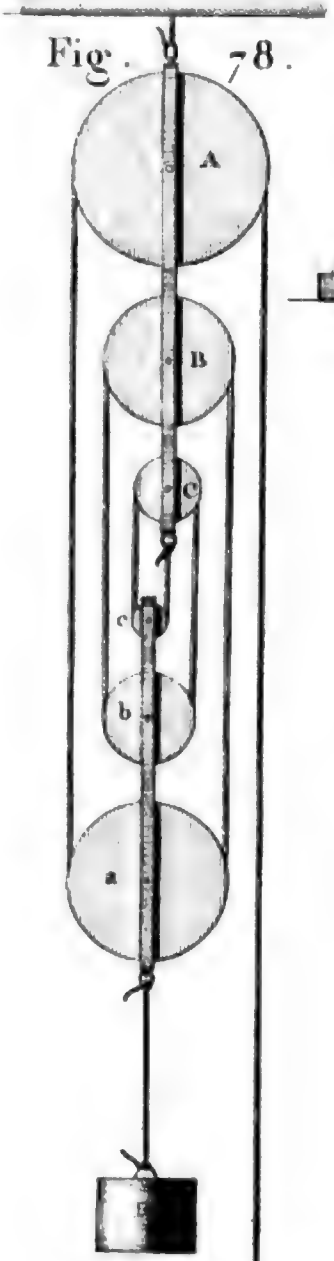


Fig. 82.

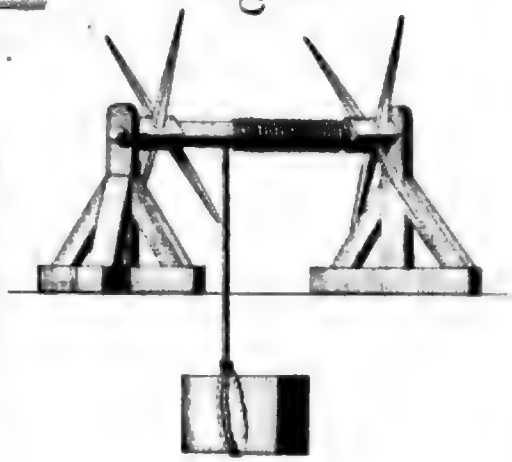
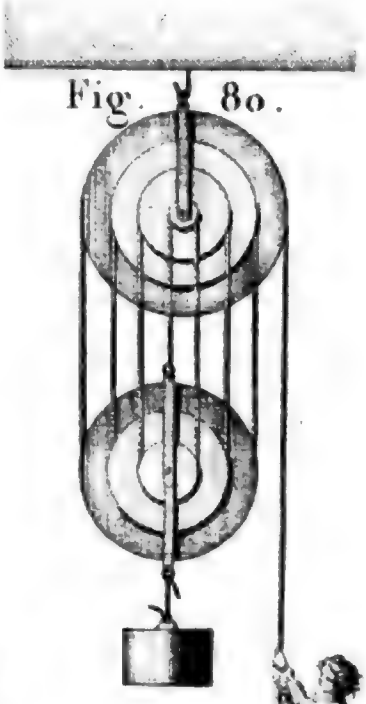
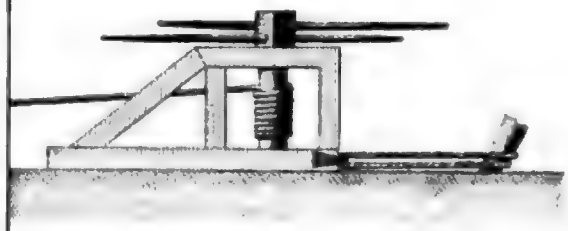


Fig. 80.



Bonard Sculpsit.

Digitized by Google



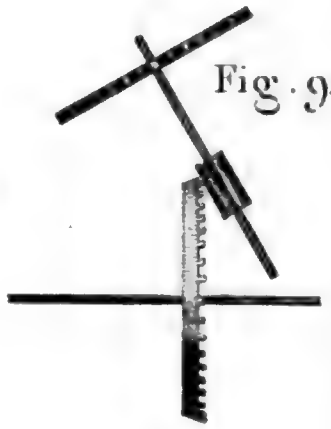


Fig. 92.

Fig. 94.

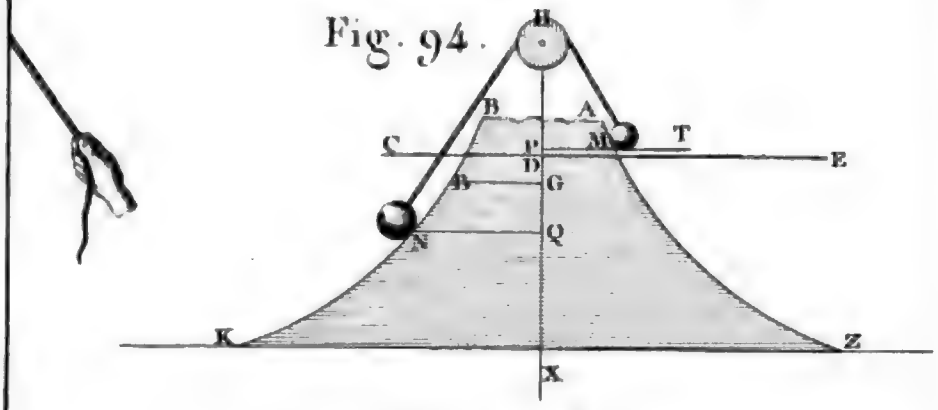
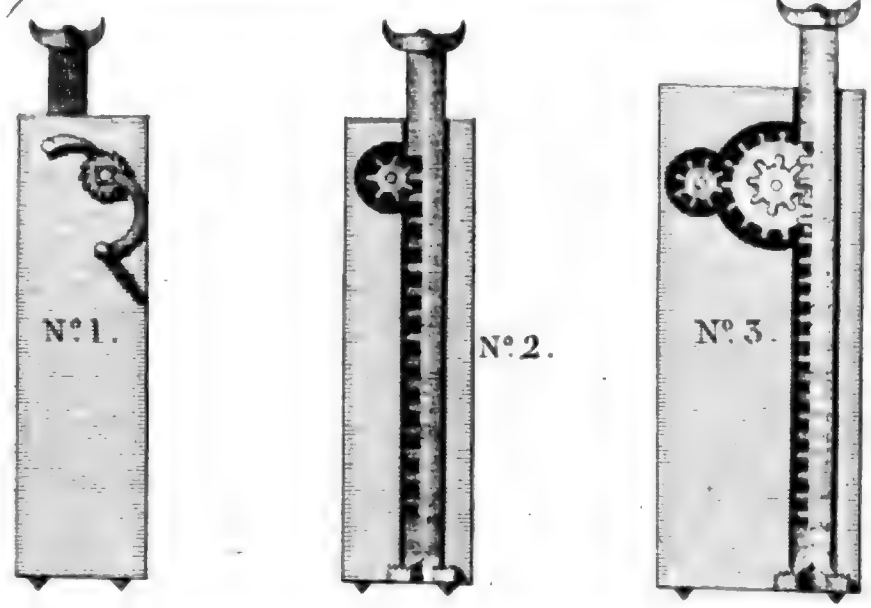


Fig. 93.



Benard Sculpsit.

Digitized by Google

'2.

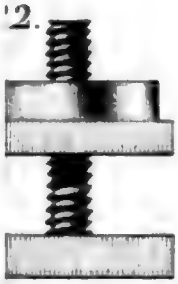
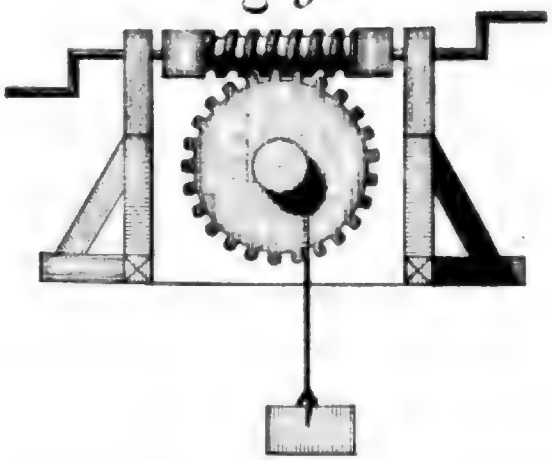
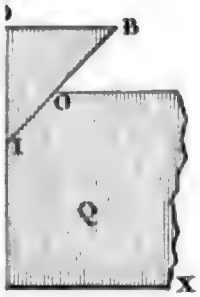


Fig. 98.





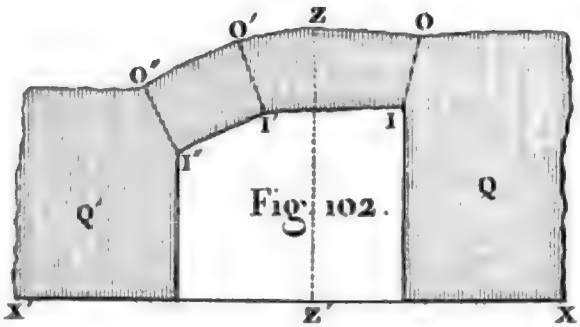
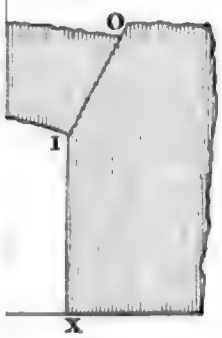


Fig. 102.



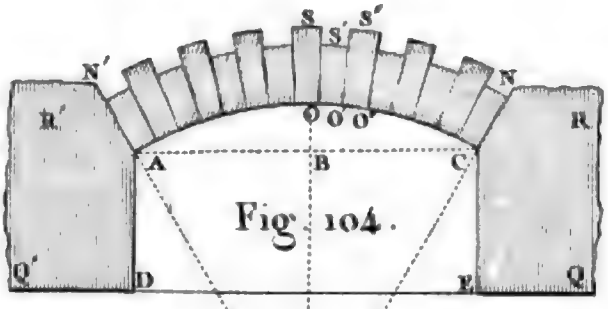


Fig. 104.

Fig. 108.

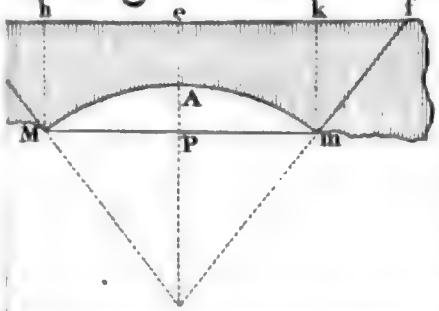
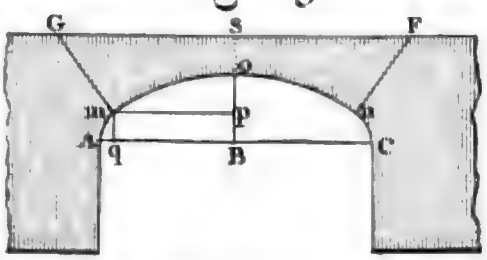


Fig. 109.

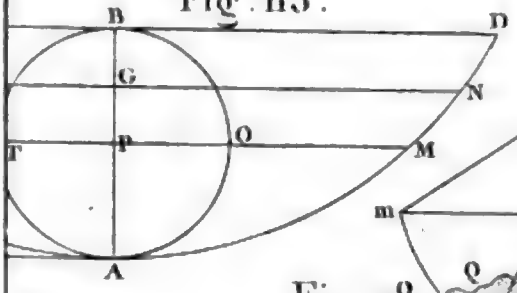


Amard Sculpsit.

Digitized by Google

Digitized by Google

Fig. 113.



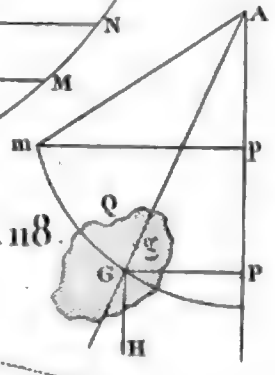


Fig. 118.

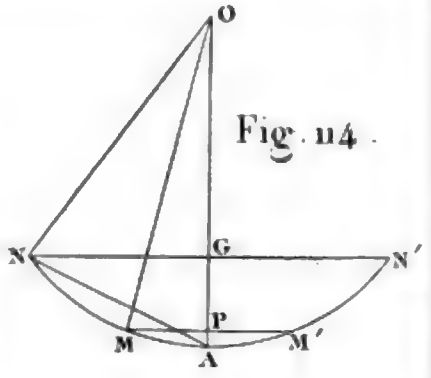
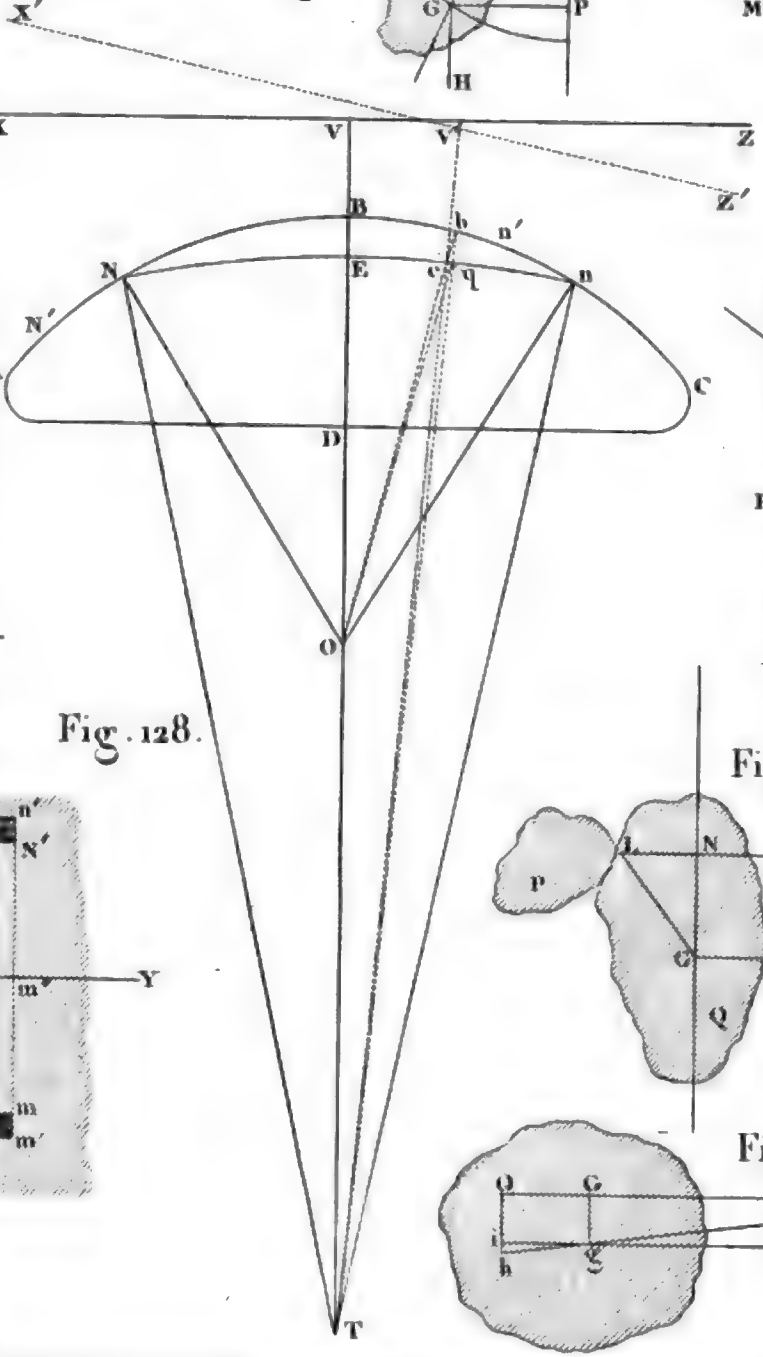


Fig. 114.



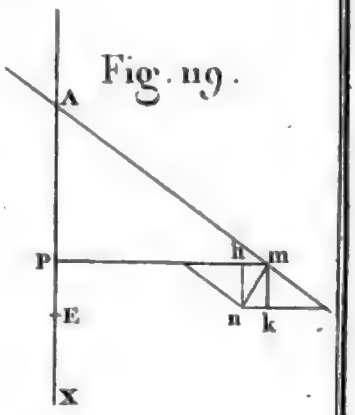


Fig. 119.

Fig. 128.

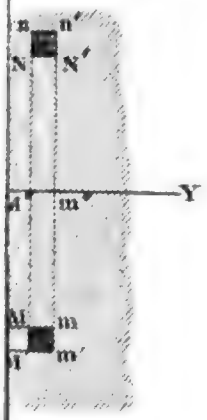


Fig. 121.

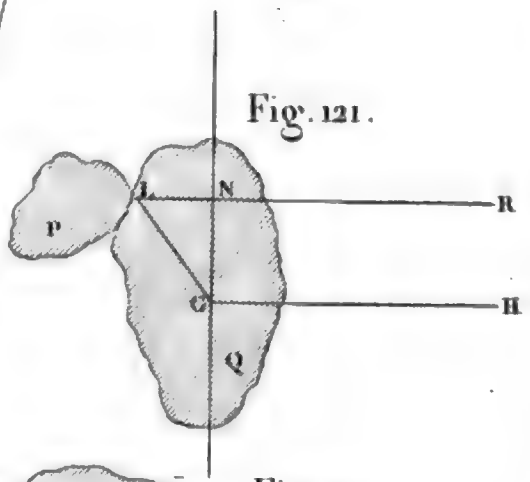
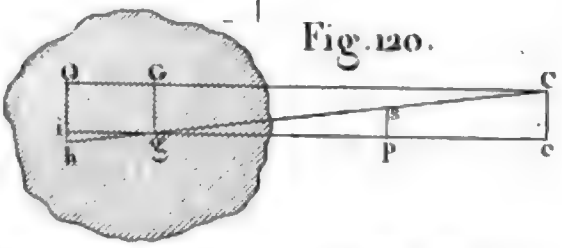


Fig. 120.



Digitized by Google

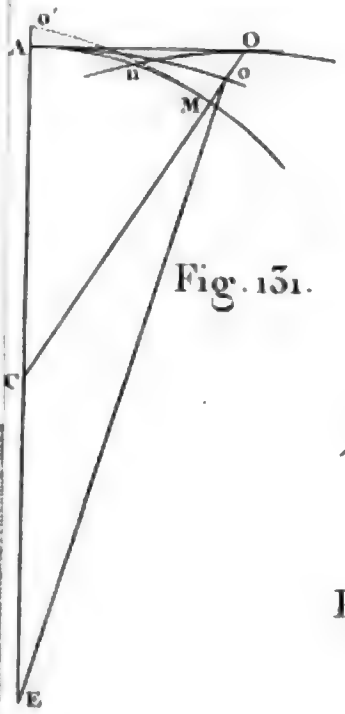


Fig. 131.

Fig. 132.

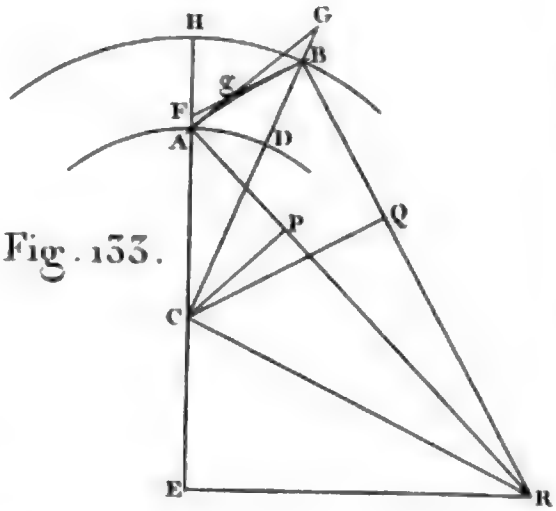


Fig. 133.

Fig. 138.

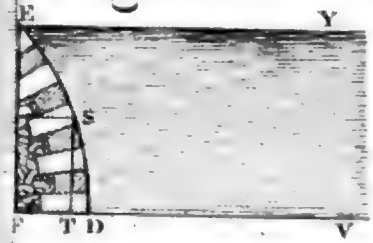


Fig. 142.

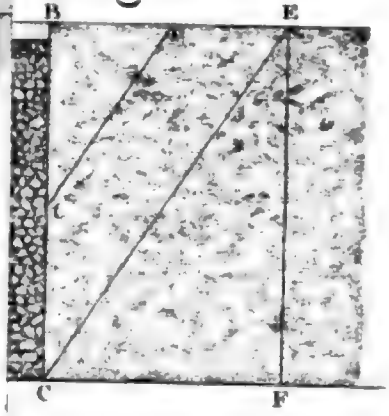


Fig. 143.

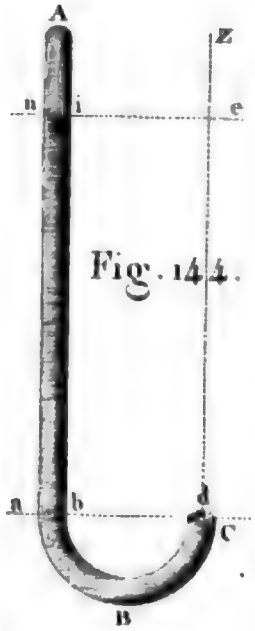
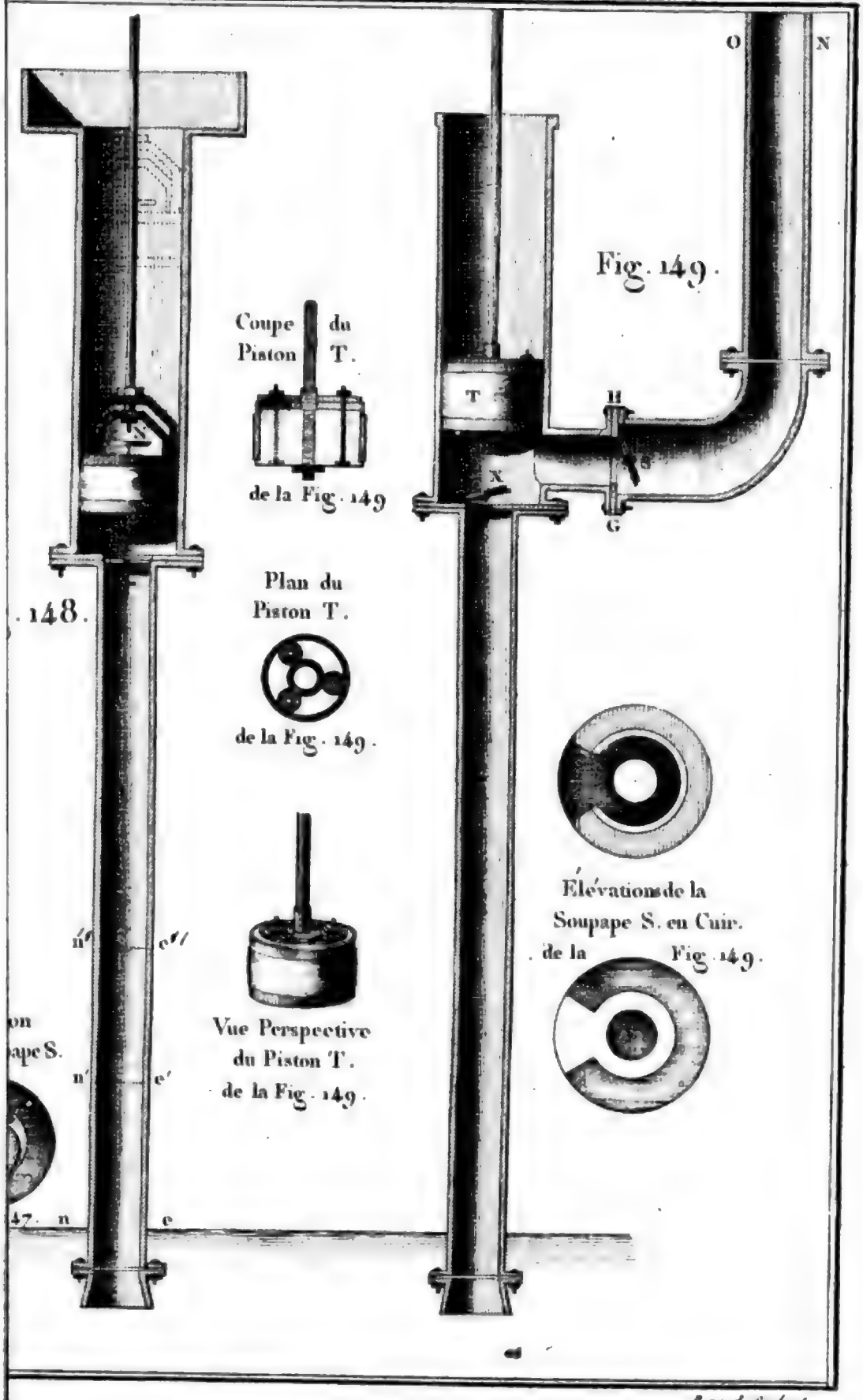


Fig. 144.

Bernard Sculpsit.

Digitized by Google

igitized by Google


O
N
Fig. 149.
Coupe du Piston T.
de la Fig. 149
T
H
X
G
. 148.
Plan du Piston T.
de la Fig. 149.
Elévation de la Soupape S. en Cuir.
de la Fig. 149.
Vue Perspective du Piston T. de la Fig. 149.
n'
e'/
on
ape S.
n'
e'
47. n
e

itized by Google

Fig. 153.

Fig. 154.

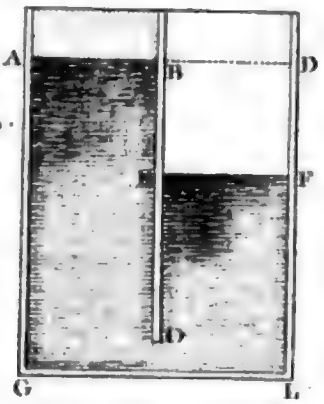
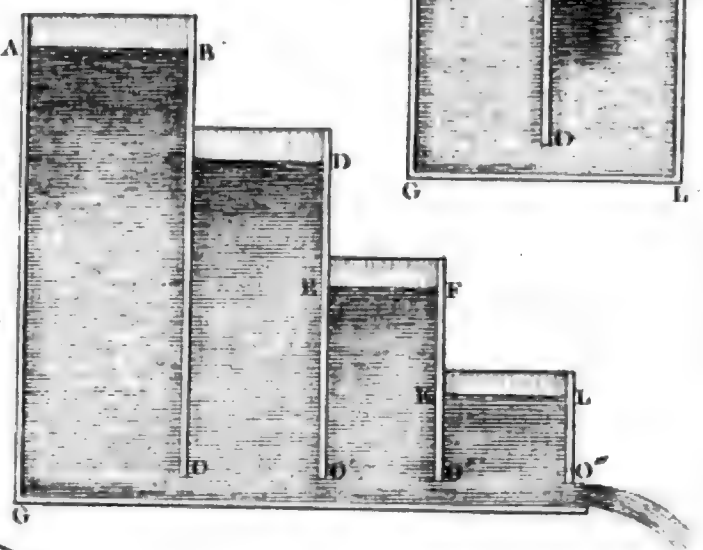


Fig. 155.



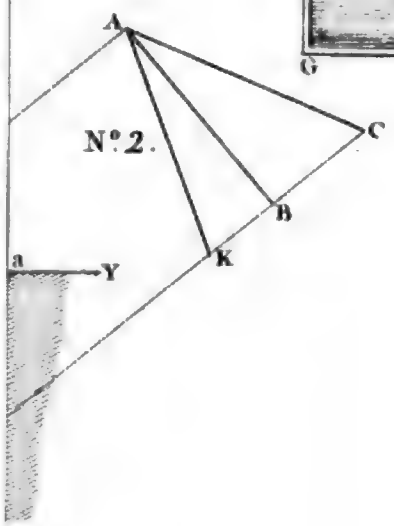
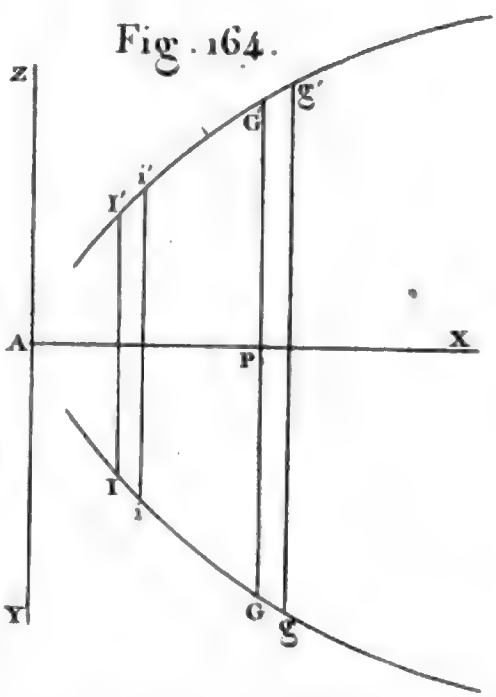
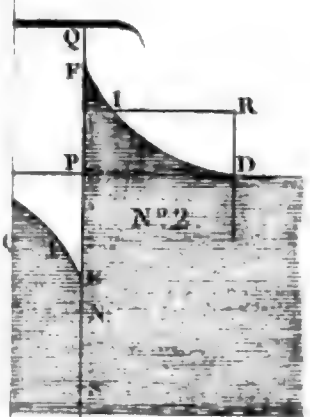


Fig. 164.





Armand sculpsit.

Digitized by Google

Digitized by Google

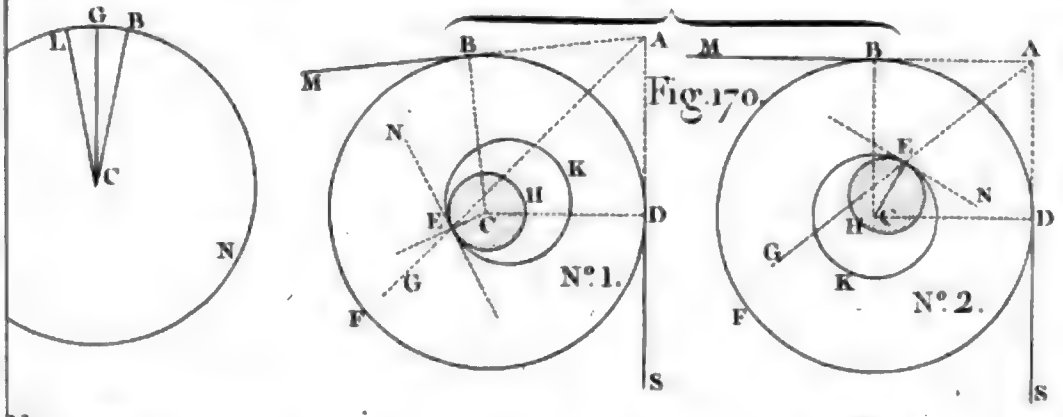
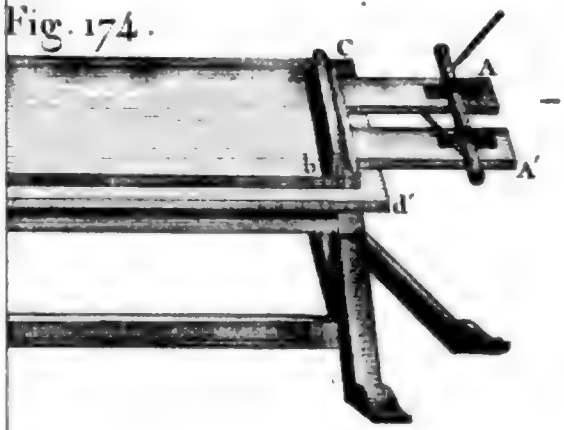


Fig. 174.



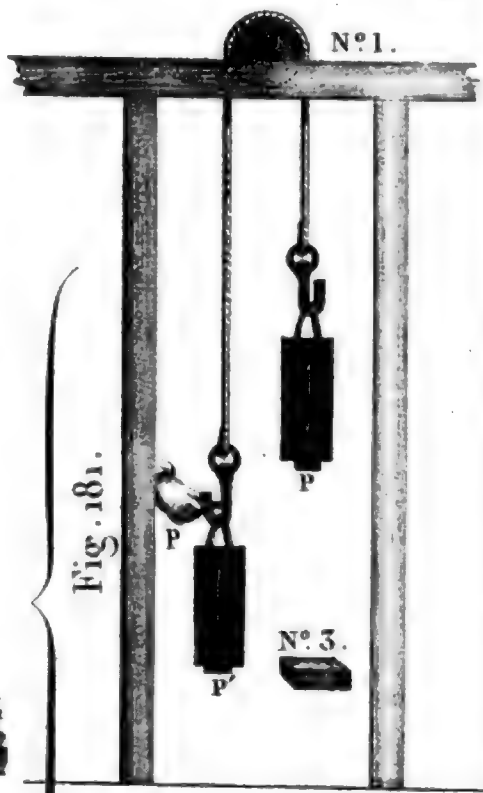


Fig. 181.

Fig. 176.

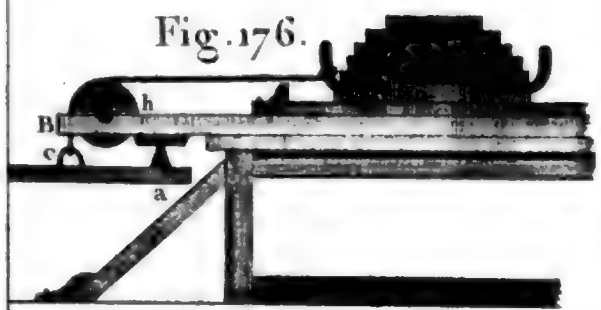
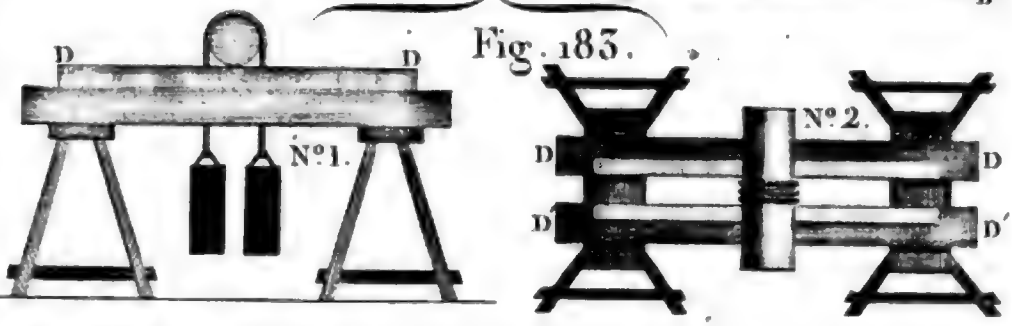


Fig. 183.



Bernard Sculpsit

Digitized by Google

Fig. 187.

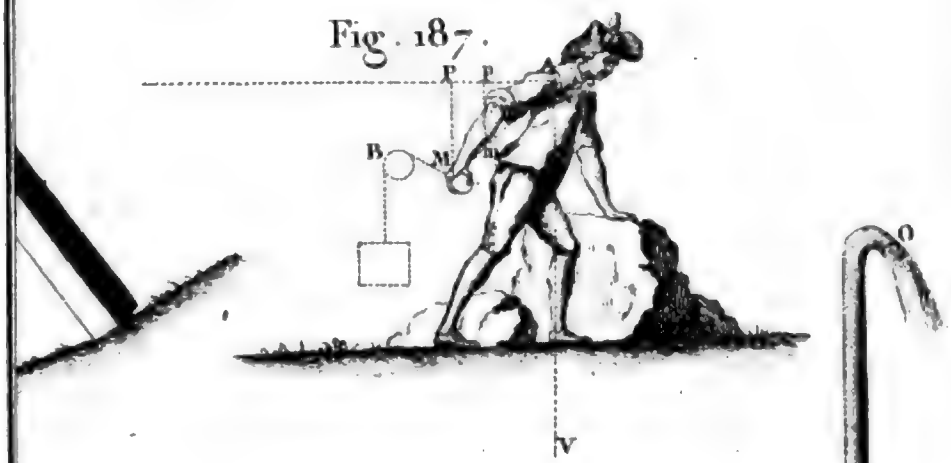
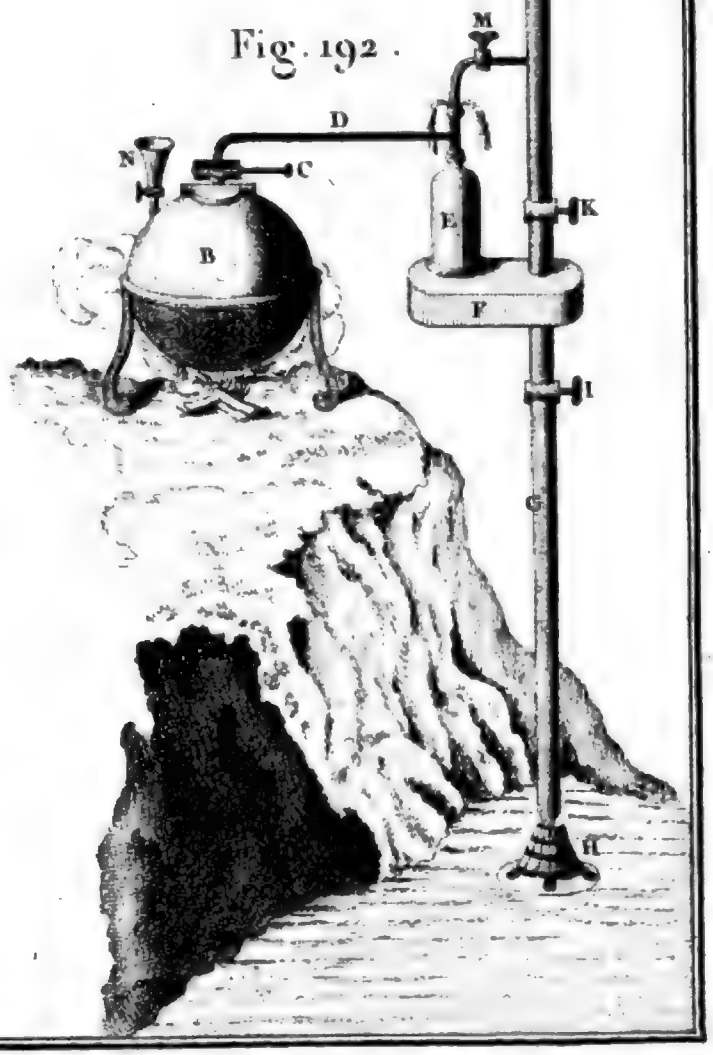


Fig. 191.

Fig. 192.



Digitized by Google

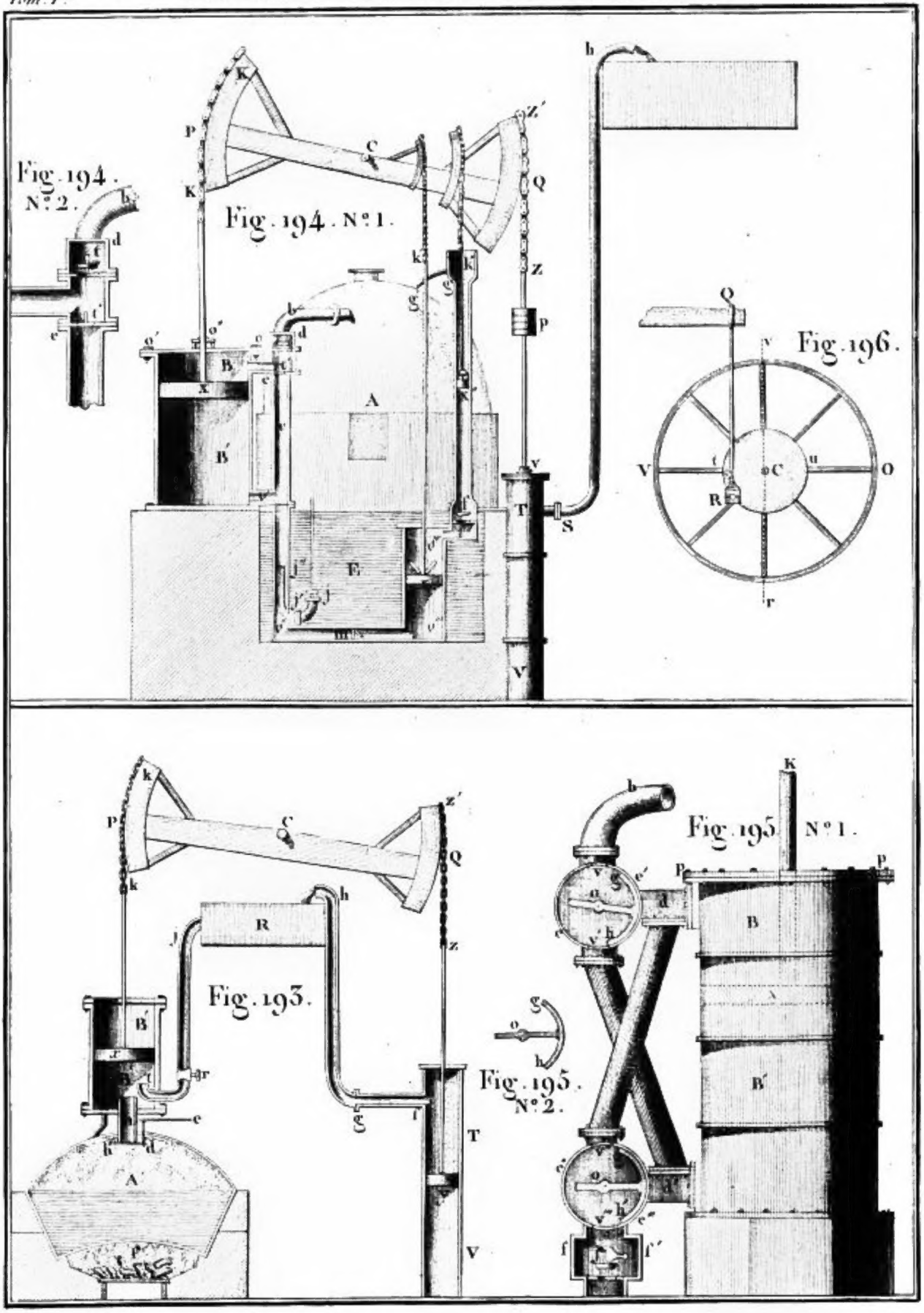


Fig. 194. N.° 2.
Fig. 194. N.° 1.
Fig. 196.
Fig. 193.
Fig. 195. N.° 1.
Fig. 195. N.° 2.

Digitized by Google

005663225
Digitized by Google

Digitized by Google